

カルマンフィルタによる梁の衝撃力同定

AN IDENTIFICATION OF IMPACT FORCE ON BEAMS USING KALMAN FILTER

柴田俊文*, 三上 隆**, 須藤敦史***

Toshifumi SHIBATA, Takashi MIKAMI and Atsushi SUTOH

*博士(工学) 松江工業高等専門学校助手, 土木工学科 (〒690-8518 島根県松江市西生馬町 14-4)

**工博 北海道大学大学院教授, 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒060-8628 北海道札幌市北区北 13 条西 8 丁目)

***博士(工学) (株)地崎工業, 土木部技術課 (〒105-8488 東京都港区西新橋 2-23-1)

キーワード: 衝撃力, 同定, カルマンフィルタ, 梁
(impact force, identification, Kalman filter, beam)

1. はじめに

衝撃力を受ける構造物の信頼性・安全性を検討するには, 作用した衝撃力を正確に評価することが重要である¹⁾. 衝撃力の評価に関する研究の一つとして, 構造物に緩衝材を用いて実験したものが挙げられ, その中で衝撃力の推定式として理論式, 実験式がいくつか提案されている. しかし, 理論上の仮定や, 実験条件と現実とにあり得る様々な条件との差異から, 衝撃力の算定式は確立されたものとはなっていないのが現状である. ただし変位などの応答波形からは比較的安定した情報が与えられることが知られており, 構造物の応答波形からその衝撃力を推定(同定)する逆解析的な方法が, 落石による衝撃力を定量的に評価するのに有効であると判断できる.

著者らはこれまでに理論値を用い, カルマンフィルタによる梁の衝撃力同定の適用性を示しており²⁾, さらに変換行列にマルコフ過程(連鎖)の概念を導入することで, 衝撃力の非定常性に対する追従性とノイズの除去能力のトレードオフ関係を改善している.

本研究では, カルマンフィルタを用いた衝撃力同定の適用性検討の一環として, 実験値を用いて解析を行っている. 最初に理論値を用いてその適用性を示し, 次に実験値を使用して逆解析を行った. 実験は室蘭工業大学で行われたもので, 鉄筋コンクリー

ト(RC)梁の中央に重錘を落下させて衝突させたときの変位波形を使用した. ここで実験では, 重錘が一度衝突した後にリバウンドして再衝突するといった現象を示している. 本研究では複数回衝突する現象を逆解析的な方法からどの程度再現することができるかについても検討を加えた. また, 同定した衝撃力を入力値として解析する再解析を併せて行い, 変位波形と反力を求め, 逆解析した結果に関して検討を行った.

2. カルマンフィルタ^{3,4)}

カルマンフィルタは状態方程式と観測方程式から構成されている.

$$\mathbf{x}_t = \Phi_{t-1} \mathbf{x}_{t-1} + \Gamma_{t-1} \mathbf{w}_{t-1} \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t \quad (2)$$

ここで $\mathbf{x}_t$ は状態量, Φ_t は遷移行列, Γ_t 及び $\mathbf{H}_t$ は変換行列, $\mathbf{y}_t$ は観測ベクトルである. また $\mathbf{w}_t$, $\mathbf{v}_t$ はそれぞれシステムノイズ, 観測ノイズを表す. ここに, 状態量の初期推定値を $\hat{\mathbf{x}}_0$, 初期推定誤差共分散 $\mathbf{P}_0$ として, 式(1)による状態量の最小分散推定値を示すと, カルマンフィルタのアルゴリズムを得ることができる.

$$\bar{\mathbf{x}}_t = \Phi_{t-1} \hat{\mathbf{x}}_{t-1} \quad (3)$$

$$\mathbf{M}_t = \Phi_{t-1} \mathbf{P}_{t-1} \Phi_{t-1}^T + \Gamma_{t-1} \mathbf{Q}_{t-1} \Gamma_{t-1}^T \quad (4)$$

