

# 衝撃荷重を受ける横等方性矩形厚板の挙動

## Impact Behaviour of A Transversely Isotropic, Thick Rectangular Plate

小林 治俊\*, 須方 大介\*\*

Harutoshi KOBAYASHI and Daisuke SUKATA

\*正会員 工博 大阪市立大学工学部土木工学科 (〒558-8585 大阪市住吉区杉本 3-3-138)

\*\*正会員 修士(工学) 川崎重工業(株)野田工場 (〒278-8585 千葉県野田市二つ塚 118)

キーワード: 衝撃, 応力波, 横等方性, 矩形厚板, 固有関数展開法, 動弾性論  
(*impact, stress wave, transversely isotropy, thick plate, eigenfunction expansion, elastodynamics*)

### 1. はじめに

衝撃荷重を受ける異方性有限体の波動伝播特性に関する研究は, 近年の複合材料力学の進展とともに複合材料の広範な工学分野への適用によりますますその重要性が増している. したがって, 異方弾性体の波動伝播を解析的に取り扱う方法を示すとともに弾性域ではあるが精緻な衝撃応答特性を示しておくことは, 材料特性や衝撃破壊現象の解明に関連するとともに各種の近似解法による解析結果のベンチマークとしても重要である考えられる.

衝撃問題(波動伝播問題)を解析的に取り扱う手法としては主に3つあり, これらは相互にラプラス変換法に関連し合っている[1]. 第1の方法は積分変換法であり, 時間や空間変数の消去法としてラプラス変換, フーリエ変換などを使用する方法である. 一般に変換された像空間での解式は複雑であり, それらの逆変換を解析的に行うには困難を伴う. ラプラス逆変換に関しては, 衝撃点より遠方の観測点での応答を求める場合には漸近展開による近似解によることが多いが, 留数定理の適用により遠近点の双方に適用できる正確解を求めることができる. その結果は一般に自由振動問題の振動モード関数(固有関数)よりなる級数解として求められる. 第2の方法は一般化波線理論によるものであり, これはラプラス像空間での解式を衝撃点から観測点に直接到達する応力波や境界において幾度か反射を繰り返して到達する応力波を表す ray 積分と称する成分に分離する方法である. 本法はごく短時間内の応答は高精度で求められるが, 遠方の観測点や長時間帯の応答を計算するには数多くの ray 積分が必要である. 第3の固有関数展開法は, Reismann [2]によって定式化され, 先に記したようにラプラス変換と留数定理を

用いて正確解が固有関数よりなる級数解として求められることに着目して, ラプラス変換を使用することなく解析当初より固有関数を適用する方法である. すなわち解を慣性力が影響しない準静的解と慣性力の影響を受ける部分に分解して, 後者に固有関数を適用するものである. したがって, 構造物の動的解析に用いられるいわゆるモード法と同一の解析過程を経て弾性体の波動伝播解析が行える利点がある. 著者の一人はこの固有関数展開法を等方性からなる平板や多層板の衝撃応答解析に適用するとともに, 横等方性円板や平面ひずみ状態の平板の衝撃応答解析にも適用した[3,4].

本研究では三次元動弾性論に基づき, 固有関数展開法により横等方性矩形板の衝撃応答解析を行う方法を示すとともに, その動的挙動および材料定数が応答に及ぼす影響および応力波伝播特性を検討する.

### 2. 基礎式

取り扱う横等方性矩形板の座標系を図-1に示している. 矩形板は辺長を  $a, b$ , 板厚を  $h$  とし,  $x = 0, a, y = 0, b$  の4辺で単純支持され, その異方

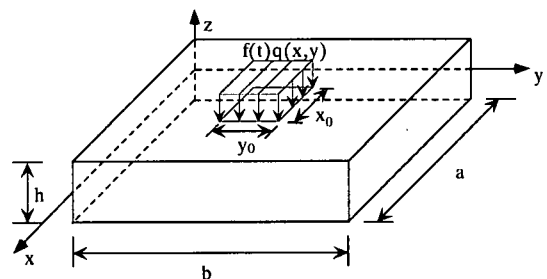


図-1 矩形板の座標系

軸を  $z$  軸にとり,  $xy$  面を等方面とする. また荷重は, 空間関数  $q(x,y)$  と時間関数  $f(t)$  との積により  $q(x,y,t) = q(x,y)f(t)$  のように表され,  $x_0 \times y_0$  の載荷面上に作用するものとする.

