

## 局所変形を考慮した平板の衝撃力の近似計算法

AN APPROXIMATION METHOD FOR IMPACT FORCE ON PLATES  
CONSIDERING LOCAL DEFORMATION

柴田俊文\*, 三上 隆\*\*, 須藤敦史\*\*\*, 蟹江俊仁\*\*\*\*

Toshifumi SHIBATA, Takashi MIKAMI, Atsushi SUTOH and Shunji KANIE

\*博(工) 松江工業高等専門学校助手 環境・建設工学科(〒690-8518 松江市西生馬町14-4)

\*\*工博 北海道大学大学院教授 工学研究科社会基盤工学専攻(〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)

\*\*\*博(工) 榊地崎工業 土木部技術課(〒105-8488 東京都港区西新橋2-23-1)

\*\*\*\*博(工) 北海道大学大学院助教 工学研究科社会基盤工学専攻(〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)

キーワード: 衝撃力, 局所変形, ばね-質量系モデル, ヘルツ理論, 平板  
(impact force, local deformation, spring-mass model, Hertz's law, plate)

## 1. はじめに

梁や平板などの構造要素の衝撃挙動を把握するためには、衝撃体(剛球)と被衝撃体(梁や平板など)との間に生じる局所変形を考慮し、衝撃力を評価することが重要である<sup>1-3)</sup>。局所変形を考慮して構造要素の振動を計算する場合、修正 Hertz 理論に基づいて局所変形と全体の振動を連立して解析する必要があり、Timoshenko が非線形積分方程式に帰着させて解を得た<sup>4)</sup>のをはじめとして、多くの研究例がある<sup>5-10)</sup>。また、非線形積分方程式を解く際の煩雑な計算を回避するため、局所変形を線形のばねに置換して、衝突体と局所変形をばね-質量系とし、被衝撃体との連立の方程式として簡易に解析する例も数多い<sup>11,12)</sup>。これらの解析例ではばね定数の算定の根拠が明白にされていない報告が多かったため、著者らは梁と剛球の衝突に対してこのばね定数の算定方法を提示し、衝撃力の近似計算法の適用性を示してきた<sup>13,14)</sup>。衝撃力特性はばね定数の値に大きく依存するため、算定式からばね定数の値を把握することで衝撃力特性及びその応答特性を考察することも可能となっている。

本研究は、前述した梁に対する近似計算法を平板に対して適用し、数値妥当性を検討したものである。平板の場合二次元に分布する質量を持つ構造であるため、梁と比較すると多次元のモードとなり、その動的挙動も複雑となる。また、線形のばねで局所変

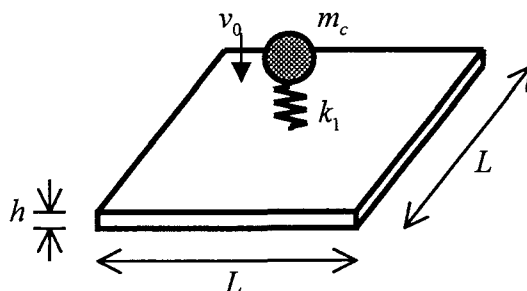


図-1 解析モデル

形を置換している場合、この多次元モードが数値妥当性を左右することも懸念される。

本研究では平板に対する衝撃力の近似計算法の基礎検討として、境界条件が四辺単純支持のものを取り扱っている。平板は境界条件が複雑なものを扱っていないため、モード解析を用いて簡易に解析を行っている。また、局所変形を表すばね定数は剛球の衝突速度(初期速度)、剛球と平板の質量比の関数で表している。数値解析結果では剛球と平板の質量比、初期速度を変化させて本研究で提示する近似解法の適用性を示す。

