

## (15) スロッシング問題による SMAC-SPH 法の実用性検証

A validation test of the SMAC-SPH method in sloshing problems

浅井光輝\*, 杉 隆紀\*\*, 園田佳巨\*\*\*

Mitsuteru Asai, Takanori Sugi, Yoshimi Sonoda

\*工博, 九州大学准教授, 工学研究院建設デザイン部門 (〒819-0395 福岡市西区元岡 744)

\*\*九州大学大学生, 工学部建設都市工学科 (〒819-0395 福岡市西区元岡 744)

\*\*\*工博, 九州大学教授, 工学研究院建設デザイン部門 (〒819-0395 福岡市西区元岡 744)

*Key Words: (Particle type method, Incompressible flow, Water induced impact)*

キーワード: 粒子法, 非圧縮性流体, 流体衝撃力

## 1. はじめに

1956年にTurner et al.<sup>1)</sup>が有限要素法(FEM)の基礎を提案してから半世紀が経ち、今ではFEMは固体から流体問題までの各種数値解析においては不可欠な存在となっている。現在では、当初では想定していないような複雑な非線形動的な問題(衝撃問題など)や連成問題までもが解析対象となってきた。

FEMでは、支配方程式を弱形式化することで得られる領域積分方程式を、有限の大きさの「要素」に分解し、要素内での積分方程式をマトリクス表記する。そして、最終的には連立一次方程式の解法へと帰着させることで微分方程式を近似的に解く方法である。非線形方程式であっても、一度線形化するというプロセスが追加されるだけで、本質的な違いはない。

成熟したFEMではあるが、関連した問題がすべて解決された訳ではない。FEMの基礎をなす「要素(=メッシュ)」の存在が逆にアダとなり、解析を困難とする例がある。たとえば、大変形、亀裂進展、分離・合体で見られる要素のつぶれに起因する問題である。このため、1990年代ではメッシュを必要としない解法(=メッシュレス解法)の開発が盛んに行われるようになり、本研究で採用したような粒子型の解法が脚光を浴びるようになった。

以上は、FEMに関する研究を実施してきた立場からの主観的な大まかなレビューではある。粒子法に携わってきた方からすれば、粒子法の歴史は古く、全く別の捉え方もできよう。たとえば、本研究で採用したSmoothed Particle Hydrodynamics法(SPH法)は、惑星物理の分野での衝突現象のシミュレーション技術としてLucy<sup>2)</sup>により提案された手法であり、1977年に発表された。また、

粒子型解法の定義を大きくすれば、Cundall<sup>3)</sup>の個別要素法は1971年に発表された手法である。このように背景をまとめる際には、粒子間の力の伝達方法、物理量およびその勾配値の与え方などにより分類し、整理されるだろう。

本研究では、流体衝撃力を受ける固体の非線形問題を解くことを最終目的に掲げる。このとき、流体の砕波、飛沫などの幾何学的に複雑な現象までを精緻に再現するとの方針から、メッシュを必要としない粒子法のひとつであるSMAC-SPH法<sup>4)</sup>を採用し、まずは非圧縮性流体の数値解法としての有用性の検証から実施することにした。本稿では、その手法の特徴のみを簡単に紹介したのち、スロッシング問題の数値解析例を通して実用性を示すことに主眼をあてる。

## 2. SMAC-SPH 法

## 2.1 SPH法の基礎原理

著者の主観的な視点から、SPH法の最大の特徴を挙げるとするならば、メッシュがないことよりも、支配方程式をそのまま(強形式で)離散化する陽解法であることを指摘したい。粒子型解法を構造解析へと適用するに際し、粒子ベースで直交基底関数を定義した陰解法(EFGM<sup>5)</sup>、RKPM<sup>6)</sup>など)も提案されているが、SPH法はこの種の解法とは少し特徴が異なるものと思われる。特に、上記の弱形式化した陰解法では、バックグラウンドセルなどを用いた数値積分が必要となり(最近では節点ベースの積分法も提案されている)、粒子型解法のメリットが小さくなる。本研究では、短時間で激しく形状変化を起こす流体衝撃問題を対象とするため、陽解法により短時間ごとの様子を追跡することが相応しい

