

異方性平板の波動伝播解析

ELASTODYNAMIC ANALYSIS OF AN ANISOTROPIC PLATE

角掛久雄¹, 須方大介², 小林治俊³

Hisao TSUNOKAKE, Daisuke SUKATA and Harutoshi KOBAYASHI

¹修 (工) 大阪市立大学大学院助手 工学研究科都市系専攻 (〒558-8585 大阪市住吉区杉本3-3-138)

²修 (工) 川崎重工業 機械・鉄構事業本部 (〒278-8585 千葉県野田市二ツ塚118)

³工博 大阪市立大学大学院教授 工学研究科都市系専攻 (〒558-8585 大阪市住吉区杉本3-3-138)

キーワード : 厚板, 波動伝播, 異方性, 固有関数展開法

(thick plate, stress wave propagation, anisotropy, method of eigenfunction expansion)

1. はじめに

衝撃荷重を受ける異方性体の波動伝播特性に関する研究は、近年の複合材料力学の進展とともに複合材料の広範な工学分野への適用によりその重要性が増している。したがって、異方弹性体の波動伝播を解析的に取り扱う方法を示すとともに弾性域ではあるが正確な衝撃応答特性を示しておくことは、材料特性や衝撃破壊現象の解明に関連するとともに各種の近似解法による解析結果のベンチマークとしても重要であると考えられる。しかしながら、主要な構造要素である異方性板を対象に衝撃応答解析を行った研究はこれまでに数少ない。小林・須方[1]は、三次元動弾性論に基づく固有関数展開法を用いて、板厚方向が異方軸である横等方性矩形厚板の衝撃応答解析を行い、その応力波伝播特性を明らかにした。本研究はこれに引き続いて、図-1に示すx軸が異方軸である横等方性矩形板を取り扱い、材料定数が衝撃応答に及ぼす影響および応力波伝播特性を検討するものである。

2. 基礎式

本文で取り扱う横等方性矩形厚板とその座標系を図-1に示している。矩形板の辺長をa,b, 板厚をhとし、x=0,aおよびy=0,bの4辺で単純支持されているものとする。また異方軸をx軸、y-z面を等方にとる。荷重は空間関数q(x,y)と時間関数

f(t)の積により q(x,y,t)=q(x,y)f(t)のように表わされ、x₀×y₀の矩形載荷面に作用する。

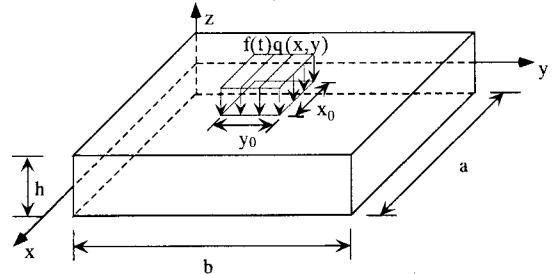


図-1 矩形板の座標系

座標x,y,z方向の変位をそれぞれu(x,y,z,t), v(x,y,z,t), w(x,y,z,t)とし、また材料定数をC_{ij}とすれば、x軸が異方軸である横等方性体の応力-変位関係式は、

$$\begin{aligned}\sigma_x &= C_{33} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{13} \frac{\partial v}{\partial y} + C_{13} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \sigma_y &= C_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{11} \frac{\partial v}{\partial y} + C_{12} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \sigma_z &= C_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + C_{11} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{yz} &= C_{66} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \tau_{zx} &= C_{44} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \tau_{xy} &= C_{44} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad (1)$$

である。ただし、 $C_{66} = (C_{11} - C_{12})/2$ の関係がある。
そして運動方程式は、密度を ρ とすると、

$$\begin{aligned} L_u(u, v, w) &= \rho \ddot{u} \\ L_v(u, v, w) &= \rho \ddot{v} \\ L_w(u, v, w) &= \rho \ddot{w} \end{aligned} \quad (2)$$