## 2. 解析手法

## 2.1 解析モデルと基礎方程式

図-1 にばね定数算定のための解析モデルを示す。

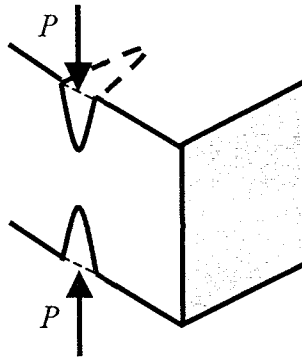


図-2 静的等価剛性の算出

四辺単純支持の平板の中央に質量  $m_c$  の剛球が初期速度  $v_0$  で衝突する場合を考える。ただし、衝突面積は小さくて衝撃力は接触点に集中荷重として作用すると仮定し、平板の変形は微小で線形の理論が適用できるものとする。平板は正方形のものを用い、一辺の長さを  $L$ 、厚さを  $h$ 、弾性係数を  $E$ 、及び単位面積当たりの質量を  $\rho$  とする。ここで、局所変形は線形のばね  $k_1$  で示されている。

接触時の剛球の運動方程式は次式で表される。

$$m_c \frac{d^2 u_1}{dt^2} + k_1 (u_1 - u_2) = 0 \quad (1)$$

ここで、 $u_1$  は接触点 (図-1 のばね  $k_1$  の上端部分 (剛球とばねの接点部分)) の変位、 $u_2$  は平板中央の変位、及び  $t$  は時間を表す。また本研究では、複数回衝突を繰り返す場合でも剛球分離の時間が非常に短いケースを対象としている。そのため、重力は無視して解析を行うことにする。衝撃力  $f$  は式(2.a)または式(2.b)で評価する。

$$f = -m_c \frac{d^2 u_1}{dt^2} \quad (2.a)$$

$$f = k_1 (u_1 - u_2) \quad (2.b)$$

本研究では、弾性の範囲で、かつ基本固有周期より短い時間内で解析を行っている。そのため、平板の減衰を小さいものと仮定し、その影響を無視すると考えれば剛球接触時の平板の運動方程式は以下で表される。なお、本研究では平板に対する衝撃力の近似計算法の適用性を検討することを目的としているため、横方向のせん断変形と断面の回転慣性の影響は考慮せず、薄板曲げ理論 (古典平板理論) を用いることにする。

$$D \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k_1 (u_1 - u_2) \delta(x - x_c) \delta(y - y_c) \quad (3.a)$$

ここで  $D$  は平板の曲げ剛性で  $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ 、 $\nu$

はポアソン比、 $u$  は平板の変位である。また、 $\delta$  はデルタ関数、 $x_c$  及び  $y_c$  は接触点の位置 (平板中央、 $u_2$  の位置) を示し、 $x_c = L/2$ 、 $y_c = L/2$  である。従って、剛球と平板が接触した状態の運動方程式は、式(1)及び式(3.a)を用い、分離した状態ではそれぞれの式のばね定数を  $k_1 = 0$  (式(3.a)の右辺=0) と置く。

本研究では剛球と平板が接触と分離を繰り返す。それぞれの状態の条件は以下となる。

1) 初期条件；

接触点 (剛球) の初期条件は速度  $v_0$ 、変位  $u_1 = 0$  であり、平板の初期条件は速度及び変位が 0 である。

2) 接触状態から分離状態に移行する際の条件；

$u_1 < u_2$  (あるいは  $d^2 u_c / dt^2 < 0$ ) となった状態を基準に二物体は分離する。ここで  $u_c$  は剛球の変位で接触時は  $u_c = u_1$  である。分離した瞬間の剛球の速度を初期速度として等速直線運動を行う。平板はその間、自由振動の状態にある。

3) 分離状態から再接触する際の条件；

$u_1 \geq u_2$  (あるいは  $d^2 u_c / dt^2 \geq 0$ ) となった状態を基準に二物体は再接触する。接触前の剛球と平板の各速度・変位が再接触の際の条件になる。

先にも述べたように、本研究では平板をモード解析により計算し、また、運動方程式の時間積分法には Newmark  $\beta$  法を採用する。次にばね定数  $k_1$  の決定方法について言及する。

## 2.2 ばね定数 $k_1$ の決定方法

ばね定数  $k_1$  は静的に導出する方法と、動的な影響 (初期速度等) を考慮して決定する方法を示す。ここでは文献 13) に倣って前者を静的等価剛性、後者を動的等価剛性と称し、それぞれ  $k_1 = k_{st}$ 、 $k_1 = k_{dy}$  と示すことにする。