ものと考えより SPH 法を選択した。

それではまず、SPH 法の基礎理論である粒子による物理量の離散化方法から説明する。

SPH 法では、空間内に分布する任意の関数を、次式により近似する。

$$f(x) \cong \int f(x') W(x-x', h) dx' \quad (1)$$

ここで、上式は重み関数  $W$  による一種の平均化(平滑化)であると理解できる。この重み関数には3つの条件が課せられている。

- 1) 重み関数の極限がデルタ関数となる。
- 2) 規格化されている。  $\int W(x, h) dx = 1.0$
- 3) コンパクトサポート関数である。

上記の条件を満足する関数としては、複数提案されているが、ここでは本研究で使用した3次 Spline 関数のみを示す。

$$W(x, h) = \begin{cases} \frac{C}{h^D} \left( 1 - \frac{3}{2} z^2 + \frac{3}{4} z^3 \right) & \text{if } z < 1 \\ \frac{C}{4h^D} (2-z)^3 & \text{if } 1 \leq z < 2 \\ 0 & \text{if } z \geq 2 \end{cases} \quad (2)$$

ここで、 $z$  は次式により与えられる代表長さである。

$$z = \frac{|x-x'|}{h} \quad (3)$$

また、式(2)中の定数  $C$  は問題の次元により決定され、2次元では  $C = 10/7\pi$ 、3次元では  $C = 1/\pi$  となる。

ここで、 $dx$  を微小体積要素と考え、図-1に示すように空間内に分布している粒子より、式(1)の積分を離散近似することを考える。粒子の代表質量  $m_j$ 、代表密度  $\rho_j$  とすれば、

$$f(x) \cong \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\rho_j} f(x_j) W(x-x_j, h) \quad (4)$$

として近似する。また、重み関数に課せられた条件を満足すれば、空間微分値は重み関数の空間微分を用いて評価でき、これもまた同様にして粒子上での値を用いて離散近似できる。

$$\begin{aligned} \nabla f(x) &\cong - \int f(x') \nabla W(x-x', h) dx' \\ &\cong - \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\rho_j} f(x_j) \nabla W(x-x_j, h) \end{aligned} \quad (5)$$

式(5)は SPH 法の重要な近似の概念であり、空間微分が粒子上で定義された関数値より直接的に近似できることを意味している。ここで、重み関数は代表長さの陽

な関数として与えているため、重み関数の空間微分した関数も事前に用意することができる。つまり、数値計算では、影響半径内に存在する粒子を探索するアルゴリズムを構築さえすれば、粒子間の距離と粒子上での関数値から、関数とその空間微分関数が内挿できることが SPH 法の大きな特徴である。

ここで、空間微分値の近似として式(5)の代わりに、次式を用いることにする<sup>7)</sup>。

$$\nabla f(x) \cong - \sum_{j=1}^n m_j \left( \frac{f(x_i)}{\rho_i^2} + \frac{f(x_j)}{\rho_j^2} \right) \nabla W(x-x_j, h) \quad (6)$$

以上で説明した SPH 法の概念を要約する。FEM では、仮想仕事の原理(あるいは重み付き残差法)に従い、領域積分型の方程式(弱形式化支配方程式)を作り、それを要素ごと形状関数により離散近似(内挿)するといった手順を踏む。これに対して、SPH 法では、支配方程式を直接、上記の重み関数  $W$  を用いて離散近似するものであり、強形式型の解法といえる。

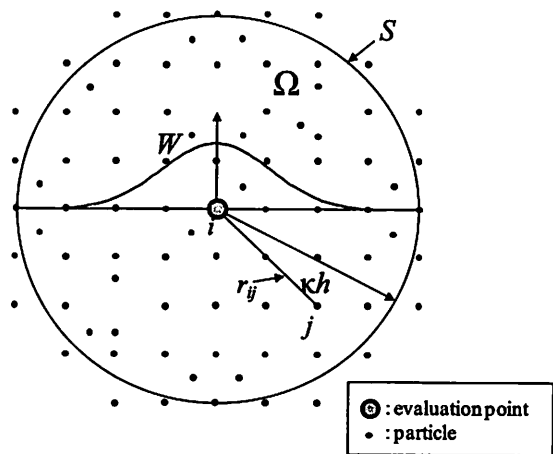


図-1 粒子配置と影響半径

## 2. 2 SMAC-SPH (非圧縮性流体の解法へ)

SPH 法はおもに圧縮性流体の数値解析手法として発展してきた。Monaghan ら<sup>8)</sup>は SPH 法をベースとして状態方程式により疑似的に非圧縮性流体を解析する方法を提案したが、圧力ポアソン方程式を厳密に解いている訳ではなく、精度保障されるものではない。このため、酒井らは、統一的な非圧縮性流体解法として、SMAC 法<sup>9)</sup>を導入した SMAC-SPH 法<sup>9)</sup>を提案した。ここではこの SMAC-SPH 法を概説する。