で表され、ドット(·)は時間 t に関する微分を意味し、また $L_u(u, v, w), L_v(u, v, w), L_w(u, v, w)$ の内容は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} L_u(u, v, w) &= C_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{44} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ &\quad + (C_{13} + C_{44}) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) \\ L_v(u, v, w) &= (C_{13} + C_{44}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C_{44} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + C_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ &\quad + C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \\ L_w(u, v, w) &= (C_{13} + C_{44}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \\ &\quad + C_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + C_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (3)$$

次に単純支持条件および平板の上下面での境界条件は、以下で与えられる。

$$\begin{aligned} w &= v = \sigma_x = 0 \quad (x = 0, a) \\ w &= u = \sigma_y = 0 \quad (y = 0, b) \end{aligned} \quad (4)$$

および、

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0 \quad (z = -h/2) \\ \sigma_z &= -q(x, y)f(t), \quad \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0 \quad (z = +h/2) \end{aligned} \quad (5)$$

そして応答開始時の静止条件は次のようになる。

$$\begin{aligned} u &= v = w = 0 \quad (t = 0) \\ \dot{u} &= \dot{v} = \dot{w} = 0 \quad (t = 0) \end{aligned} \quad (6)$$

なお、式(5)での荷重の空間関数 $q(x, y)$ は次の Fourier級数に展開する。

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (7)$$

ただし、 q_{mn} 、 α_m および β_n は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} q_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y dx dy \\ \alpha_m &= m\pi/a, \quad \beta_n = n\pi/b \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (8)$$

3. 衝撃応答解析

運動方程式(2)の解を慣性力の影響を受けない部分と受けける部分に分離して次のようにとる。

$$\begin{aligned} u &= u^s(x, y, z)f(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} Q_{mnl}(t) U_{mnl}(x, y, z) \\ v &= v^s(x, y, z)f(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} Q_{mnl}(t) V_{mnl}(x, y, z) \end{aligned}$$

$$w = w^s(x, y, z)f(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} Q_{mnl}(t) W_{mnl}(x, y, z) \quad (9)$$

ここで、 u^s, v^s, w^s は式(2)で慣性項を無視した場合の静的解であり以下の式を満足する。すなわち、つり合い式：

$$\begin{aligned} L_u(u^s, v^s, w^s) &= 0 \\ L_v(u^s, v^s, w^s) &= 0 \\ L_w(u^s, v^s, w^s) &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

支持条件：

$$\begin{aligned} w^s &= v^s = \sigma_x^s = 0 \quad (x = 0, a) \\ w^s &= u^s = \sigma_y^s = 0 \quad (y = 0, b) \end{aligned} \quad (11)$$

および板の上下面での境界条件：

$$\begin{aligned} \sigma_z^s &= \tau_{zx}^s = \tau_{yz}^s = 0 \quad (z = -h/2) \\ \sigma_z^s &= -q(x, y), \quad \tau_{zx}^s = \tau_{yz}^s = 0 \quad (z = +h/2) \end{aligned} \quad (12)$$

ただし、静的解の応力式は式(1)を参照して、

$$\begin{aligned} \sigma_x^s &= C_{33} \frac{\partial u^s}{\partial x} + C_{13} \frac{\partial v^s}{\partial y} + C_{13} \frac{\partial w^s}{\partial z} \\ \tau_{yz}^s &= C_{66} \left(\frac{\partial v^s}{\partial z} + \frac{\partial w^s}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

などで表される。

一方、式(9)の右辺の級数解は擾乱解であり、 $U_{mnl}(x, y, z)$ 、 $V_{mnl}(x, y, z)$ 、 $W_{mnl}(x, y, z)$ は固有関数(振動モード関数)、 $Q_{mnl}(t)$ は未定の時間関数(一般化座標)、また m, n, l はそれぞれ座標 x, y, z 方向のモード次数である。固有関数は、 ω_{mnl} を固有円振動数、 $i = \sqrt{-1}$ として、

$$(u, v, w)_{mnl} = (U, V, W)_{mnl} \exp(i\omega_{mnl} t) \quad (14)$$

とおき、式(2)に代入したのち時間項を省略した自由振動問題のつり合い式：

$$\begin{aligned} L_u(U_{mnl}, V_{mnl}, W_{mnl}) &= -\rho \omega_{mnl}^2 U_{mnl} \\ L_v(U_{mnl}, V_{mnl}, W_{mnl}) &= -\rho \omega_{mnl}^2 V_{mnl} \\ L_w(U_{mnl}, V_{mnl}, W_{mnl}) &= -\rho \omega_{mnl}^2 W_{mnl} \end{aligned} \quad (15)$$