### (1) 静的等価剛性 $k_{st}$ の算出

静的等価剛性  $k_1 = k_{st}$  は剛球の衝撃点に対応する被衝撃体の上下辺二点に単位の集中荷重を反対方向に作用させ、三次元有限要素法を適用し衝撃点の変位の逆数から求める (図-2)。三次元の中実の梁を用いて上記解析を行った場合、梁の変形は載荷地点付近のみで、梁の端部や境界部分では変形が皆無であり、また、梁の長さに依存せずその値は一定であるという結果も得られていた。このことから、文献 13) で三次元の梁の解析で得られた静的等価剛性の値は平板についても同様の値が得られることが推察できる。本研究ではこの梁を対象に求めた静的等価剛性の値を用いて、後述する動的等価剛性を無次元化する。

### (2) 動的等価剛性 $k_{dy}$ の算出

動的等価剛性  $k_1 = k_{dy}$  は剛球の質量、初期速度、平板の質量の影響を考慮するもので、これらの関数で

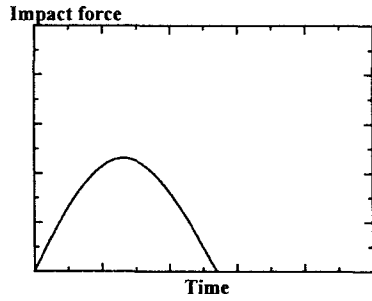


図-3 衝撃力波形 (導出に使用)

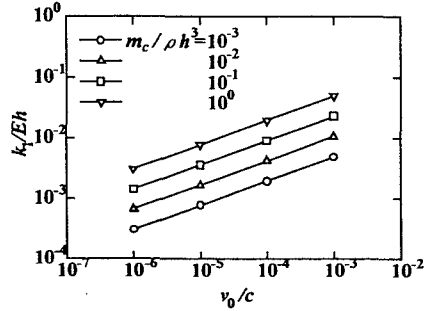


図-4 等価剛性と初期速度の関係  
( $L/h = 10$ )

表-1 導出に用いるパラメータ

パラメータ	導出に用いた値
初期速度 ( $v_0/c$ )	$1.0 \times 10^{-6}$ , $1.0 \times 10^{-5}$ $1.0 \times 10^{-4}$ , $1.0 \times 10^{-3}$
一辺の長さ ( $L/h$ )	10, 50, 80, 100
剛球の質量 ( $m_c/\rho h^3$ )	$1.0 \times 10^{-3}$ , $1.0 \times 10^{-2}$ $1.0 \times 10^{-1}$ , $1.0 \times 10^0$

※上記のパラメータを組み合わせて解析する

とで衝撃力  $f$  を計算する。本研究ではここで求めた衝撃力を便宜的に厳密解と称し、また文献(15)と比較することからも解の妥当性を確認している。衝撃力は平板と剛球の諸元によって様々な形状(複数回衝突等)を呈するが、ここでは図-3にあるように厳密解による衝撃力が正弦曲線の形状に近似でき、衝突が一回で終了する場合の諸元(表-1, 後述)を使用する。

算出する式が表されると仮定する。導出の手順は以下に示す通りである。

- ① 図-1と同様に平板中央に剛球が衝突するモデルを考える。ただしここでは式(4), (5)で表される修正 Hertz 理論を解いて衝撃力を算出<sup>10)</sup>する。

$$K(u_1 - u_2)^{1.5} = f \quad (4)$$

ここで

$$K = \frac{4\sqrt{R}}{3\left(\frac{1-\nu^2}{E} + \frac{1-\nu_R^2}{E_R}\right)} \quad (5)$$

ただし、 $R$  は剛球の半径、 $E_R$ 、 $\nu_R$  は剛球の弾性係数、ポアソン比を表す。球は剛球のため、 $E_R$  は十分に大きい値を使用し、 $\nu_R$  は 0 として解析を行っている。 $u_1$ 、 $u_2$  は剛球と平板中央の変位であるため、次のように計算する。ここで式(3.a)の右辺を衝撃力  $f$  に置き換えたものを式(3.b)とする。

$$D\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right) + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f \cdot \delta(x - x_c) \delta(y - y_c) \quad (3.b)$$