さて, 座標方向の変位を  $u(x,y,z,t)$ ,  $v(x,y,z,t)$ ,  $w(x,y,z,t)$ , 材料定数を  $C_{ij}$  とすれば, 横等方性体の応力-変位関係は

$$\begin{aligned}\sigma_x &= C_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + C_{13} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \sigma_y &= C_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{11} \frac{\partial v}{\partial y} + C_{13} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \sigma_z &= C_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{13} \frac{\partial v}{\partial y} + C_{33} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{yz} &= C_{44} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \tau_{zx} &= C_{44} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \tau_{xy} &= C_{66} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad (1)$$

である[6]. また, 密度を  $\rho$  とすると運動方程式は

$$\begin{aligned}L_u(u,v,w) &= \rho \ddot{u}, \quad L_v(u,v,w) = \rho \ddot{v}, \\ L_w(u,v,w) &= \rho \ddot{w}\end{aligned}\quad (2)$$

と書ける. ここにドットは時間  $t$  に関する微分 ( $\dot{\quad} = \partial/\partial t$ ) を意味し, また  $L_u, L_v, L_w$  は以下で与えられる微分演算子である.

$$\begin{aligned}L_u(u,v,w) &= C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C_{44} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ &\quad + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (C_{13} + C_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \\ L_v(u,v,w) &= (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + C_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ &\quad + C_{44} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (C_{13} + C_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \\ L_w(u,v,w) &= (C_{13} + C_{44}) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \right) \\ &\quad + C_{44} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + C_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\end{aligned}\quad (3)$$

次に, 矩形板の 4 辺  $x=0, a$ ,  $y=0, b$  での支持条件と上下面での境界条件は,

$$\begin{aligned}w = v = \sigma_x &= 0 \quad (x=0, a) \\ w = u = \sigma_y &= 0 \quad (y=0, b) \\ \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} &= 0 \quad (z=-h/2) \\ \sigma_z = -q(x,y,t), \quad \tau_{yz} = \tau_{zx} &= 0 \quad (z=+h/2)\end{aligned}\quad (4)$$

で与えられ, 応答開始前に矩形板は静止状態にあるとすれば, 初期条件は次のようになる.

$$\begin{aligned}u = v = w &= 0 \quad (t=0) \\ \dot{u} = \dot{v} = \dot{w} &= 0 \quad (t=0)\end{aligned}\quad (5)$$

なお外荷重のフーリエ級数は

$$q(x,y,t) = f(t) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mnl} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (6)$$

である. ただし

$$\begin{aligned}q_{mnl} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x,y) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y dx dy \\ \alpha_m &= m\pi/a, \quad \beta_n = n\pi/b \quad (m,n=1,2,3,\dots)\end{aligned}\quad (7)$$

### 3. 衝撃応答解析

運動方程式(2)の解を慣性力の影響を受けない部分と受ける部分に分離し, 次のようにとる.

$$\begin{aligned}u &= u^s(x,y,z,t) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} Q_{mnl}(t) U_{mnl}(x,y,z) \\ v &= v^s(x,y,z,t) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} Q_{mnl}(t) V_{mnl}(x,y,z) \\ w &= w^s(x,y,z,t) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} Q_{mnl}(t) W_{mnl}(x,y,z)\end{aligned}\quad (8)$$

すなわち,  $u^s, v^s, w^s$  は式(2)で慣性項を無視した場合 ( $\rho \ddot{u} = \rho \ddot{v} = \rho \ddot{w} = 0$ ) の準静的解であり, つり合い式:

$$\begin{aligned}L_u(u^s, v^s, w^s) &= 0, \quad L_v(u^s, v^s, w^s) = 0, \\ L_w(u^s, v^s, w^s) &= 0\end{aligned}\quad (9)$$

および境界条件:

$$\begin{aligned}w^s = v^s = \sigma_x^s &= 0 \quad (x=0, a) \\ w^s = u^s = \sigma_y^s &= 0 \quad (y=0, b) \\ \sigma_z^s = \tau_{yz}^s = \tau_{zx}^s &= 0 \quad (z=-h/2) \\ \sigma_z^s = -q(x,y,t), \quad \tau_{yz}^s = \tau_{zx}^s &= 0 \quad (z=+h/2)\end{aligned}\quad (10)$$

を満足するものである. ただし, 応力は式(1)を参照して,

$$\begin{aligned}\sigma_x^s &= C_{11} \frac{\partial u^s}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial v^s}{\partial y} + C_{13} \frac{\partial w^s}{\partial z} \\ \tau_{yz}^s &= C_{44} \left( \frac{\partial v^s}{\partial z} + \frac{\partial w^s}{\partial y} \right)\end{aligned}\quad (11)$$

などで与えられる.