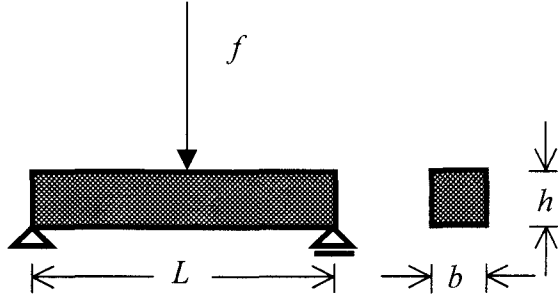


図-1 解析モデル

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \bar{\mathbf{x}}_t + \mathbf{K}_t (\mathbf{y}_t - \mathbf{H}_t \bar{\mathbf{x}}_t) \quad (5)$$

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_t \mathbf{H}_t^T \mathbf{R}_t^{-1} \quad (6)$$

$$\mathbf{P}_t = (\mathbf{M}_t^{-1} + \mathbf{H}_t^T \mathbf{R}_t^{-1} \mathbf{H}_t)^{-1} \quad (7)$$

ここで $\mathbf{K}_t$ はカルマンゲインと呼ばれるものである。次に衝撃荷重を状態量とし、さらに有限要素法との組み合わせ⁵⁾を考えるため、状態方程式は定常性を示すものと仮定する。システムノイズを無視すると、式(1)で $\Gamma_{t-1} = 0$, $\Phi_{t-1} = \mathbf{I}$ とすると式(8)が得られる。

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{I} \mathbf{x}_{t-1} \quad (8)$$

ただし、 $\mathbf{I}$ は単位行列を表す。以上より式(4)の右辺第二項は 0 となり $\bar{\mathbf{x}}_t = \hat{\mathbf{x}}_{t-1}$, $\mathbf{M}_t = \mathbf{P}_{t-1}$ となる。式(8)のように状態方程式を定常と仮定したため、カルマンフィルタにおける状態量推定アルゴリズムでは、観測方程式を各状態量の推定点において偏微分した変換行列を求めなければならない。そこで変換行列 $\mathbf{H}_t$ のベクトル成分は影響係数法⁶⁾を用いて値を求める。以上の変換行列にマルコフ過程の概念を導入して解析を行う。

3. 数値解析例

3.1 解析概要

梁は有限要素法で離散化し、Timoshenko 梁理論に基づくはり要素により、梁全体を 50 分割して解析を行う。時間領域の離散化は Newmark β 法 ($\beta=0.25$) を使用した。また、実験で得られた観測値の時間刻みが大きい場合に対応するため、カルマンフィルタのアルゴリズム中では最低次固有周期の 1/1000 以下の時間刻みで計算を行うことにし、10 ステップごと (観測値の時間ごと) に観測値を用いて同定を行った。また、マルコフ連鎖数は文献より $m=5$ とした。なお、逆解析の精度の指標として以下の式を用いた。

$$Ev = \sum_{t=1}^n (\mathbf{y}_{t,ex} - \hat{\mathbf{y}}_t)^2 \quad (9)$$

ここで、 n は観測値の数、 $\mathbf{y}_{t,ex}$ は時刻 t での観測値及び $\hat{\mathbf{y}}_t$ は計算値である。式(9)は各時刻の和で表されており、任意の一時刻の計算値のみが観測値と乖離している場合にも大きな値を示すことがあり、この値の大小のみで同定の結果を議論するのは困難である。そこで本研究では $Ev < 1.0 \times 10^{-5}$ を同定した際の数値妥当性の基準とし、入力波形 (厳密解) と同定結果の波形の比較と併せて、同定の精度を判断する。また、厳密解の力積 p_1 と同定した衝撃力の力積 p_2 との比 $p_f = p_2 / p_1$ を同定精度の指標とした。加えて、逆解析の解析結果の検討を目的に、同定した衝撃力を入力値として再度順解析を行った (再解析)。

