

(17) 非構造多面体セル要素とその三次元大変形問題への適用

An arbitrary median-meshed polyhedral cell and its application
to large deformation problems in three dimensions

伊東雅晴*, 廣江哲幸**
Masaharu Itoh, Tetsuyuki Hiroe

*伊藤忠テクノソリューションズ(株) (〒100-6080 東京都千代田区霞が関3丁目)
** 工博, 熊本大学教授, 工学部機械システム工学科 (〒860-8555 熊本市黒髪2丁目)

Key Words: Computational mechanics, Polyhedral cells, Tetrahedral elements, Locking phenomena, Taylor impact test, Penetration analyses
キーワード: 計算力学, 多面体セル, 四面体要素, ロッキング現象, テイラー衝突試験, 衝突解析

1. はじめに

物体の変形を有限要素法や有限差分法を用いて数値解析するには計算メッシュを必要とする。この計算メッシュは3次元ラグランジュ表示の場合、計算結果の精度を考慮して六面体要素が用いられることが多い。しかし複雑な3次元形状の物体を六面体要素だけでメッシュ分割することは、汎用の要素分割ソフトウェアでも困難な課題である。一方、四面体要素の使用を許せばデローニ法などの自動要素分割手法が適用できるので、メッシュ作成に要する作業量を大幅に軽減することが可能となる。

しかし四面体一次要素には欠点がある。ラグランジュ表示の四面体一次要素は、非圧縮性の変形やせん断変形に対して一般に体積ロッキングやせん断ロッキングとよばれるロッキング現象を示すため、固体の変形を精度良く模擬することができない。

この欠点を克服する既往の研究には、Average Nodal Pressure法¹⁾やAverage Nodal Deformation Gradient法^{2), 3)}がある。これらの手法の特徴は、四面体要素の圧力や速度勾配テンソルを計算したのち、これら変数の節点値をその節点を共有する四面体要素の平均値として与えることで、四面体一次要素の欠点である極端に剛な変形特性の緩和を図ることにある。このため平均化圧力や平均化速度勾配テンソルが新しい変数として導入される。

それに対して本研究で用いる非構造多面体(Arbitrary Median-meshed Polyhedral)セル⁴⁾においては、速度だけでなく応力や内部エネルギーなどの熱力学変数もすべて節点位置で定義される。したがって既往の手法のように節点と要素の間の変数の平均化操作を必要とせず、変数

を新たに導入する必要はない。また節点数と要素(セル)数が等しいので体積変形に関する拘束比³⁾が最適になりロッキングが発生しにくいという特長をもつ。

計算例として金属棒の高速衝突問題、弾性棒の曲げ問題をとりあげ、体積ロッキングとせん断ロッキングの発生が効果的に抑制されていることを示す。続けてコンクリート板の高速衝突試験の解析に適用し、実験結果および六面体要素を用いた計算結果との比較検討を通じて本手法の有効性を確認する。

2. 非構造多面体セルの概要

2.1 非構造多面体セルの構築

はじめに解析対象の物体を汎用のメッシュ作成ソフトウェアにより4節点四面体で分割する。続いて四面体を構成している各辺や各面の midpoint と重心の座標を求め、これらの点を連結すると図-1に示すように、四面体は等