一方, 式(8)の右辺の級数を本文では擾乱解と呼び,  $U_{mnl}(x,y,z)$ ,  $V_{mnl}(x,y,z)$ ,  $W_{mnl}(x,y,z)$  は固有関数 (振動モード関数),  $Q_{mnl}(t)$  は未定の時間関数 (一般化座標), また  $m, n, l$  はそれぞれ  $x, y, z$  方向のモード次数である. 固有関数は,

$$\begin{aligned}U_{mnl} &= \cos \alpha_m x \cos \beta_n y \cos \gamma_l z \\ V_{mnl} &= \sin \alpha_m x \cos \beta_n y \cos \gamma_l z \\ W_{mnl} &= \cos \alpha_m x \sin \beta_n y \cos \gamma_l z\end{aligned}\quad (12)$$

とおき, 式(2)に代入したのち時間項を省略した自由振動問題のつり合い式:

$$\begin{aligned}L_u(U_{mnl}, V_{mnl}, W_{mnl}) &= -\rho \omega_{mnl}^2 U_{mnl} \\ L_v(U_{mnl}, V_{mnl}, W_{mnl}) &= -\rho \omega_{mnl}^2 V_{mnl} \\ L_w(U_{mnl}, V_{mnl}, W_{mnl}) &= -\rho \omega_{mnl}^2 W_{mnl}\end{aligned}\quad (13)$$

および境界条件：

$$\begin{aligned} W_{mnl} = V_{mnl} = \sigma_x^{(mnl)} &= 0 \quad (x=0, a) \\ W_{mnl} = U_{mnl} = \sigma_y^{(mnl)} &= 0 \quad (y=0, b) \\ \sigma_z^{(mnl)} = \tau_{yz}^{(mnl)} = \tau_{zx}^{(mnl)} &= 0 \quad (z = \pm h/2) \end{aligned} \quad (14)$$

を満足する。応力モードは式(1)を参照して、

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(mnl)} &= C_{11} \frac{\partial U_{mnl}}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial V_{mnl}}{\partial y} + C_{13} \frac{\partial W_{mnl}}{\partial z} \\ \tau_{yz}^{(mnl)} &= C_{44} \left( \frac{\partial V_{mnl}}{\partial z} + \frac{\partial W_{mnl}}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

などで与えられる。

固有関数には相反定理より求められる次の直交性がある。

$$\int_V (U_{mnl} U_{ijk} + V_{mnl} V_{ijk} + W_{mnl} W_{ijk}) dV = \delta_{mi} \delta_{nj} \delta_{lk} N_{mnl}^2 \quad (16)$$

ただし、 $\delta_{mi}$ 、 $\delta_{nj}$ 、 $\delta_{lk}$ はクロネッカーのデルタ、 $N_{mnl}$ はノルムであり、積分は矩形板全体に行うものとする。

以上のように衝撃応答解より分離した準静的解と擾乱解を規定するそれぞれの境界条件式(10)、(14)により衝撃問題の境界条件式(4)が満たされていることは明らかである。そこで未定の時間関数 $Q_{mnl}(t)$ を定めるために、式(8)を式(2)に代入して、式(9)、(13)を利用すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (\ddot{Q}_{mnl} + \omega_{mnl}^2 Q_{mnl}) U_{mnl} &= -\rho \ddot{u}^s \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (\ddot{Q}_{mnl} + \omega_{mnl}^2 Q_{mnl}) V_{mnl} &= -\rho \ddot{v}^s \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (\ddot{Q}_{mnl} + \omega_{mnl}^2 Q_{mnl}) W_{mnl} &= -\rho \ddot{w}^s \end{aligned} \quad (17)$$