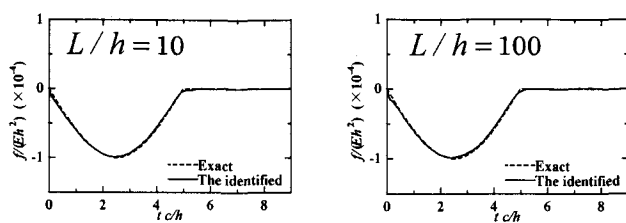
なお、解析結果のグラフでは、衝撃力波形に関しては実線が同定結果、破線は厳密解を示し、変位波形については実線が再解析の結果、破線が同定に用いた波形を示す。なおグラフの縦軸はそれぞれ無次元化衝撃力 f/Eh^2 、変位 u/h を示し、横軸は無次元化時間 tc/h を表す。ここで $c (= \sqrt{E/\rho})$ は縦波の速度、 E は縦弾性係数、 ρ は密度、 h は梁の高さである。

3.2 理論値を用いた解析

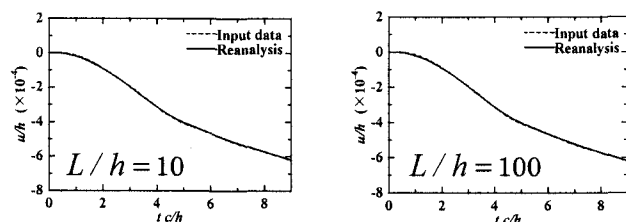
図-1 に示すように両端単純支持梁中央に衝撃力 f が作用する場合を考える。数値解析には二種類の梁を使用し、その諸元は $b/h = 1.0$ (共通)、 $L/h = 10$ 及び 100, $EI/\kappa AGL^2 = 0.237 \times 10^{-2}$ 及び 0.237×10^{-4} , $I/AL^2 = 0.833 \times 10^{-3}$ 及び 0.833×10^{-5} , $\kappa = 10(1+\nu)/(12+11\nu) = 0.845$, $\nu = 0.2$ である。ここで、 b は梁の幅、 L は梁の長さ、 G はせん断弾性係数、 I は断面二次モーメント、 A は断面積、 ν はポアソン比、 κ はせん断補正係数を示す。また、図-2(a) の破線は観測値を作成するために用いた衝撃力波形 f であり、図-2(b) の破線はそれにより得られた梁中央の変位波形である。ただし図-2 の左図が $L/h = 10$ 、右図が $L/h = 100$ の波形である。ここで梁の減衰定数 ζ は考慮せず $\zeta = 0$ とし解析を行った。

3.3 解析結果

カルマンフィルタでは解析前に初期推定誤差共分散 $\mathbf{P}_0$ と観測誤差分散 $\mathbf{R}_t$ を決定する必要がある。 $\mathbf{P}_0$ 及び $\mathbf{R}_t$ には時刻 t に対応する対角成分があり、その成分を無



(a) 衝撃力波形（同定値）



(b) 変位波形（再解析）

図-2 理論値を用いた際の解析結果

表-1 同定精度と力積の比

	$L/h = 10$	$L/h = 100$
$Ev (\times 10^{10})$	2.869	0.195
p_f	1.002	1.001

($n = 100$)

次元化した値をそれぞれ $P_0^* = P_0 / (Eh^2)^2$, $R_i^* = R_i / h^2$ とする. さらに K_i , H_i の無次元化した成分をそれぞれ $K_i^* = K_i / Eh$, $H_i^* = H_i \cdot Eh$ と表し, $K_i^* \leq 1.0 \times 10^2$ を不良な同定値を得ないための基準としている. ここでは $P_0^* / R_i^* = 1.0 \times 10^5$ として解析を行った. また, 初期推定値は $\hat{x}_0 = 0$ として解析を行った.

図-2 にそれぞれ $L/h = 10, 100$ の解析結果を示す. (a) の実線が同定値, (b) の実線が再解析した結果であり, 表-1 にこれらの同定精度を示す. いずれの場合も理論値の入力波形と同定値がほぼ一致しており, 表-1 の値からも精度の良い同定値が得られていることがわかる. また, 再解析した結果も入力波形と良好に適合しており, カルマンフィルタによる逆解析の数値妥当性を確認することができる.

3.4 実験値を用いた解析

次に実験値を入力値として解析を行い, 実現象に対するカルマンフィルタの適用性を検討する. 以下に実験概要⁷⁾を示す.