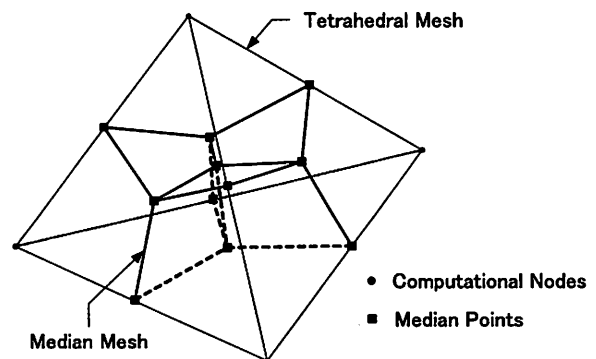


図-1 四面体要素と4個のサブセル

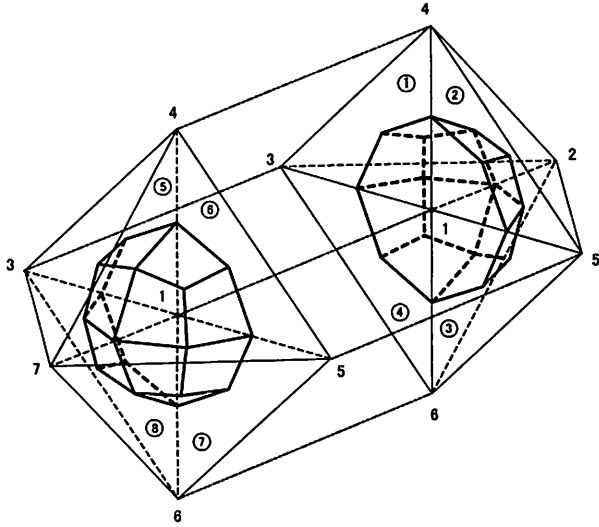


図-2 多面体セルを構成する8個のサブセル

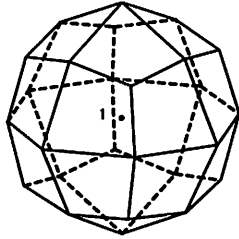


図-3 3次元多面体セルの例

しい体積をもつ4個の四面体に分割される。この四面体をサブセルとよぶこととする。サブセルは1個の節点と7個の中点 (median point) から構成される。

同じ節点を共有するサブセルを結合してコントロール・ボリュームを構築し、これを非構造多面体セルと名付ける (以下、多面体セルあるいは AMP セルと略記)。図-2と図-3に、8個の四面体 (細線) と節点1を共有する8個のサブセルから構築された多面体セルの例を示す。密度・内部エネルギー・速度ベクトル・応力テンソル等の変数はすべて節点で定義され、多面体セル内部では一定である。

多面体セルと四面体を2次元で表現した場合の例を図-4に示す。3次元の場合には、三角形は四面体、多角形 (太線) は多面体セルとなる。

2.2 保存式の離散化

三次元空間内で質量 m をもつ閉領域 Ω に対する保存式は、物体力と熱の影響を無視できるときデカルト座標系 x_i ($i=1,2,3$) を用いて次式^{5), 6)}により表される。

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega = 0 \quad (1)$$

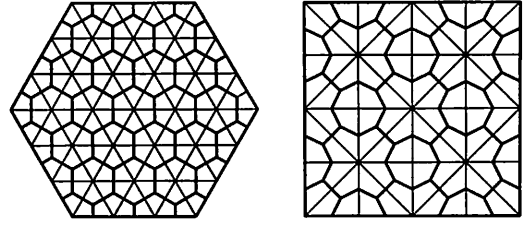


図-4 2次元表示の多面体セル (太線)

$$\int_{\Omega} \rho \frac{Du_i}{Dt} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} d\Omega \quad (2)$$

$$\int_{\Omega} \rho \frac{De}{Dt} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega \quad (3)$$

上式 (1)~(3)はそれぞれ質量保存式、並進運動量保存式、エネルギー保存式に対応する。ここで ρ , e , u_i , σ_{ij} , $\dot{\epsilon}_{ij}$ はそれぞれ密度、比内部エネルギー、速度ベクトル、コーシー応力テンソル、速度勾配テンソルを表す。また微分記号 $D/Dt = \partial/\partial t + u_i \partial/\partial x_i$ と変数上の黒点は物質導関数を意味する。ベクトルとテンソルは太字または下添え字付きの成分により表示する。添え字付きの場合、内積は総和規約を用いて表す。

多面体セルに対して保存式 (1)~(3)を適用する。

ラグランジュ表示の下では多面体セルの表面を介して物質の流入・流出はなく質量は一定である。したがって質量保存式 (1)から、現在時刻すなわち第 n ステップ時の密度について次式を得る。

$$\rho^n = m/V^n \quad (4)$$

ここで V はサブセル k の体積 V_k の和から

$$V^n = \sum_{k=1}^{k_{\max}} V_k^n \quad (5)$$

与えられる。ただし k_{\max} は多面体セルを構成するサブセルの総数を表す。図-2の場合 $k_{\max} = 8$ である。

並進運動量保存式 (2)の右辺に発散定理を適用して体積積分を面積分に変換して次式を得る。

$$\rho \dot{u}_i V = \int_S \sigma_{ij} n_j dS. \quad (6)$$

次に右辺を多面体セル表面上での応力と面積ベクトルとの積の総和で近似すると

$$m \dot{u}_i^n = \sum_{l=1}^{l_{\max}} \sigma_{ij}^n \Delta S_j^n \equiv f_i^n. \quad (7)$$