支持条件：

$$\begin{aligned} W_{mnl} &= V_{mnl} = \sigma_x^{(mnl)} = 0 \quad (x = 0, a) \\ W_{mnl} &= U_{mnl} = \sigma_y^{(mnl)} = 0 \quad (y = 0, b) \end{aligned} \quad (16)$$

および板の上下面での自由境界条件：

$$\sigma_z^{(mnl)} = \tau_{zx}^{(mnl)} = \tau_{yz}^{(mnl)} = 0 \quad (z = \pm h/2) \quad (17)$$

を満足する。応力のモード式は式(1)を参照して、

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(mnl)} &= C_{33} \frac{\partial U_{mnl}}{\partial x} + C_{13} \frac{\partial V_{mnl}}{\partial y} + C_{13} \frac{\partial W_{mnl}}{\partial z} \\ \tau_{yz}^{(mnl)} &= C_{66} \left(\frac{\partial V_{mnl}}{\partial z} + \frac{\partial W_{mnl}}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

などで与えられる。

固有関数には相反定理より求められる次の直交性がある。

$$\int_0^a \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} (U_{mn1} U_{ijk} + V_{mn1} V_{ijk} + W_{mn1} W_{ijk}) dx dy dz = \delta_{mi} \delta_{nj} \delta_{lk} N_{mn1}^2 \quad (19)$$

ただし $\delta_{mi}, \delta_{nj}, \delta_{lk}$ はクロネッカーデルタ, N_{mn1} はノルムである。

以上のように衝撃応答解から分離させた準静的解と擾乱解を規定するそれぞれの境界条件式(11), (12)および式(16), (17)の総和によって衝撃問題の境界条件式(4), (5)を満たすことは明らかである。従って、残る問題は時間関数 $Q_{mn1}(t)$ の決定のみとなる。そこで式(9)を運動方程式の式(2)に代入した後に式(10), (15)を利用すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (\ddot{Q}_{mn1} + \omega_{mn1}^2 Q_{mn1}) U_{mn1} &= -\ddot{u}^s \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (\ddot{Q}_{mn1} + \omega_{mn1}^2 Q_{mn1}) V_{mn1} &= -\ddot{v}^s \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (\ddot{Q}_{mn1} + \omega_{mn1}^2 Q_{mn1}) W_{mn1} &= -\ddot{w}^s \end{aligned} \quad (20)$$

ここで、上の3式の両辺に $U_{ijk}, V_{ijk}, W_{ijk}$ をそれぞれ乗じたのち3式を加え合わせ、それを矩形板全体にわたり積分する。そして、式(19)の固有関数の直交性を利用することにより $Q_{mn1}(t)$ に関する微分方程式

$$\ddot{Q}_{mn1}(t) + \omega_{mn1}^2 Q_{mn1}(t) = Z_{mn1} \ddot{f}(t) \quad (21)$$

を得る。ただし、

$$Z_{mn1} = -\frac{1}{N_{mn1}^2} \int_0^a \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} (u^s U_{mn1} + v^s V_{mn1} + w^s W_{mn1}) dx dy dz \quad (22)$$

である。式(21)の解は周知のように以下になる。

$$\begin{aligned} Q_{mn1}(t) &= Q_{mn1}(0) \cos \omega_{mn1} t + \frac{1}{\omega_{mn1}} \dot{Q}_{mn1}(0) \sin \omega_{mn1} t \\ &+ \frac{Z_{mn1}}{\omega_{mn1}} \int_0^t \ddot{f}(\tau) \sin[\omega_{mn1}(t-\tau)] d\tau \end{aligned} \quad (23)$$