(1) 試験体

本研究では鉄筋コンクリート (RC) 梁と重錘との

表-2 試験体の諸元

E (GPa)	ρ (kg/m ³)	h (m)	b (m)
19.3	2.4×10^3	0.16	0.16
ν	L (m)	I (m ⁴)	A (m ²)
0.190	2.5 [2.0]	0.36×10^{-4}	0.22×10^{-1}

注: 大括弧内は純スパン長を示す

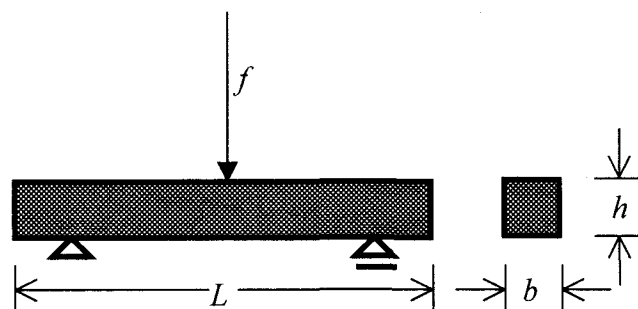


図-3 解析モデル（実験）

衝突実験のデータを用いて数値妥当性を検討する.

表-2 に試験体の諸元と解析に用いた値（後述）を示す.

(2) 重錘落下衝撃荷重載荷実験

実験は RC 梁のスパン中央に重量 1.96kN, 直径 15cm, 長さ 1.6m の円柱状で底部が高さ 2mm の球形状となっている鋼製重錘を所定の高さより自由落下させる. ここで衝突速度が 1.0, 2.0 及び 3.0m/sec になるように落下高さを設定した. なお RC 梁は主鉄筋径が D19 でスターラップを使用しており, 両端から 25cm の位置で鋼製の治具により梁の上下を固定している. また, 治具全体は梁の回転を許容し, ピン支持に近い境界条件となっている.

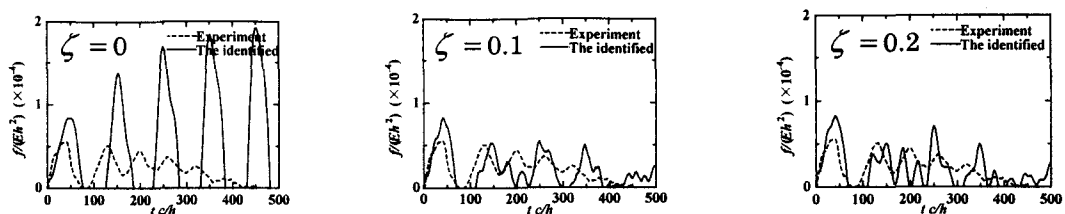
(3) 測定項目

本研究では変位, 衝撃力, 反力を使用する. 応答変位の測定には容量 80mm の非接触式レーザ変位計 (応答周波数 DC~700Hz, 許容誤差 0.4%) を用いている. 重錘衝撃力, 反力の測定には, 起歪柱型ロードセル (容量 1470kN 及び 500kN) を使用し, 重錘と支点支持部に組み込んで測定を行っている. これらセンサーからの値はデータレコーダ (応答周波数 DC~40kHz) に一括収録された後, 100 μ sec/word のサンプリング間隔で A/D 変換を行っている.