となる。ただし f_i^n は節点力、 l_{\max} は多面体セルの表面四角形の総数を表す。図-2の場合 $l_{\max} = 24$ である。

エネルギー保存式 (3)の両辺の被積分項は多面体セル内で一定であるから、これを積分記号の外に出して両辺

を $V = \int_{\Omega} d\Omega$ で除し、比内部エネルギーの変化率として

$$\dot{e}^{n-1/2} = \frac{1}{\rho^n} \sigma_{ij}^n \dot{\epsilon}_{ij}^{n-1/2} \quad (8)$$

を得る。これより比内部エネルギーは次式にしたがい更新する。

$$e^n = e^{n-1} + \dot{e}^{n-1/2} \Delta t^{n-1/2} \quad (9)$$

3. 数値解析例

3.1 金属棒の高速衝突

多面体セルが体積ロッキングを回避できることを確認するために、Taylor 衝突問題を例題として取り上げ試験結果⁷⁾および六面体要素の計算結果と比較する。供試体は円柱形で直径 6.4mm、長さ 31.77mm である。表-1 に示すように 3 種類の材質の異なる供試体に対してそれぞれ多面体セルと六面体要素を適用し、合計 6 ケースの解析を行う。

多面体セルの計算メッシュには図-5 に示すように、節点为非一様的に分布したメッシュを意図的に用いる。また六面体要素の計算メッシュは半径方向に 8 等分、長さ方向に 40 等分した一様なメッシュとする。多面体セルと六面体セルいずれも対称性を考慮して計算体系は 1/4 とする。材料モデルとして、加工硬化、ひずみ速度依存性、温度依存性が考慮できる Steinberg-Guinan 構成則を用い、材料定数は文献⁷⁾から引用する。

図-6 に計算で得られた供試体の最終変形メッシュ形状を示す。各ケースとも左側が多面体セル、右側が六面

表-1 Taylor 試験のパラメータ

Case	Material	V_0	T_0
(a)	6061-T6 Al	406	295
(b)	ETP Copper	277	295
(c)	4340 Steel	177	1280

V_0 : Impact velocity (m/s) T_0 : Initial temperature (K)