まず、非圧縮性 Navier-Stokes 方程式をラグランジュ的に表わす。

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 u + f \quad (7)$$

ここで、 $u$  は流速、 $\rho$  は密度、 $p$  は圧力、 $\nu = \mu/\rho$  は動粘性係数、 $f$  は体積力を示す。ここで、 $\mu$  は粘性係数とすると、粘性により生じる応力  $\tau$  と流体の変形  $\epsilon$  との関係

は次式により与えられる。

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu \left( \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} \right) \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} - p\mathbf{I}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{u} \otimes \nabla + (\mathbf{u} \otimes \nabla)^T \right)$$

この応力を Newton の粘性法則による粘性項と対応させると、

$$\nu \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (9)$$

といった関係が導かれ、物理的な意味のある粘性係数の値を用いて、Navier-Stokes 方程式における粘性項を付与できることになる。また、粘性項は2階の微分項が必要であったが、これが1階の微分に置き換えられたことになり、式(6)による粒子離散化が可能となる。

次に、酒井らは Navier-Stokes 方程式の時間積分法として SMAC 法を導入した。つまり、圧力項についてのみ陰的に扱い、その他の項は陽的に時間積分するものである。このアルゴリズムによれば、 $t$  ステップでの流速は次式により更新することになる。

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \left( -\frac{1}{\rho} \nabla p_{n+1} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}_n + \mathbf{f} \right) \quad (10)$$

上式では、 $p_{n+1}$  が未知変数であることから、流速の更新ができない。そこで、まずは前ステップでの流速圧力  $p_n$  を用い、次式により仮に流速を次式により予測する。

$$\mathbf{u}_{n+1}^* = \mathbf{u}_n + \Delta t \left( -\frac{1}{\rho} \nabla p_n + \nu \nabla^2 \mathbf{u}_n + \mathbf{f} \right) \quad (11)$$

式(10)と式(11)の差をとれば、仮に更新した速度  $\mathbf{u}_{n+1}^*$  との関係から  $n+1$  ステップ目の速度は次のように修正できる。

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1}^* - \Delta t \frac{1}{\rho} \nabla p' \quad (12)$$

ここで、 $p'$  は次式より定義する。

$$p_{n+1} = p_n + p' \quad (13)$$

つまり、 $p'$  さえ求めれば、式(12)より  $n+1$  ステップ目の流速  $\mathbf{u}_{n+1}$  が評価できる。

以下には  $p'$  の求め方を説明する。 $\mathbf{u}_{n+1}^*$  は連続の式を満足すべきであることから、式(12)の発散をとれば、 $p'$  に関するポアソン方程式が与えられる。

$$\nabla^2 p' = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^* \quad (14)$$

このポアソン方程式を近似的に解くため、式(14)の左辺を Cleray らの方法<sup>11)</sup>に従い粒子場へと離散化する。

$$\nabla^2 p' = - \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\rho_j} \left( \frac{4}{\rho_i + \rho_j} \right) \frac{(p_i - p_j)(x_i - x_j) \cdot \nabla W}{(x_i - x_j)^2} \quad (15)$$

また、式(14)の右辺は、

$$\nabla^2 p' = \rho_i \sum_{j=1}^n m_j \left( \frac{u_i}{\rho_i^2} + \frac{u_j}{\rho_j^2} \right) \nabla \cdot W \quad (16)$$

として粒子離散近似でできる。

以上の手順を要約する。SMAC-SPH 法では、粒子速度を更新するために以下の2つのステップを踏む。まず、式(11)により仮に流速を陽的に求めく予測ステップ>、次に非圧縮条件を満たすように式(16)に示す圧力ポアソン方程式を陰的に解くことで流速を修正する<修正ステップ>ことで、非圧縮性を満足させながら粒子を移動させる半陰的解法である。

### 3. スロッシング問題による比較検証

ここでは、鹿島建設により実施されたスロッシングの制水構造の検討実験の再現性解析を通して、SMAC-SPH 法の実用性を検証する。なお、この実験では、複数の制水構造を提案し、その有用性を検討している。ここでは、図2に示す箱型制水構造とL型制水構造のメカニズムを数値解析結果より考察する。