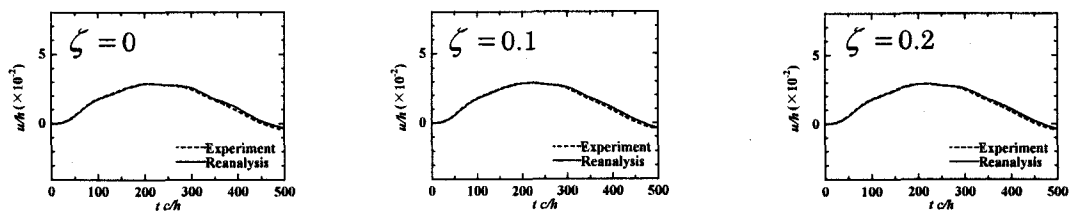
3.5 解析結果

(1) 解析モデル

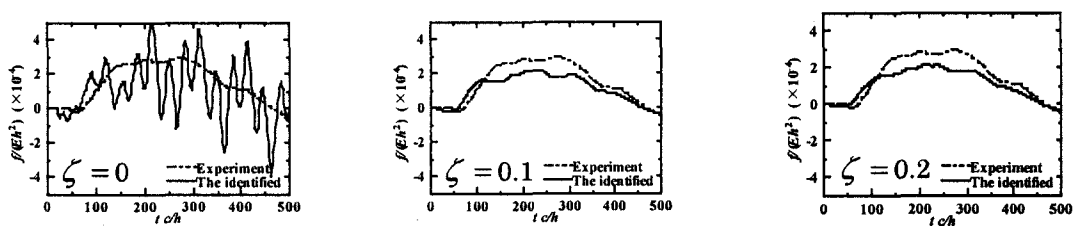
図-3 に解析モデルを示す. 単純支持された RC 梁中央に重錘が初期速度 v_0 で衝突する. ここで $v_0 = 1.0, 2.0$ 及



(a) 衝撃力波形

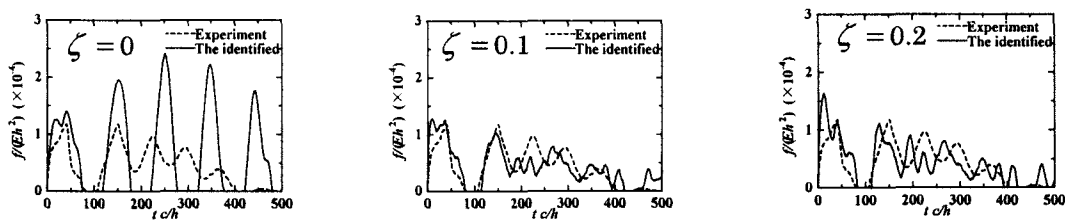


(b) 変位波形

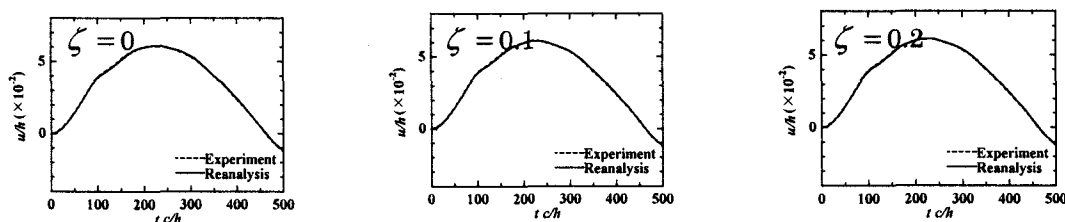


(c) 反力波形

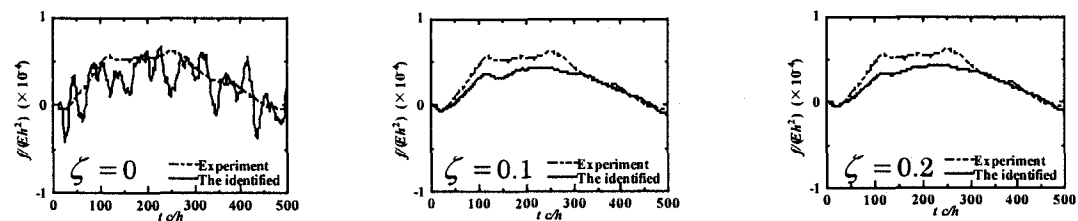
図-4 実験値を用いた際の解析結果
(Type-A : $v_0 = 1.0\text{m/sec}$)



(a) 衝撃力波形



(b) 変位波形



(c) 反力波形

図-5 実験値を用いた際の解析結果
(Type-B : $v_0 = 2.0\text{m/sec}$)