剛球の挙動は近似計算法の場合と同様であるため、式(2.a)を二回積分して  $u_1$  を求め、 $u_2$  は式(3.b)でモード解析を用いて計算する。式(4)は非線形の式であるため、Newton-Raphson 法を用いるこ

- ② 次に、本研究で示す、局所変形を線形ばねで近似する方法で衝撃力を計算する。この線形ばねのばね数を変化させると式(2.b)から推察されるように衝撃力も様々に変化する(例えば、ばね定数を大きくすると衝撃力のピーク値は大きくなるが、接触時間は短くなり、ばね定数を小さくするとその逆の衝撃力波形が得られる)。ここでは①で求めた衝撃力に整合(衝撃力の最大値と接触時間が±10%以内で一致)するように試行錯誤的にばね定数を決定する。

- ③ 表-1の諸元を各々組み合わせたもの(合計64ケース)について①, ②の計算を行う。ただし、表中の  $c$  は縦波の速度で  $c = \sqrt{E/\rho}$  により表される。結局ここでは64個のばね定数を定めることができる。ただし、ここでは動的等価剛性を導出するため、初期速度の値が大きい場合でも弾性の範囲で解析可能であると仮定して計算する。

図-4に得られたばね定数と速度の関係を  $L/h = 10$  の平板について示す。縦軸が等価剛性、横軸が初期速度を無次元化して示しており、両対数グラフで表示している。図より等価剛性が初期速度の冪乗に比例していることがわかる。また、 $L/h = 10$  以外の平板についても同様の結果が得られ、質量についても冪乗に比例するという結果が得られている。これらの初期速度と質量の冪乗に比例するという結果より、動的等価剛性  $k_{dy}$  を式(6)で仮定する。

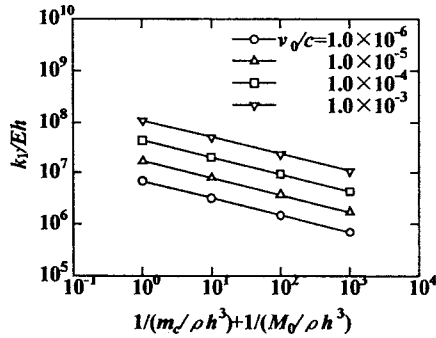


図-5 等価剛性と質量の関係

$$\frac{k_d}{k_s} = f_1 \cdot f_2 \left( \frac{m_c}{\rho h^3}, \frac{M_0}{\rho h^3} \right) \cdot f_3 \left( \frac{v_0}{c} \right) \quad (6)$$

$$\text{ここで, } f_1 = \alpha, \quad f_2 = \left( \frac{1}{\frac{m_c}{\rho h^3}} + \frac{1}{\frac{M_0}{\rho h^3}} \right)^\beta,$$

$f_3 = (v_0/c)^\gamma$  であり,  $M_0$  は平板の質量を表す。

ここで, 式(5)に半径  $R$  のパラメータが含まれており, 衝撃力に対して曲率が影響すると考えられる。近似計算法では式(6)の  $m_c$  に  $R$  の情報が含まれていると考えることができる。なお, 動的等価剛性を静的等価剛性  $k_s$  で無次元化して表すことにする。

- ④ ③で求めた 64 個の等価剛性から最小二乗法を用いて, 式(6)の  $\alpha$ ,  $\beta$  及び  $\gamma$  を決定する。図-5 に式(6)の  $f_2$  の括弧内のパラメータと動的等価剛性との関係を示す。計算した結果,  $\alpha = 3.358 \times 10^2$ ,  $\beta = -1/3$ ,  $\gamma = 2/5$  の値が決定係数 0.98 で得られ, 特に  $\beta$  と  $\gamma$  の値は梁の場合と同様の値が得られている。このことから初期速度, 質量の等価剛性に与える影響は梁の場合と同様であることがわかり, 特に  $\alpha$  の値は被衝突体の影響が大きいことが考えられる。この  $\alpha$ ,  $\beta$  及び  $\gamma$  を式(6)に代入したものが動的等価剛性  $k_d$  を求める式であり, 平板と剛球の諸元を代入すれば動的等価剛性を求めることが可能となる。