ここで、 $U_{ijk}$ 、 $V_{ijk}$ 、 $W_{ijk}$ をそれぞれ上式の第1~3式の両辺に乗じたのち3式を加え合わせ、さらに矩形板全体にわたり積分する。そして固有関数の直交性、式(16)を利用すると

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_{mnl}(t) + \omega_{mnl}^2 Q_{mnl}(t) &= \ddot{Z}_{mnl}(t) \\ Z_{mnl}(t) &= -\frac{1}{N_{mnl}^2} \int_V (u^s U_{mnl} + v^s V_{mnl} + w^s W_{mnl}) dV \end{aligned} \quad (18)$$

式(18)の解は周知のように

$$\begin{aligned} Q_{mnl}(t) &= Q_{mnl}(0) \cos(\omega_{mnl} t) + \frac{1}{\omega_{mnl}} \dot{Q}_{mnl}(0) \sin(\omega_{mnl} t) \\ &+ \frac{1}{\omega_{mnl}} \int_0^t \ddot{Z}_{mnl}(\tau) \sin[\omega_{mnl}(t-\tau)] d\tau \end{aligned} \quad (20)$$

となる。 $Q_{mnl}(0)$ 、 $\dot{Q}_{mnl}(0)$ は積分定数であり、次のように決定できる。式(8)で $t=0$ とおき初期条件の式(5a)を利用すれば、

$$\begin{aligned} u^s(x, y, z, 0) &= -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} Q_{mnl}(0) U_{mnl}(x, y, z) \\ v^s(x, y, z, 0) &= -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} Q_{mnl}(0) V_{mnl}(x, y, z) \end{aligned} \quad (21)$$

$$w^s(x, y, z, 0) = -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} Q_{mnl}(0) W_{mnl}(x, y, z)$$

が得られるので、上式の第1~3式の両辺に $U_{ijk}$ 、 $V_{ijk}$ 、 $W_{ijk}$ をそれぞれ乗じたのち3式を加え合わせ、さらに矩形板全体に積分して固有関数の直交性を利用すると次式を得る。

$$Q_{mnl}(0) = Z_{mnl}(0) \quad (22)$$

同様にして

$$\dot{Q}_{mnl}(0) = \dot{Z}_{mnl}(0) \quad (23)$$

と求めることができる。

以上が固有関数展開法による定式化であるが、さらに本問題の準静的解および固有関数の具体式を求める必要がある。これには、Huの変位関数[7]を用いて式(9)、(13)を非連成の偏微分方程式に変換して解析を行えばよいが、その手順と結果については文献[8]に譲ることとする。

## 4. 数値計算例

### (1) 諸元

対象厚板は板厚比 $h/a = 0.2$ の正方形板( $a = b$ )とし、強度 $q_0$ の部分等分布荷重が板上面の中央部に載荷幅 $x_0/a = y_0/a = 0.2$ で時間に関してステップ状[ $f(t) = H(t)$ ： $H(t)$ は単位のステップ関数]に作用するものとする(図-1参照)。横等方性材料として自然界にはマグネシウムや亜鉛などがあり、Graphite/epoxyなどの複合材料も巨視的には横等方性を示すものであるが、ここでは異方性の特性を簡明に検討するために異方面と等方面での縦弾性係数比 $E/E'$ のみを異方性パラメータとして数値計算を行うことにした。 $E, G, \nu$ をそれぞれ等方面での縦弾性係数、横弾性係数、ポアソン比、また $E', G', \nu'$ を等方面に垂直な面での縦弾性係数、横弾性係数、ポアソン比とすれば、これらは材料定数 $C_{ij}$ との間に次の関係がある[6]。

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{E' - (\nu')^2 E}{(1 + \nu)R}, \quad C_{12} = \frac{\nu E' - (\nu')^2 E}{(1 + \nu)R}, \\ C_{13} &= \frac{\nu' E'}{R}, \quad C_{33} = \frac{(1 - \nu)(E')^2}{ER}, \quad C_{44} = G', \\ C_{66} &= \frac{C_{11} - C_{12}}{2} = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \end{aligned} \quad (24)$$