#### 3.1 解析条件

数値スロッシング実験では、文献に示された実験条件を模擬し、幅 80cm の箱に深さ 30cm の水を入れ、一定振幅 (0.33cm)・周期 (1.1363s) の調和振動を与える実験を行った。なお、この周期は実験により観測された流体の一次振動モードの固有周期に相当するものであり、制水構造を付与することで、固有周期は変動する。このため、制水構造を考慮した数値解析においては、実験より観測された固有周期を入力することにした。

数値解析では、間隔 1cm ごとに粒子を配置した解析モデルを使用した。壁を含んだ総粒子数は 3162 である。ここで、時間増分は一定値 ( $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}$ ) とし、20 秒間のスロッシング現象を 20,000 ステップで計算した。

#### 3.2 解析結果と考察

数値解析直後では、非定常な振動状態となるため、振動がほぼ定常となった時点での結果により考察を行う。図2に示す結果のはじめの図は、水面がおよそ最大点まで到達した状態を示し、その後は 0.2s 間隔ごとスナップショットとなっている。

まず、制水構造がない時のスロッシング現象であるが、わずかに 0.33cm 程度の振幅で加振しているにも関わらず、最大 8cm 以上もの高さまで水面が上昇している。

L 字制水構造では、水面の振動を直接抑制しようと試みたものである。確かに、実験と同様に多少の振動抑制効果が見られるが、制水構造の上部まで乗り上げており、その効果はあまり期待できないものである。