### 3. 数値検討例

本研究では平板の自由度を 100 としてモード解析を行い, それより自由度を大きくしても計算結果が変わらなかったためすべての解析で自由度を 100 とした。また時間刻み  $\Delta t$  は解析対象である平板の基本周期の  $1/1000$  以下となるように設定した。なお, 以下に示す衝撃力  $f$  の時刻歴応答の各図では, 本解析

手法による結果を実線で, 比較のために厳密解によるそれを破線で示した。ここで, グラフの縦軸は無次元化衝撃力  $f/Eh^2$ , 横軸は無次元化時間  $(c/h)t$  である。

ここで数値解析結果を衝撃力波形の形状を基準に以下の二つのパターンに分類する。

- (1) 動的等価剛性導出①で使用した, 衝突が一回で終了するタイプ
- (2) 剛球が複数回衝突したり, 衝撃力の形状が正弦曲線の形状を示さないタイプ

図-6 は上記タイプ(1)の結果であり, (a) と (c) が表-1 の動的等価剛性導出に用いた諸元で解析した結果であり, (b) と (d) が表-1 の範囲外の値 ( $v_0/c > 10^3$ ) を用いて解析したものである。これらの結果より本解析方法から得られる衝撃力は,  $v_0/c > 10^3$  の場合を含め, 近似計算法として十分な精度であると判断することができる。

図-7 は上記タイプ(2)の結果であり, 剛球と平板の質量比が  $m_c/M_0 = 10 > 1$  の場合である。これによれば, (c) の衝撃力の立ち上がり部分でやや厳密解と差があるものの, 複数回の衝突がある場合 (図の (a) 及び (b)) も厳密解を良く近似していると判断することができる。ここで, 例えば図-7 (b) では減衰を考慮していないため二回目の衝撃力が一回目より大きくなっている。このケースについてはその挙動を把握するため, 後の図-10 で検討を加える。

図-8 (a), (b) は上記タイプ(1)で剛球が正方形平板と剛球の接触点の位置  $(x_c, y_c) = (L/8, L/8)$  及び  $(L/4, L/4)$  に衝突する場合, 図-9 に長方形平板の中央に衝突する場合を考え, 式(6)の有効性を検討した。ここで図-9 の長方形の辺の長さは  $L$ ,  $L/2$  とした。これらの結果より, 剛球が正方形平板中央以外に衝突する場合にも適用可能であることが確認できる。以上図-6~9 の結果より, 本解法は平板の衝撃力の近似計算に適用が可能であることがわかる。

### 4. おわりに

本論文では, 平板と剛球の衝突問題において接触点の局所変形の影響を簡易なばねで表して解析する場合の, ばね定数の値の算定式を平板に対して提示し, その妥当性, 有効性を検討したものである。以下に本研究の要旨を示す。

- (1) 平板に作用する衝撃力の近似計算法の適用性を示した。
- (2) 本近似解法は剛球と平板の質量比  $m_c/M_0 \leq 10^0$ , 剛球の初期速度  $v_0/c \leq 1.0 \times 10^2$ , 平板の一辺の長さ  $10 \leq L/h \leq 100$  に適用可能である。
- (3) 解析の結果, 任意の衝突位置に対して適用が可能であり, またタイプ(1) (正弦曲線の形状を有