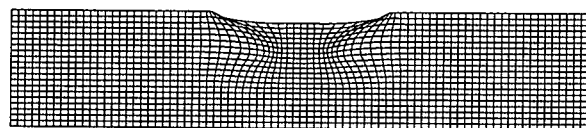
ただし

$$R = (1 - \nu)(E'/E) - 2(\nu')^2$$

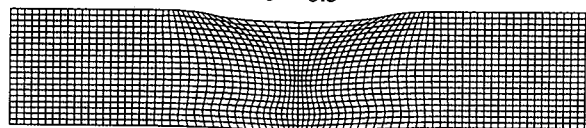
そこで、ポアソン比を $\nu = \nu' = 0.3$ 、横弾性係数を $G = G'$ と一定にして、縦弾性係数比を $E/E' = 1/3, 1/2, 1$ (等方性)、 $2, 3$ と変化させた。また各ケースとも密度 $\rho$ は同一にした。なお、このように材料定数を選択してもエネルギー正值の条件[9]を満足していることを確認している。以下の応答計算は全て無次元化して行い、時間については等方面

( $xy$  面) 内を伝播する縦波速度  $c_L$  で基準化した次の無次元時間  $\tau$  を用いた.

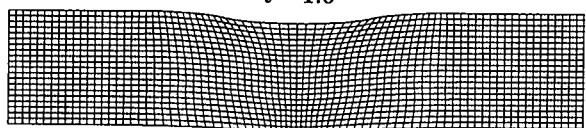
$$\tau = \frac{c_L t}{h}, \quad c_L = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}} \quad (25)$$



$\tau = 0.5$

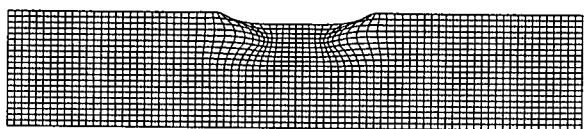


$\tau = 1.0$

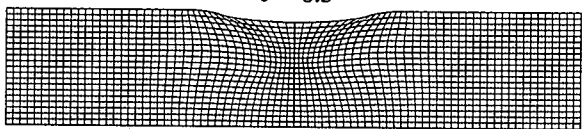


$\tau = 1.2$

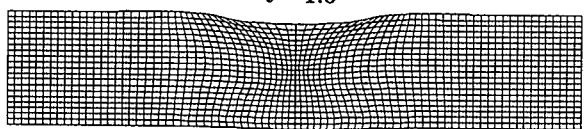
(a)  $E/E' = 1/2$



$\tau = 0.5$

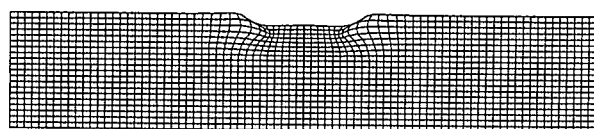


$\tau = 1.0$

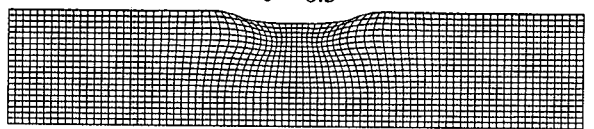


$\tau = 1.2$

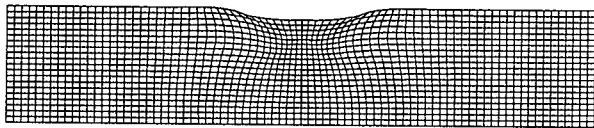
(b)  $E/E' = 1$



$\tau = 0.5$



$\tau = 1.0$



$\tau = 1.2$

(c)  $E/E' = 2$

図-2 初期変形

## (2) 変位の応答

図-2は、衝撃を受けた後の時刻  $\tau = 0.5, 1.0, 1.2$  における板の  $xz$  ( $yz$ ) 断面の変形図である。画描にあたってはスパン方向に 80 分割、板厚方向に 20 分割している。

異方性体においては、一般に任意方向を伝播する応力波の速度面と波面は一致しないが、主軸方向では一致する[10]。今の場合、 $z$  軸は主軸の一つであり、 $z$  軸方向(板厚方向)に伝播する縦波速度  $c_z = \sqrt{C_{33}/\rho}$  は縦弾性係数比  $E/E' = 1/3, 1/2, 1, 2, 3$  に対して  $c_z/c_L = 1.68, 1.38, 1.0, 0.745, 0.645$  の関係がある。これを念頭において図-2の初期変形状態をみると、まず等方性板( $E/E' = 1$ )に関しては、時刻  $\tau = 0.5$  では中心軸上板厚中央点まで応力波の影響を受けるとともに衝撃部分より球面状の部分に変形が起きている。板の下面に応力波(縦波)が最初に到達する時刻は  $\tau = 1.0$  であり、この荷重面中央からの縦波およびそれに続く荷重荷面からの応力波は下面で反射されて圧縮から引張に位相が変わり、板の上面に向かって進行する。