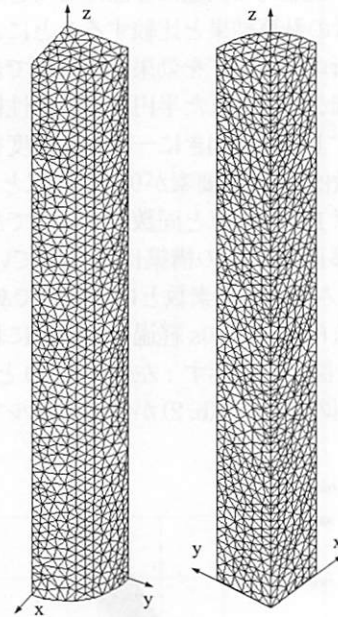


図-5 Taylor 衝突問題の計算メッシュ

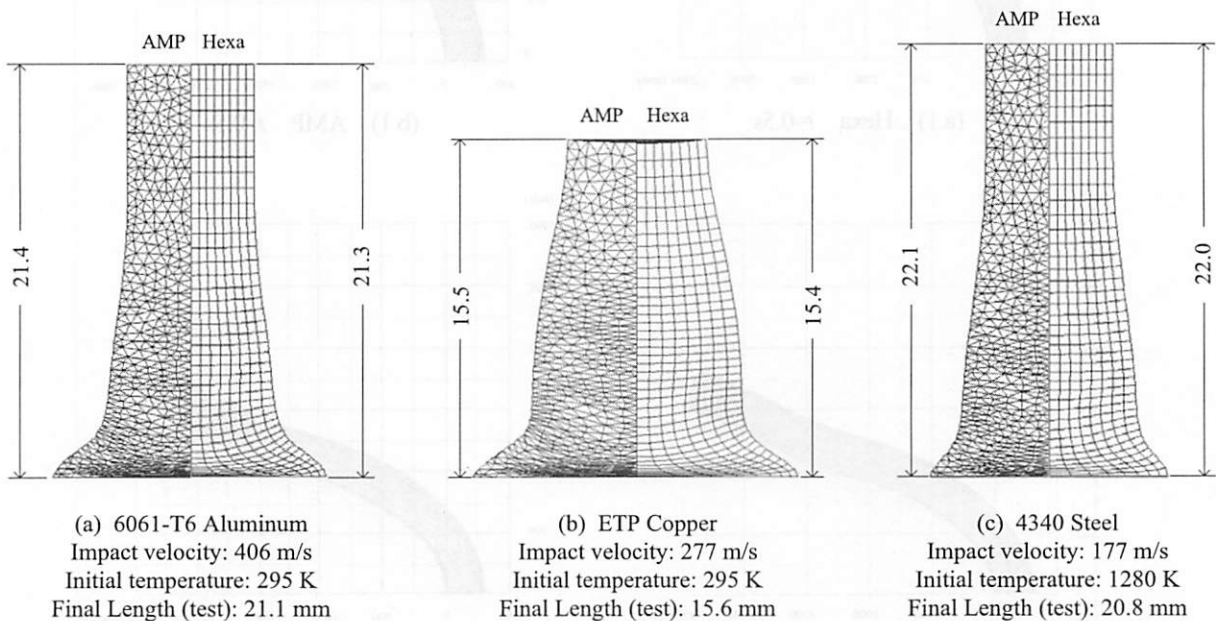


図-6 多面体(AMP)セルと六面体要素(Hexa)による Taylor 試験⁷⁾供試体の最終変形形状の比較

体要素の結果である。ケース(a)と(b)については、計算で得られた供試体の最終長さが両者とも実験結果と良く一致している。ケース(c)の場合には、多面体セルと六面体要素の計算結果は一致したが、実験結果とは約6%の差が生じた。ただしこの差は適切な材料定数を用いれば小さくなると考えられる。

3.2 弾性棒の曲げ問題²⁾

曲げ変形が支配的な例題に多面体セルと六面体要素を適用し、両者の計算結果と比較することにより、多面体セルがせん断ロックを効果的に抑制できることを確認する。一端が固定された半円柱形の弾性棒に対して、図-7に示すように右向きに一樣な初速度を与える。節点数と要素数は、六面体要素が91443節点と82944要素、多面体セルは15352節点と同数のセル数である。なお後者の場合、多面体セルの構築に寄与している四面体は80409個で、六面体の要素数とほぼ同数である。

計算開始後0.5sと1.0s経過した時点における弾性棒の変形形状を図-8に示す：左側の(a.1)と(a.2)が六面体要素、右側の(b.1)と(b.2)が多面体セルである。これ