積分定数 $Q_{mn1}(0), \dot{Q}_{mn1}(0)$ を決定するために、最初に式(9)を初期条件の式(6a)に代入すれば、

$$\begin{aligned} u^s(x, y, z) f(0) &= -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} Q_{mn1}(0) U_{mn1}(x, y, z) \\ v^s(x, y, z) f(0) &= -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} Q_{mn1}(0) V_{mn1}(x, y, z) \\ w^s(x, y, z) f(0) &= -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} Q_{mn1}(0) W_{mn1}(x, y, z) \end{aligned} \quad (24)$$

を得る。この3式の両辺にそれぞれ $U_{ijk}, V_{ijk}, W_{ijk}$ を

乗じたのち3式を加え合わせる。そして矩形板全体に積分して固有関数の直交性を利用して

$$Q_{mn1}(0) = Z_{mn1} f(0) \quad (25)$$

と求まり、同様にして

$$\dot{Q}_{mn1}(0) = Z_{mn1} \dot{f}(0) \quad (26)$$

以上が固有関数展開法による衝撃応答解析の定式化である。静的解および固有関数の具体式の誘導については、板厚方向を異方軸とした先の研究[1]と類似であり、ここでは省略する。

4. 数値計算例

4. 1 諸元

数値計算例には板厚比 $h/a = 0.2$ の正方形板 ($a = b$) を取り扱い、この板上面の中央部に載荷幅 $x_0 = y_0 = 0.2a$ で強度 q_0 の部分等分布荷重が時間に関してステップ状 [$f(t) = H(t)$] に作用するものとする（図-1 参照）。横等方性材料として自然界にはマグネシウムや亜鉛などがあり、Graphite/epoxy や E-glass/epoxy などの複合材料も巨視的には横等方性を示すものであるが、ここでは先の研究[1]と同様に、異方性の特性を簡明に検討するために等方面と異方面での縦弾性係数比 E/E' のみを変化させて数値計算を行うことにした。この場合、 E, G, ν をそれぞれ等方面での縦弾性係数、横弾性係数、ポアソン比、また E', G', ν' をそれぞれ等方面に垂直な面での縦弾性係数、横弾性係数、ポアソン比とすれば、これらは材料定数 C_{ij} との間に次の関係がある[2]。

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{E' - E(\nu')^2}{(1+\nu)R}, & C_{12} &= \frac{E'\nu - E(\nu')^2}{(1+\nu)R}, \\ C_{13} &= \frac{\nu'E'}{R}, & C_{33} &= \frac{(1-\nu)(E')^2}{ER}, & C_{44} &= G', \\ C_{66} &= \frac{C_{11} - C_{12}}{2} = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \\ R &= (1-\nu)(E'/E) - 2(\nu')^2 \end{aligned} \quad (27)$$

そこで、縦弾性係数比を $E/E' = 1, 2, 3$ と変化させ、ポアソン比と横弾性係数は $\nu = \nu' = 0.3, G = G'$ と仮定した。また各ケースの密度 ρ も同一とした。なお、このように材料定数を選択してもエネルギー正値の条件[3]は満足している。

以上の条件の下で応答計算は全て無次元化して行い、時間については等方面 ($y-z$ 面) 内を伝播する縦波の速度 c_L で基準化した次の無次元時間 τ を使用した。すなわち、

$$\tau = \frac{c_L t}{h}, \quad c_L = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}} \quad (28)$$

なお、衝撃応答解は式(9)の級数で与えられており、その収束性は材料、着目点、時刻、応力、変位の種別によって異なるが、ここではその詳細は省略する。

4. 2 変位の応答

衝撃を受けた後の $x-z$ 断面の変形状態を図-2 に時刻ごとに示す。画描にあたりスパン方向に 80 分割、板厚方向に 40 分割し、変形量については、各ケースごとの変位 w の最大値で基準化している。

まず縦弾性係数比 $E/E'=1$ （等方性体）の場合、矩形板内を伝播する応力波は球面波であるので、したがって、時刻 $\tau=0.5$ では、ちょうど板厚中央面に到達した応力波の影響を受け矩形板が変形している様子が見て取れる。また $\tau=1.0$ では、板下面に応力波が到達し変形をおこしているのがわかる。さらに $\tau=1.2$ では、板下面で反射された応力波が圧縮から引張応力に位相が変わり変形していく様子がわかる。