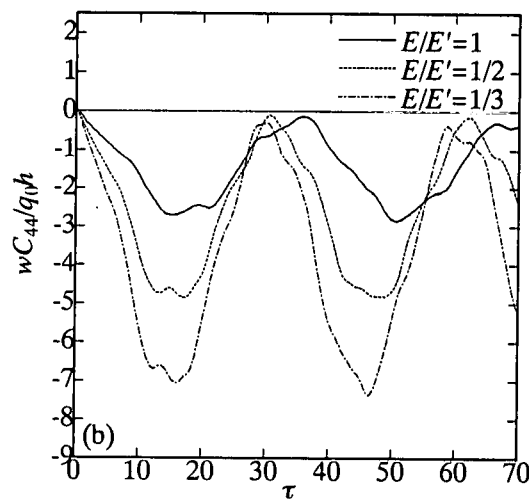
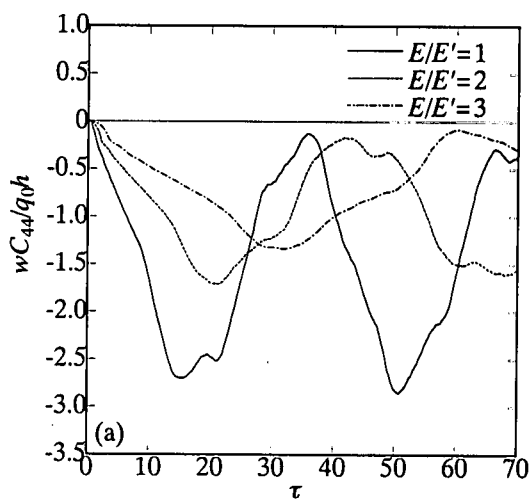


図-3 変位  $w$  の長期応答( $x = y = a/2, z = 0$ ):  
(a)  $E/E' = 1, 2, 3$ ; (b)  $E/E' = 1, 1/2, 1/3$

時間に関してはステップ荷重としているために引き続き板上面からの圧縮波とこの引張波の干渉が起り、時刻 $\tau=1.2$ ではその影響が現れている。次に等方性板と同時刻における異方性板の変形は、縦弾性係数比が小さい場合( $E/E'=1/2$ )では広い範囲に、大きな場合( $E/E'=2$ )では狭い範囲で起っている。これは $xy$ 平面(等方面)での応力波速度を基準速度としているために、水平方向へ伝播する応力波速度は等方性体の場合と同じであるが、それ以外の任意方向へ伝播する応力波速度が異なり、同時刻での応力波および波面の到達範囲に違いがあるからである。

次に板中央点( $x=y=a/2, z=0$ )における変位 $w$ の長期応答を図-3に示す。無次元基本周期 $T$ は、固有値解析によれば縦弾性係数比 $E/E'=1/3, 1/2, 1, 1/2, 3$ に対して $T=30.22, 31.17, 34.43, 43.49, 63.88$ となった。これは応答図から読みとれる時刻と一致している。縦弾性係数比が大きくなるということは $xy$ 平面(等方面)の剛性が相対的に高まるこ

とであり、それに対応した周期と応答値の違いが応答図に現れている。

### (3) 応力 $\sigma_x$ の応答

図-4 および図-5 に応力 $\sigma_x$ の初期( $0 \leq \tau \leq 10$ )および長期( $0 \leq \tau \leq 70$ )応答曲線を示している。着目点は上下面中央点( $x=y=a/2, z=\pm h/2$ )である。最初に初期応答を検討すると、上面中央ではいずれの応答も載荷瞬時に圧縮の応答値を持ち、縦弾性係数比が大きいほどその値が大きい。これは、作用圧縮荷重 $q_0$ とつり合う圧縮応力 $\sigma_z = -q_0$ による $x, y$ 方向のひずみが拘束されるために応力 $\sigma_x (= \sigma_y)$ が生じるからであり、縦弾性係数比が大きいと $xy$ 平面での剛性が高まり応答値が大きくなるためである。