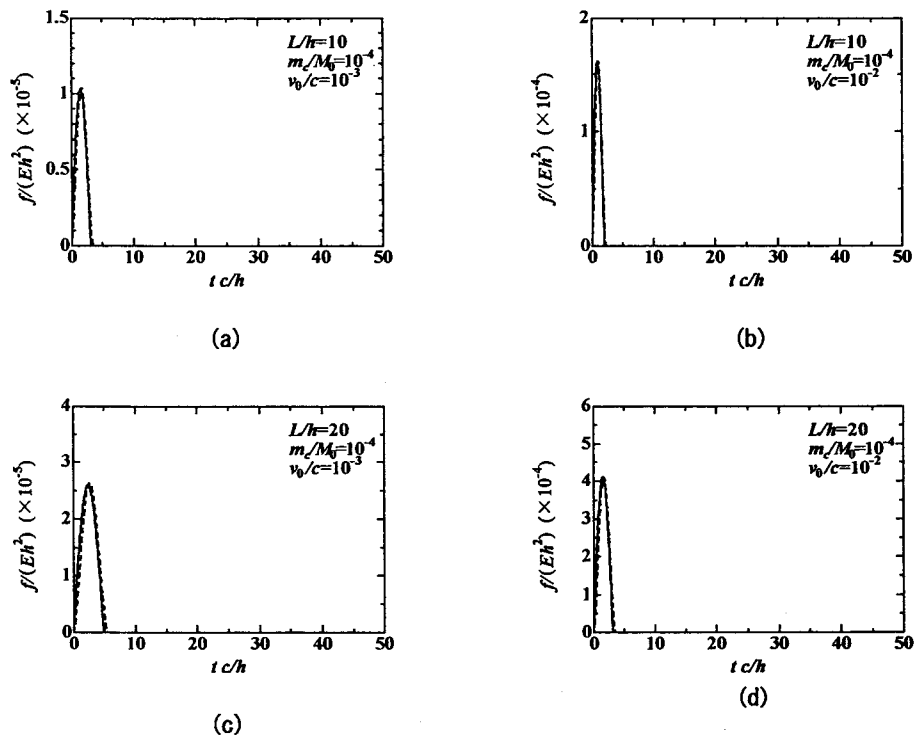


図-6 衝撃力波形 (1)

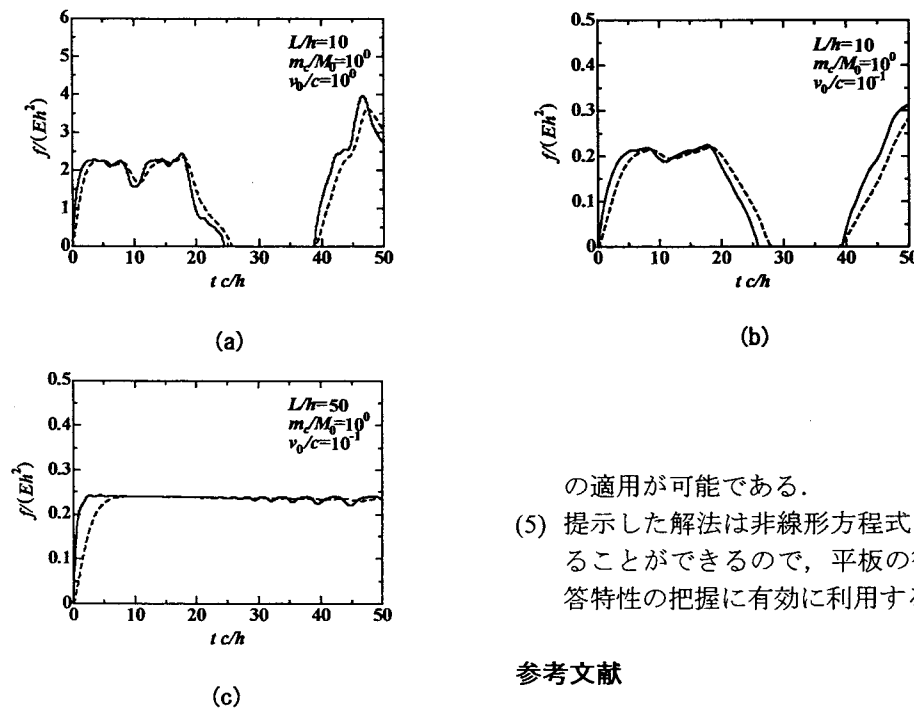


図-7 衝撃力波形 (2)

する一回のみ衝突するタイプ) のみならず他の様相を示す衝撃力波形にも良好な数値妥当性が示された。

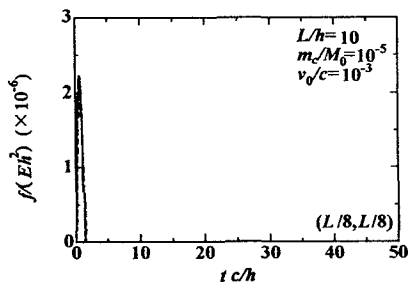
- (4) 正方形平板の中央に衝突する場合だけでなく、長方形平板、他の衝突位置に対しても本推定式