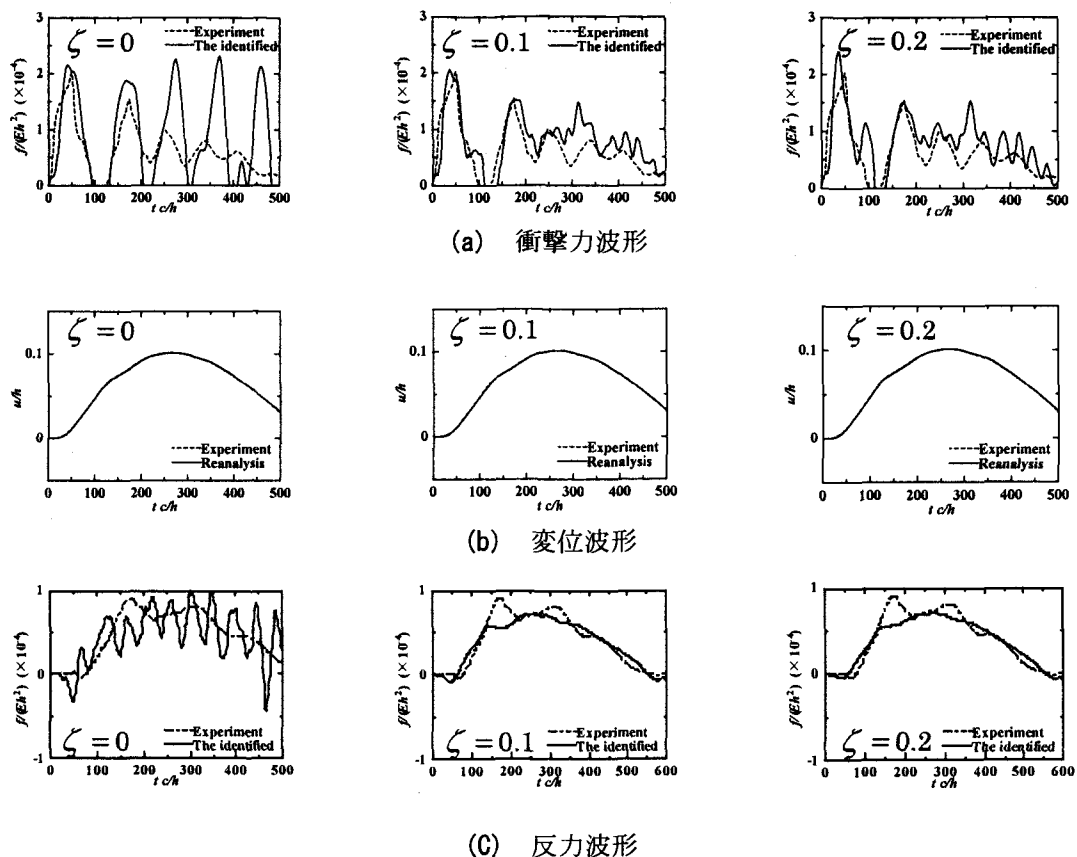


図-6 実験値を用いた際の解析結果
(Type-C : $v_0 = 3.0\text{m/sec}$)

表-3 実験値を用いた際の同定精度

	$\zeta = 0$	$\zeta = 0.1$	$\zeta = 0.2$
Type-A			
$Ev (\times 10^{-5})$	5.234	0.743	0.192
P_f	2.580	1.075	1.054
Type-B			
$Ev (\times 10^{-5})$	7.051	0.237	0.582
P_f	2.142	1.347	1.337
Type-C			
$Ev (\times 10^{-5})$	8.261	0.343	0.786
P_f	1.644	1.253	1.268

($n = 300$)

び 3.0m/sec の実験ケースを Type-A, B 及び C とし、梁は弾性の範囲で適用可能であるとする。梁の剛性に関する断面二次モーメント I と断面積 A は、コンクリートの引張を無視し、引張、圧縮両鉄筋を考慮に入れて換算する。ただし質量マトリックスに関しては全断面有効とし、スターラップは無視する。初期推定誤差共分散と観測誤差分散は 3.3 の基準に基づき $P_0^*/R_t^* = 1.0$ とし、また、得られた同定値が負

の値の場合、重錘と RC 梁が分離していると考えて、衝撃力は 0 であるとした。

(2) 実験値を用いた際の結果

図-4, 5 及び図-6 の (a), (b) 及び (c) にそれぞれ実験値を使用して同定した衝撃力波形と、その波形を用いて再解析して得られた変位波形と反力波形を示す。また表-3 にはそれぞれの結果の精度を示す。ここで Type-A, B 及び C のそれぞれの梁に関して減衰定数を $\zeta = 0, 0.1$ 及び 0.2 の三種類に変化させて解析を行っている。