次に $E/E'=2$ の場合、 $x=a/2$ の中心軸上の変形する過程は等方性体の場合と同じであるが、水平方向への変形の広がりは、等方性体の場合に比べ少なくなっている。これは x 軸（異方軸）方向へ伝播する応力波速度が等方性体に比べ遅く、同時刻での応力波の到達範囲は小さくなるからである。 $E/E'=3$ の場合も同様のことが言え、 x 軸方向への変形の広がりはさらに小さなものとなっている。

次に平板の中央点 ($x=y=a/2, z=0$) における変位 w の長期応答を図-3 に示す。図より縦弾性係数比の違いが応答に顕著に現れているのがわかる。縦弾性係数比が大きくなるほど周期が長くなり、応答値も大きくなる。縦弾性係数比が大きくなるということは、 $x-y$ 面の剛性が $x-z$ 面 ($y-z$ 面) の剛性と比べて相対的に低下することであるので、縦弾性係数比が大きいほど変形としては大きくなるものと考えられる。なお、固有値解析における無次元周期は $E/E'=1, 2, 3$ に対してそれぞれ、 $T=34.43, 46.42, 66.00$ であり、応答図から読みとれる周期と同一である。このことは、応答計算が正しくなされていることの証左でもある。

4. 3 応力の応答

(1) σ_z の応答

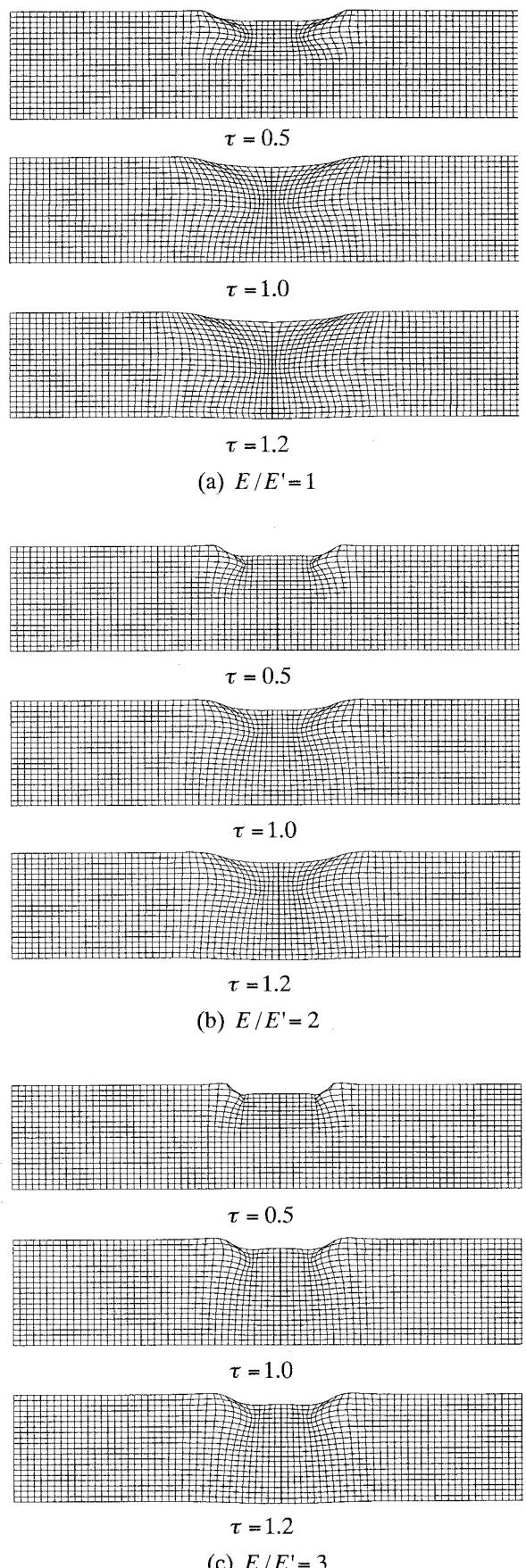


図-2 $x-z$ 断面の初期変形

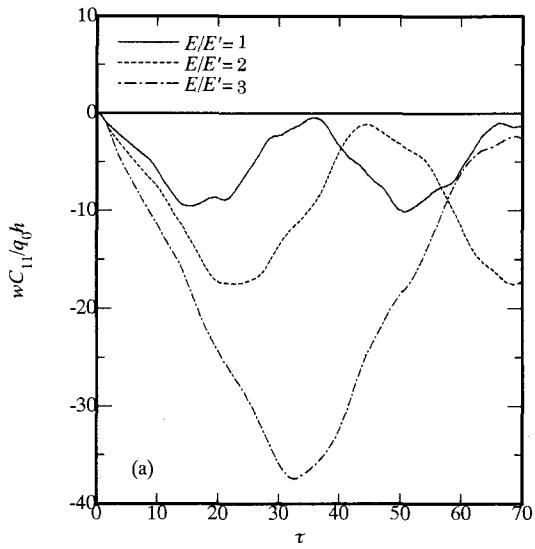


図-3 変位 w の長期応答 ($x = y = a/2, z = 0$)

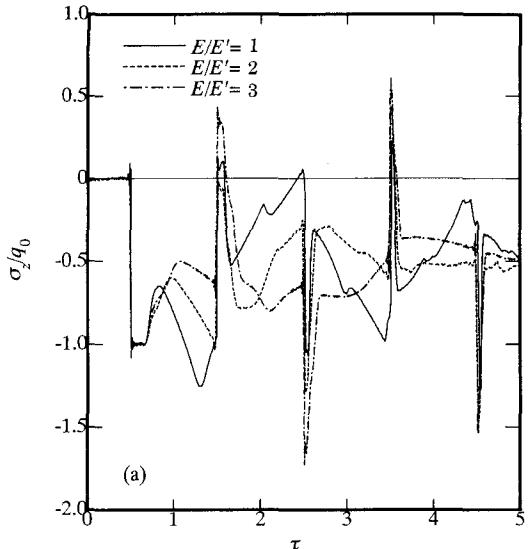
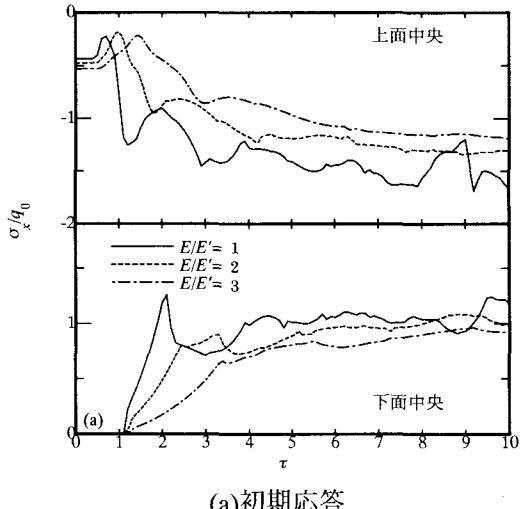


図-4 応力 σ_z の初期応答 ($x = y = a/2, z = 0$)



(a) 初期応答

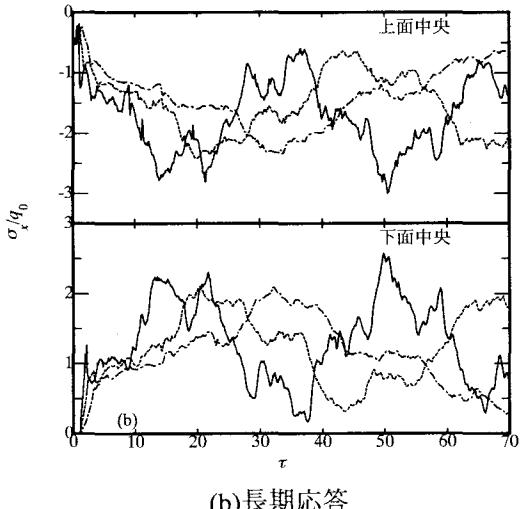


図-5 応力 σ_x の応答 ($x = y = a/2, z = \pm h/2$)