の適用が可能である。

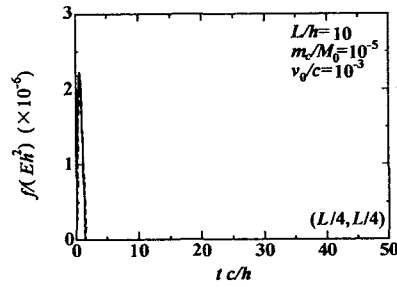
- (5) 提示した解法は非線形方程式を解かずに解を得ることができるので、平板の衝撃力特性及び応答特性の把握に有効に利用することができる。

#### 参考文献

- 1) 衝撃問題研究小委員会：構造物の衝撃挙動と設計法，土木学会，1993。
- 2) 衝撃問題研究小委員会：ロックシェッドの耐衝撃設計，土木学会，1998。
- 3) 日本道路協会：落石対策便覧，2000。
- 4) Timoshenko, S. : Zur Frage der Wirkung eines Stosses auf Einer Balken, *Zeitschrift für Mathematik and Physik*, Vol.62, pp.198-209, 1913.



(a) 正方形の平板の  $(L/8, L/8)$  の位置に衝突する場合



(b) 正方形の平板の  $(L/4, L/4)$  の位置に衝突する場合

図-8 正方形平板の中央以外に衝突した際の衝撃力波形

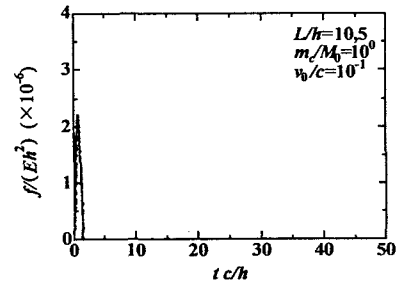


図-9 長方形の平板の中央に衝突する場合 ( $L/h=10.5$ )

- 5) Sun, C.T. and Chattopadhyay, S. : Dynamic response of anisotropic laminated plates under initial stress to impact of a mass, *Journal of Applied Mechanics*, pp.693-698, 1975.
- 6) Christoforou, A.P. and Swanson, S.R. : Analysis of simply-supported orthotropic cylindrical shells subject to lateral impact loads, *Transactions of the ASME*, Vol.57, pp.376-382, 1990.
- 7) 神宮利夫, 松本浩之, 根津紀久雄, 坂本賢治 : 球の平板への衝突における衝撃荷重に及ぼす衝突接触挙動の影響, 日本機械学会論文集 (A編), 53巻496号, pp.2331-2335, 1987.
- 8) 戸部俊美, 加藤正名 : 梁の横衝撃に関する研究, 日本機械学会論文集 (第1部), 38巻314号, pp.2506-2513, 1972.
- 9) Hsi-Yung, T.Wu, and Fu-Kuo Chang, : Transient dynamic analysis of laminated composite plates subjected to transverse impact, *Computers & Structures*, Vol.31, No.3, pp.453-466, 1989.
- 10) Liao, C.L., and Tsai, J.S. : Dynamic analysis of laminated composite plates subjected to transverse impact using a partial mixed 3-D finite element, *Computers & Structures*, Vol.53, No.1, pp.53-61, 1994.
- 11) Lee, Y., Hamilton, J.F. and Sullivan, J.W. : The lumped parameter method for elastic impact problems, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol.50, pp.823-827, 1983.
- 12) Shivakumar, K.N., Elber, W. and Illg, W. : Prediction of impact force and duration due to low-velocity impact on circular composite laminates, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol.52, pp.674-680, 1985.
- 13) 柴田俊文, 三上隆, 佐藤昌志, 須藤敦史 : 剛球の梁への衝突における衝撃力の近似計算法, 土木学会論文集, N0.647/I-51, pp.167-176, 2000.
- 14) 柴田俊文, 三上隆, 佐藤昌志, 須藤敦史, 葦澤憲吉 : 局所変形の影響を考慮した梁の衝撃力の一計算法, 構造工学論文集, Vol.44A, pp.1753-1759, 1998.
- 15) 日本機械学会 : 材料力学ハンドブック (基礎編), pp.138-139, 1999.