その後の応答は、時刻 $\tau=0.5$ で載荷端である4点[ $(x=0.5a, y=0.4a), (x=0.5a, y=0.6a), (x=0.4a, y=0.5a), (x=0.6a, y=0.5a)$ ]より発生し

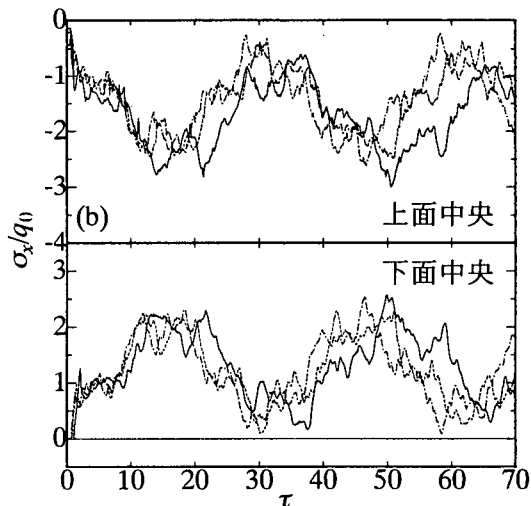
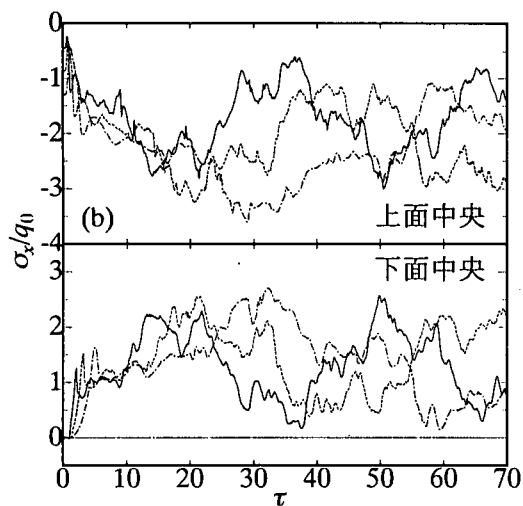
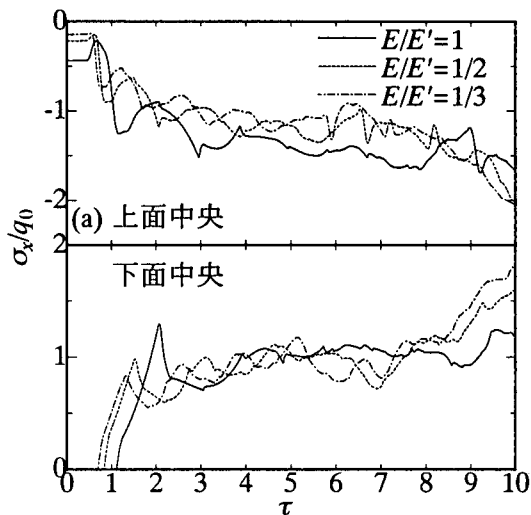
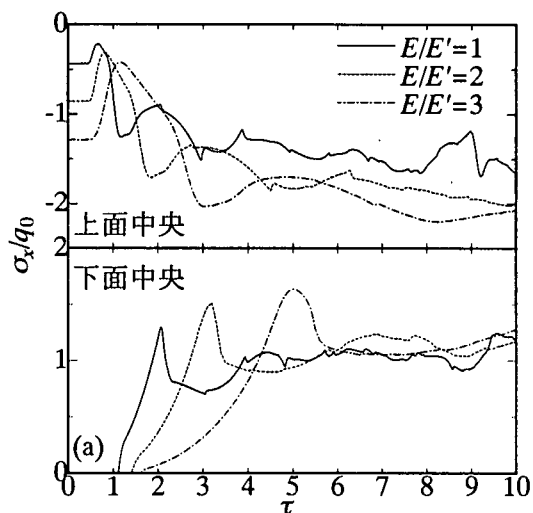


図-4 応力 $\sigma_x$ の応答 ( $x=y=a/2, z=\pm h/2$ ;  $E/E'=1, 2, 3$ ): (a)初期応答, (b)長期応答