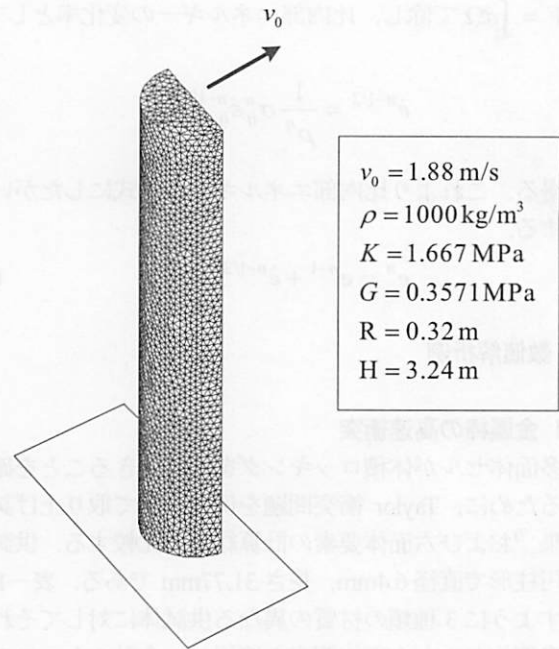


図-7 半円柱の計算メッシュと材料定数²⁾

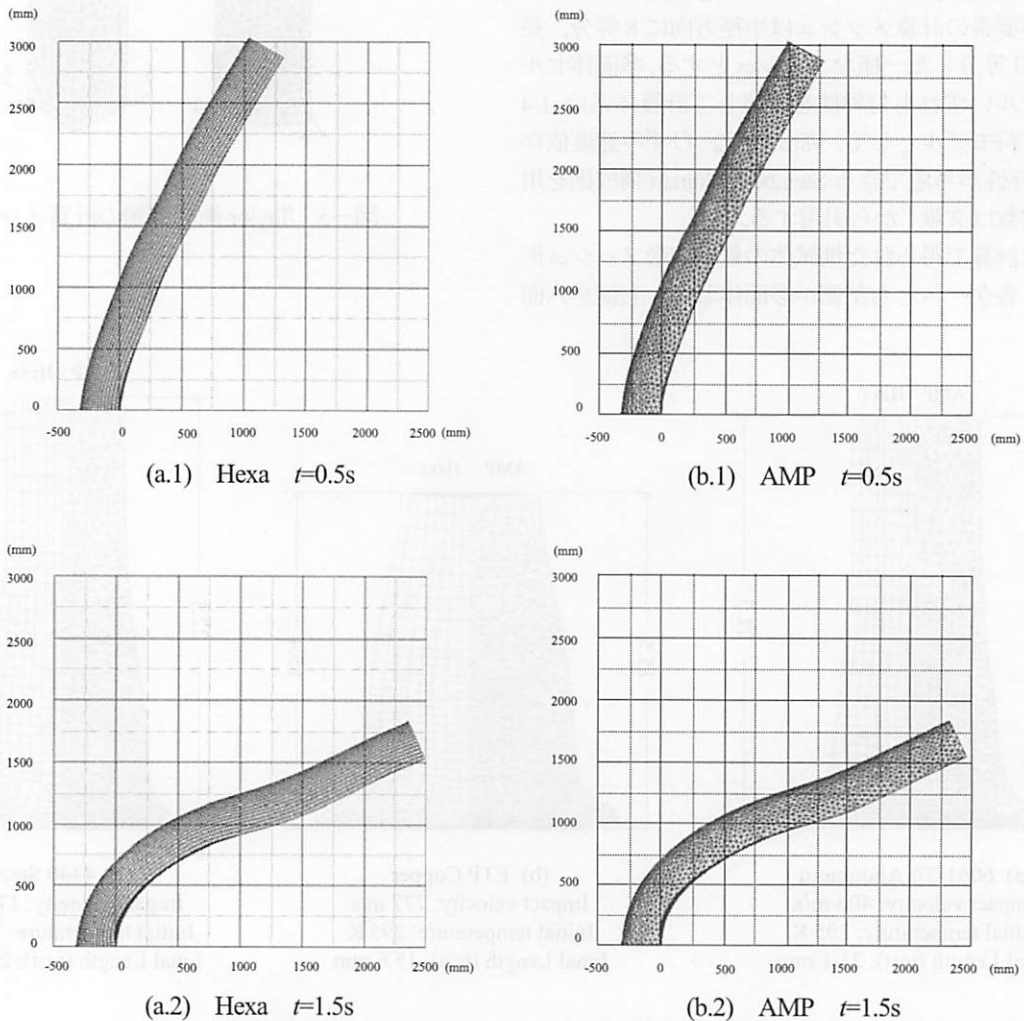


図-8 多面体 (AMP) セルと六面体 (Hexa) による半円柱形弾性棒の変形形状の比較

らの図を比較すると明らかなように多面体セルの変形形状は六面体要素の結果と良く一致している。多面体セルはせん断ロッキングの発生を回避することが可能である。

3.3 コンクリート板の高速衝突試験の解析⁸⁾

高速衝突解析に多面体セルを適用し、六面体要素による計算結果および実験結果と比較することにより、衝突問題への適用可能性を確認する。解析対象は鋼製の飛翔体とコンクリート板から構成される。衝突速度は400m/sである。図-9に外形寸法と計算メッシュを示す。多面体セルと六面体要素の節点数はほぼ同数である。飛翔体の材料定数は、密度7.8g/cm³、体積弾性係数178GPa、横弾性係数82.3GPa、降伏応力411.9MPa、加工硬化係数