まず再解析の結果に着目すると、入力値である実験値と再解析した波形はほぼ一致しており、いずれのケースにおいても逆解析は十分に成功していると判断することができる。また同定精度と力積の比 P_f は減衰を考慮していない場合にやや不良な値を示しており、衝撃力波形も時刻が進むにつれて実験値との差が大きくなっていることがわかるが、減衰定数を考慮している場合は同定精度と力積の比、衝撃力波形とも良好な結果を示している。これらの結果より一次元のはり要素によるモデル化が適当であ

ることが確認できると同時に、構造物のパラメータ（本研究の場合は減衰定数）によっては同定結果に大きな影響が出ることが考えられ、パラメータ同定が必要であることを示している。その一方で、衝撃力波形の特性は衝突体と被衝突体との間の接触条件によって変化するが応答波形はほぼ同一であるといった研究報告がある。本研究で用いているモデルでは接触条件を考慮していないことから、接触条件を考慮に入れたモデル及び衝撃力波形の同定についての必要性も考えられる。

次に、衝撃力波形に着目すると、衝撃力のピーク値や衝突時間の詳細な変化も同定されており、文献2)にあるようにマルコフ過程を導入した変換行列を使用することで、非定常性を有する衝撃力に対する追従性が示されているのがわかる。加えて、衝突体と被衝突体との分離・再衝突の現象及び分離時間も再現されていることが確認できる。このことより、変位などの応答値から衝撃力のみならず、重錘の運動状態も推察できる可能性を示唆している。

最後に、反力波形に注目すると、減衰を考慮していない場合に高周波数成分が現れ、実験値との間に差が生じている。また減衰を考慮した場合、同定値がやや小さめの値を示しているものの、波形の形状は概ね適合していることがわかる。以上より、反力波形からも本研究で示した適用性を確認することができる。

4. まとめ

本研究では、理論値を用いてカルマンフィルタの適用性を示した後、実験値を用いて実現象に対する適用可能性の検討を行ったものである。以下に本研究の主要な結論を示す。

(1) カルマンフィルタを用いた梁に作用する衝撃力の同定の適用性を示した。また実験値を用いて解析を行い、実現象に対する適用可能性を示した。

- (2) 梁に減衰を考慮した場合、同定精度と力積の比、衝撃力波形及び反力波形から判断して良好な同定値を得ることができた。今後、減衰定数のパラメータ同定を行うことが必要である。
- (3) 逆解析的な手法を用い、応答波形から分離・再衝突といった複数回衝突する物理現象を再現できることがわかった。
- (4) 今後、重錘とその接触条件を考慮した衝撃力の同定を検討する必要性がある。

謝辞

本研究を行うにあたり、室蘭工業大学の岸徳光教授、防衛庁の安藤智啓氏に多大なる御支援を頂きました。ここに記して謝意を表します。

参考文献

- 1) 日本道路協会，落石対策便覧，2000.
- 2) 柴田俊文，須藤敦史，三上隆，菰澤憲吉：梁に作用する非定常な衝撃荷重の同定，応用力学論文集，土木学会，Vol.1，pp.91-98，1998.
- 3) 星谷勝，斉藤悦郎：建設技術者のためのデータ解析と応用 カルマンフィルタを中心として，鹿島出版会，1991.
- 4) 佐藤忠信他：地盤工学における逆解析，土と基礎，1995.
- 5) 須藤敦史，星谷勝：EK-WLI 法と有限要素法を用いた逆解析，土木学会論文集，No. 466/I-19，pp. 177-185，1992.
- 6) Yeh, W. G.: Review of Parameter Identification Procedures in Groundwater Hydrology (The Inverse Problem), *Water Resources Research*, Vol.22, No.2, pp. 95-108, 1986.
- 7) 岸徳光，三上浩，松岡健一，安藤智啓：静載荷時に曲げ破壊が卓越する RC 梁の弾塑性衝撃応答解析，土木学会論文集，No. 619/I-47，pp.215-233，1999.