これに比べ、箱型制水構造では、特に箱近傍の流れが不規則となり、水面の振動がかなり抑制されている。こ

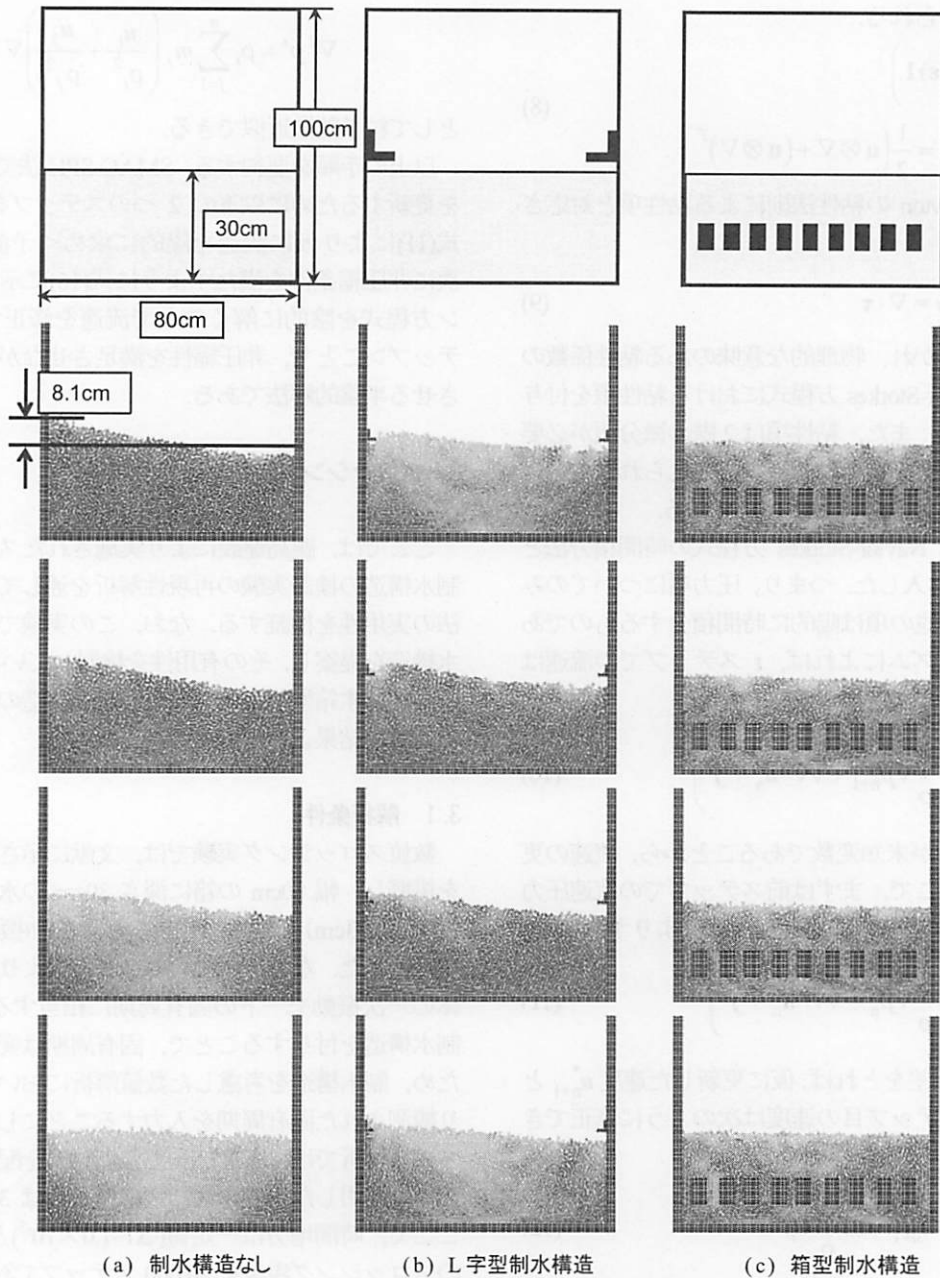


図-2 スロッシング現象の数値解析結果(制水構造の影響)

のため、再度、全体の流れの状態を把握することにし、まずは制水構造のない状態での流速ベクトルの可視化を行った。

図-3 には、水面がほぼフラットな状態になってから左上方へと移動する際の流速ベクトルを可視化している。流れは水面付近だけでなく、比較的深い場所でも比較的大きな流速をもっている。このため、水中に箱型制水構造を設置すれば、全体の流れが乱されることで制水効果が発現したことが容易に推察できる。

以上の結果は実験と定性的には対応した結果となっており、SMAC-SPH法の可能性が示されたものと思う。しかしながら、境界面の取扱いなどの誤差の影響からか、まだ定量的に実験と一致した結果が得られてはいない。この点については今後の検討課題としたい。

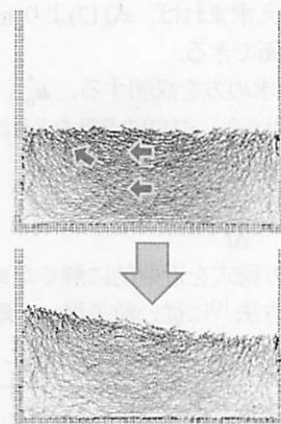


図-3 スロッシング時の流速ベクトル分布図

#### 4. 3次元数値解析例

SPH法では、2点間の距離により重み関数が記述さえるため、3次元問題への拡張は比較的容易にである。また、FEMなどによるメッシュ型的手法では、自由表面の捕獲は困難であったが自動的に表現できる。ここでは、3次元のダムブレイク問題についての数値解析例により、この粒子型解法のメリットを示す。

図-4には数値解析結果例を示す。このように構造を剛体として仮定すれば、構造による流れの変化を3次元的に表現することができる。ただし、今後流体衝撃力に伴う構造の変形解析に際しては、陸田ら<sup>12)</sup>が指摘しているように流体衝撃力の評価の誤差について見直し、定式化自体から再度検討しなくてはならない。

#### 5. おわりに

今後、流体衝撃力を受ける構造損傷解析を実施することを目標とし、砕波、飛沫等により連続体が分離・再結合するような複雑な幾何性状を呈する問題への解決策

としてSMAC-SPH法を使用し、まずは非圧縮性流体の数値解の信頼性を検証した。本数値実験より得られた知見を以下にまとめる。

- ・人工粘性を用いなくてもSMAC法により非圧縮性を表現できる。

- ・SPH法は特に、分離・結合を繰り返すような複雑な幾何状態となる数値解析には好都合である。

- ・特に3次元問題でそのメリットが確認できる。(定式化上の発展の容易さと複雑な幾何性状の再現性)

今後は、流体衝撃力についての適切な評価方法を確立させたのち、流体構造連成解析へと発展させる予定である。

#### 謝辞

本研究を遂行するにあたり、横浜国立大学・酒井讓教授には2Dのサンプルコードをご提供していただきだけでなく、貴重なご意見・アドバイスを頂戴しました。また、前橋工科大学・河西良幸教授からは、スロッシング問題の実験との比較に際しアドバイスをいただきました。ここに記して感謝いたします。