1766MPa、破断ひずみ0.166である。コンクリートの材料定数は、密度2.3g/cm³、体積弾性係数12.7GPa、横弾性係数9.54GPa、スポール圧力-2.59MPaである。また降伏応力は次のドロッカー・プラグー降伏モデルで与える。

$$\sigma_y = \min(39.9, 2.28p + 5.91) \quad (10)$$

ここで σ_y は降伏応力(MPa)、 p は圧力(MPa)を表す。

解析で得られた飛翔体とコンクリート板の最終変形形状を図-10に示す。飛翔体の貫入距離は、多面体セルが73.5mm、六面体要素が75mmであった。両者の結果は、前掲の計算例ほどではないが、一致していると判断できる。ただし実験結果の貫入距離62mmとは一致しなかった。これはひずみ速度による強度の上昇を無視して、コ

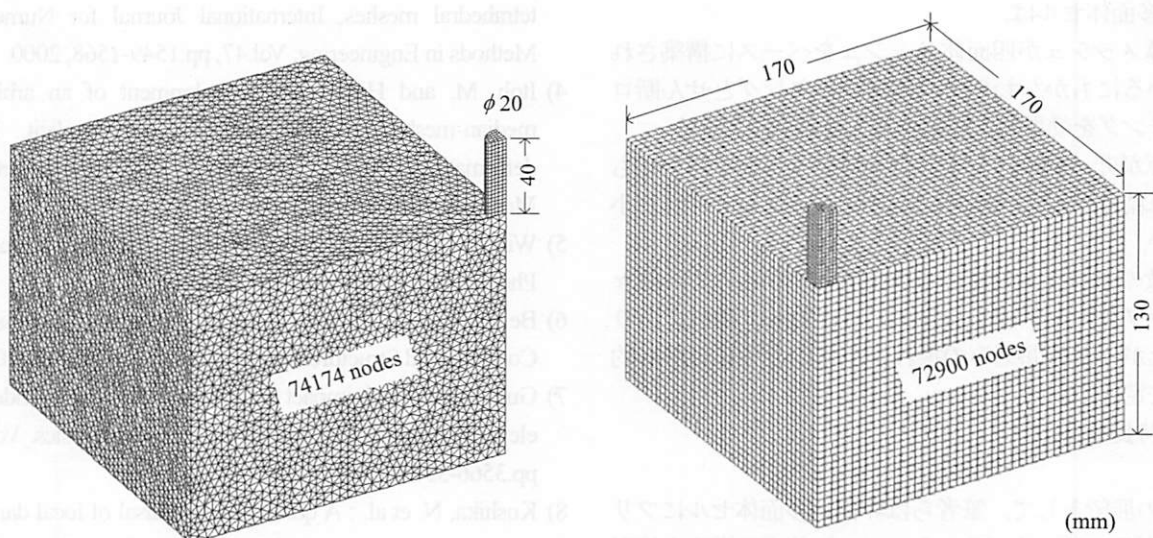


図-9 コンクリートと飛翔体の初期メッシュ形状：多面体セル（左）、六面体（右）

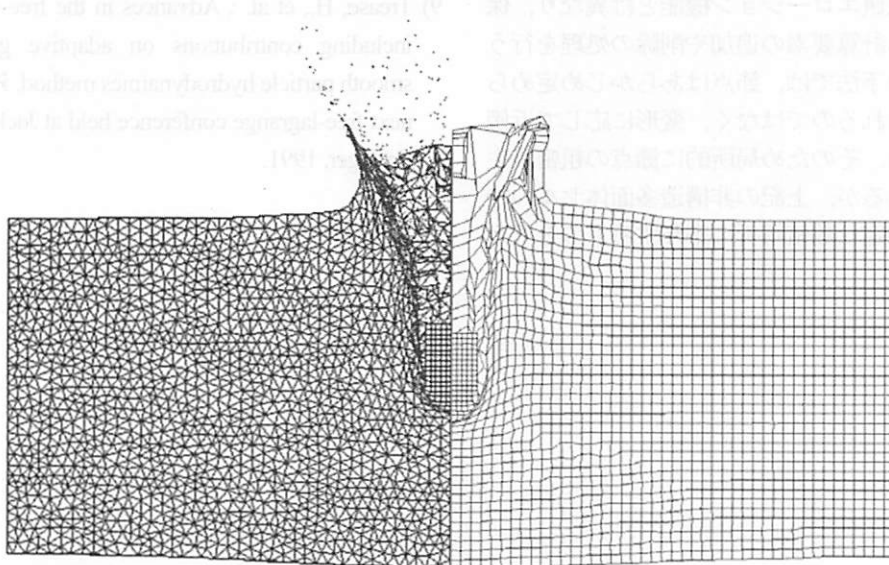


図-10 0.7msにおけるコンクリートと飛翔体の変形形状：多面体セル（左）、六面体（右）

ンクリートに静的な材料定数を用いたことが原因であると考えられる。

なお本計算では、極度に変形した計算要素を計算途中で自動的に除去して数値的な安定化を図る数値エロージョン機能を用いた。相当ひずみが 300%を超える計算要素はエロージョン機能により解析体系から削除した。

4. 結論と今後の展望

本研究では、筆者らが新たに開発した非構造多面体セルを Taylor 衝突試験の解析、弾性棒の曲げ問題、コンクリート板の高速衝突試験の解析に適用し、実験結果や六面体要素の計算結果と比較して、以下の知見を得た。

非構造多面体セルは、

- (1) 計算メッシュが四面体メッシュをベースに構築されているにもかかわらず、体積ロッキングとせん断ロッキングを効果的に回避することが可能である、
 - (2) 節点が非一様に分布した計算メッシュを用いても計算精度の劣化が顕著に表れずメッシュ依存性が小さい、
 - (3) 複数のサブセルの集合で構成されているので、個々のサブセルのメッシュのつぶれに対して鈍感であり、したがって時間刻みの振れが小さいので数値解析的に安定化である、
- という特長をもつ。

今後の展望として、筆者らは非構造多面体セルにフリー・ラグランジュ法 (Free Lagrange) 法⁹⁾の導入を検討している。これはラグランジュ表示の計算要素の欠点のひとつであるメッシュのつぶれを回避することが可能な計算手法であり、数値エロージョン機能とは異なり、保存則を満足しながら計算要素の追加や削除の処理を行うことができる。この手法では、節点はあらかじめ定められた接続情報に縛られるのではなく、変形に応じて近傍の節点と結合される。そのため局所的に節点の粗密が生じることが予想されるが、上記の非構造多面体セルの特長が、高精度かつ安定な数値解析に寄与するものと考え

られる。

参考文献

- 1) Bonet, J. and Burton, A. J. : A simple averaged nodal pressure tetrahedral element nearly incompressible dynamic explicit applications, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol.14, pp.437-449, 1998.