図-5 応力 $\sigma_x$ の応答曲線( $x=y=a/2, z=\pm h/2$ ;  $E/E'=1, 1/2, 1/3$ ): (a)初期応答, (b)長期応答

た疑似縦波による急変した応答がおこり、さらに引き続く尖った応答は Rayleigh 波の影響によるものであり、その到達時刻は、Rayleigh の波速式[11]から縦弾性係数比  $E/E' = 1/3, 1/2, 1, 2, 3$  に対して  $\tau = 0.65, 0.74, 1.07, 1.60, 2.67$  と求められ、応答図の時刻と一致している。下面中央点での応答は、板厚に対応した応答の遅れがありまた表面波の影響と見られるピーク値を持っている。次に長期応答の場合は上下面いずれの応答も振動の高周波成分のために複雑な応答曲線になっているが、初期の応答を除けば先に変位応答のところで示した無次元基本周期に従う応答を示している。縦弾性係数比が大きいほど  $xy$  面での剛性が相対的に高まることにより、曲げ応力に対応するこの応力  $\sigma_x$  の応答値も大きいことが図より分かる。

## 5. おわりに

本研究は、板厚方向が異方軸である横等方性矩形板の弾性衝撃応答解析を試みたものであり、動弾性論に基づく固有関数展開法により衝撃応答解を固有関数（振動モード関数）からなる級数解[式(8)]として求めた。数値計算例では等方面と異方面での縦弾性係数の比  $E/E'$  のみを異方性パラメータとし、正方形板を対象に計算を行った。そして主として、変位  $w$ （たわみ）、応力  $\sigma_x$  の初期および長期応答を検討した。その結果、変位  $w$  応答では、縦弾性係数比が大きくなるほど応答周期が延びかつその応答値が小さくなる。また縦弾性係数比が大きくなるほど異方軸に沿った縦波速度が遅くなるために、衝撃後初期の全体変形は小さな範囲に留まる。また板上下面中央での応力  $\sigma_x$  の初期応答では、衝撃瞬時に応答値が生じるとともに引き続いて Rayleigh の表面波の影響が現れる。また長期応答では、高周波成分の影響が現れ複雑な応答曲線となり縦弾性係数比が大きくなるほど等方性板に比べ大きな応答値となる、ことが明らかになった。

## 参考文献

- [1]Pao, Y.-H. : Elastic Waves in Solids, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 50, pp. 1152-1164, 1983.  
 [2]Reismann, H. : On the Forced Motion of Elastic Solids, *Applied Scientific Research*, Vol. 18, pp. 156-165, 1967.  
 [3]小林治俊, 米田幸司 : 異方性円板の弾性衝撃応答解析, 構造工学論文集, 土木学会, Vol. 42A, pp. 1287-1293, 1996.  
 [4]小林治俊, 米田幸司 : 異方性平面梁の弾性衝撃応答解析, 構造工学論文集, 土木学会, Vol. 44A, pp. 1737-1744, 1998.  
 [5]Lange, K. A. and Bottega, W. J. : On the Elastodynamic Response of Thick Multi-layered Plates Subjected to Impact Load, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 221, pp. 39-93, 1998.

- [6]Lekhnitskii, S. G. : *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, Mir Publishers, Moscow, 1981.  
 [7]Hu, H.-C. : On the Three-dimensional Problems of the Theory of Elasticity of a Transversely Isotropic body, *Acta Scientia Sinica*, Vol. 2, pp. 145-151, 1953.  
 [8]須方大介 : 動弾性論に基づく異方性厚板の波動伝播に関する研究, 大阪市立大学工学研究科修士論文, 2000年2月.  
 [9]Payton, R. G.: *Elastic Wave Propagation in Transversely Isotropic Media*, Martinus Nijhoff Publishers, Hague/Boston/Lancaster, 1983.  
 [10]Musgrave, M. J. P. : On the Propagation of Elastic Waves in Aeolotropic Media, II. Media of Hexagonal Symmetry, *Proceedings of the Royal Society of London*, Vol. A226, pp. 356-366, 1954.  
 [11]Deresiewicz, H. and Mindlin, R. D : Wave on the Surface of a Crystal, *Journal of Applied Physics*, Vol. 28, pp. 669-671, 1957.