図-4 は板中央点 ($x = y = a/2, z = 0$) における板厚方向の応力 σ_z の初期応答である。実線で示した縦弾性係数比 $E/E' = 1$ (等方性体) の場合の応答曲線を見ると、応力波が着目点すなわち時刻 $\tau = 0.5$ に到達するまでは無応答であり、着目点に到達した瞬間に載荷荷重と同じ大きさをもった圧縮応力が現れていることがわかる。その後、 $\tau = 1.5$ で応答曲線が不連続的に圧縮から引張に変化しているのが見られる。これは、先に示した圧縮の応力波が矩形板下面中央点で反射して位相が変化し、引張の応力波となり再び着目点に到達していることを示している。このように、上下面での反射により圧縮と引張が繰り返し交互に現れるが、その間載荷中央点で発生した横波や載荷端点で発生した縦波、横波などの波面が到達することで、荷重値を越える応答や不連続な応答が現れることになる。

次に、異方性体の場合の応答図を見ると、縦弾性係数比が違っても応答開始時刻に変化がない。これは、基準速度を等方面内を伝播する縦波の速度としたためである。最初の応答は等方性体と同様に載荷荷重と同じ大きさの圧縮応力が現れているが、以降の応答においては、圧縮、引張応力ともに等方性体の場合に比べ大きな値を持っていることがわかる。

(2) σ_x の応答

図-5 に応力 σ_x の初期 ($0 \leq \tau \leq 10$) および長期 ($0 \leq \tau \leq 70$) 応答曲線を示している。着目点は中央断面の上下面中央点 ($x = y = a/2, z = \pm h/2$) である。

上面での応答図を見ると、いずれの応答も載荷荷重が作用した瞬間に応答値を持つことが分かる。これは、作用圧縮荷重 q_0 とつり合う圧縮応力

$\sigma_z = -q_0$ による x, y 方向のひずみが拘束されるため、応力 σ_x, σ_y が生じるためである。また、引き続く尖った応答は Rayleigh の表面波の影響によるものである。下面中央点でも応答の遅れはあるものの、表面波の影響とみられるピーク値を持っている。

次に長期応答を見てみると、振動の高周波成分のために複雑な応答曲線になっているが、縦弾性係数比が大きいほど応答周期 T が長くなっていることがわかる。これは先に変位 w の応答のところで示した基本固有周期と同一である。

5. まとめ

本研究は、面内方向が異方軸である横等方性矩厚板の弾性衝撃応答解析を試みたものであり、動弾性論に基づく固有関数展開法により衝撃応答解を固有関数（振動モード関数）からなる級数解〔式(9)〕、として求めた。数値計算例では等方面と異方面での縦弾性係数比 E/E' のみを異方性パラメーターとして正方形板を対象にして計算を行った。以下に得られた結果をまとめると。

- (1) 各材料に対して衝撃を受けた時の変形の様子を図示することにより、各時刻において矩形板が

応力波の影響を受ける範囲を視覚的にとらえることができた。

- (2) 変位 w の応答では、 $y-z$ 平面（等方面）の剛性が低くなるほど、すなわち縦弾性係数比が大きくなるほど変位としては大きな値となる。
- (3) いずれの応答も応力波が着目点に到達するまでは無応答であり、応力波の到達とともに急激な応力の変化がみられる。
- (4) 板上下面の中央点での軸方向応力 σ_x の長期応答では、縦弾性係数比が大きくなると最大応答値は逆に小さな値を示した。応答周期は縦弾性係数比が大きくなるほど長くなる。

参考文献

- [1] 小林治俊、須方大介：固有関数展開法による横等方性矩形厚板の衝撃応答解析、応用力学論文集、土木学会、Vol. 3, pp. 3-12, 2000.
- [2] Lekhnitskii, S. G. : *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, Mir Publishers, Moscow, 1981.
- [3] Payton, R. G.: *Elastic Wave Propagation in Transversely Isotropic Media*, Martinus Nijhoff Publishers, Hague/Boston/ Lancaster, 1983.