- 2) Bonet, J. et al. : An averaged nodal deformation gradient linear tetrahedral element for large strain explicit dynamic applications, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol.17, pp.551-561, 2001.
- 3) Dohrmann, C. R. et al. : Node-based uniform strain elements for three-node triangular and four-node tetrahedral meshes, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.47, pp.1549-1568, 2000.
- 4) Itoh, M. and Hiroe, T. : Development of an arbitrary median-meshed polyhedral cell for explicit large deformation analyses, submitted to the *Japan Society of Mechanical Engineers*, 2008.
- 5) Wilkins, M. L. : *Computer Simulation of Dynamic Phenomena*, p.129, Springer, 1999.
- 6) Belytschko, T. et al. : *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, p.118, John Wiley & Sons, 2001.
- 7) Gust, W. H., High impact deformation of metal cylinders at elevated temperatures, *Journal of Applied Physics*, Vol.53, pp.3566-3575, 1982.
- 8) Koshika, N. et al. : A qualitative appraisal of local damage to concrete structures under impact loadings, *Proceedings of the International Symposium on Impact Engineering*, Vol.1, 1992.
- 9) Trease, H., et al. : Advances in the free-lagrange method: including contributions on adaptive gridding and the smooth particle hydrodynamics method, *Proceedings of the next free-lagrange conference held at Jackson Lake Lodge*, Springer, 1991.