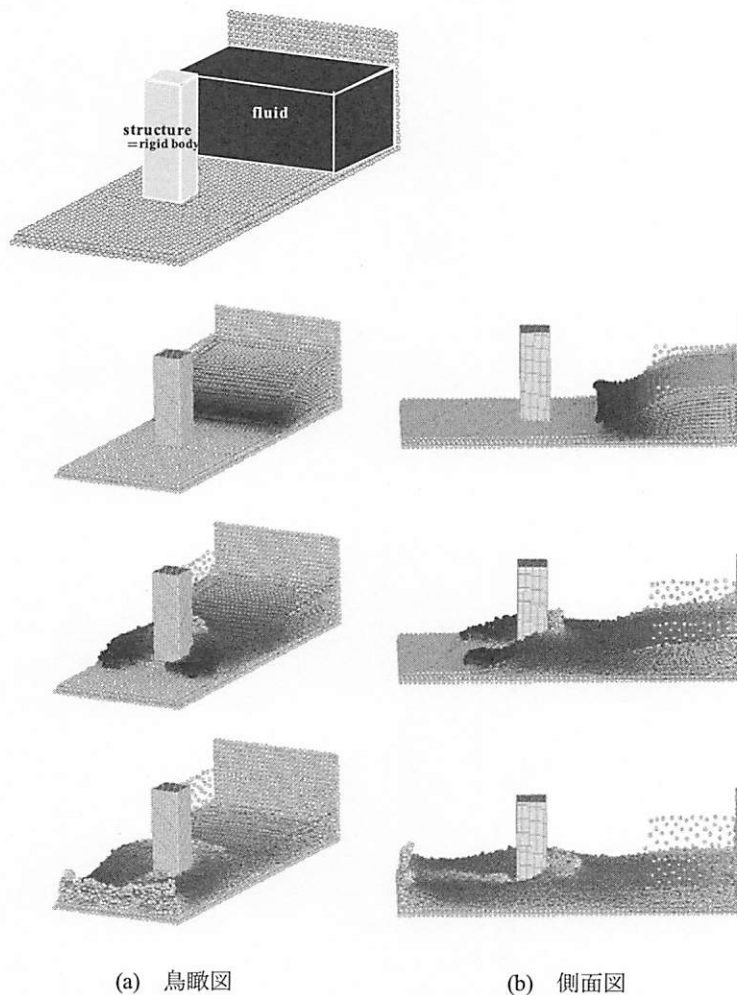


図-4 3次元ダムブレイク解析例

## 参考文献

- 1) Turner, M. Clough, R, Martin, H. and Topp, L. : Stiffness and deflection analysis of complex structure, J. Aeronaut Sci., Vol. 23, pp. 805-823, 1956
- 2) Lucy, L.B. : A numerical approach to the testing of fission hypothesis, The Astronomical Journal, Vol.82(12), pp.1013-1024, 1977
- 3) Cundall, P.A. : A computer model for simulating progressive, large scale movements in blocky rock systems,
- 4) 酒井謙, 楊宗億, 丁詠鐘 : SPH 法による非圧縮粘性流体解析手法の研究, 日本機械学会論文集(B 編)70 巻 666 号, pp. 47-54, 2004
- 5) Belytschko, T, Lu, Y.Y. and Gu, L. : Element free Galerkin method, Int. J. Numerical Methods in Engineering, Vol. 37, pp. 229-256, 1994
- 6) Liu, W.K., Sukky, J., Li, S., Adee, J. and Belytschko, T. : Reproducing kernel particle methods for structural dynamics, Int. J. Numerical Methods in Engineering, Vol. 38, pp. 1655-1679, 1995
- 7) Liu, G.R. and Liu, M.B. : Smoothed Particle Hydrodynamics, World Science Publishing, 2003
- 8) Monaghan, J.J. and Kos, A. : Solitary waves on a Cretan Beach, J. Wtrwy. Port, Coastal and Ocean Engrg., Vol.125, pp.145-154, 1999
- 9) 数值流体力学編集委員会編 : 非圧縮性流体解析, 東京大学出版会, 1995
- 10) Cleary, P.W. and Monaghan, J.J. : Conduction modeling using Smoothed Particle Hydrodynamics, Journal of Computational Physics, Vol. 148, pp. 227-264, 1999
- 11) Muto, K., Kasai, Y. and Nakahara, M. : Experimental tests for suppression effects of water restraint plates on sloshing of a water pool, Journal of Pressure Vessel Technology, ASME, Vol. 110, pp. 240-246, 1988
- 12) 陸田秀美, 土井康明 : 砕波による衝撃圧の直接推定と構造物の動的解析, 土木学会論文集 B, Vol.62, No.3, pp.224-237, 2006