

局所変形を考慮した梁の衝撃力の簡易評価法

A SIMPLIFIED METHOD FOR ESTIMATING IMPACT FORCE ON BEAMS CONSIDERING
LOCAL DEFORMATION

蟹江 俊仁、鈴木 俊一

Shunji KANIE* and Shunichi SUZUKI**

*工博 大成建設株式会社 エンジニアリング本部 シニアエンジニア (〒163-0606 新宿区西新宿 1-25-1)
** 大成建設株式会社 エンジニアリング本部 エンジニア (〒163-0606 新宿区西新宿 1-25-1)

キーワード：局所変形、Hertz 理論、バネー質量モデル、梁、衝撃力

(Local deformation, Hertz's theory, Spring-mass Model, Beam, Impact force)

1. はじめに

梁の衝撃挙動を評価する方法として、梁の振動や衝撃体の弾性変形を考慮した Hertz の接触理論¹を用いる方法がある。しかし、薄肉中空梁のように衝突部分において比較的大きな局所変形が予想される場合にその局所変形の影響を評価することができないことや、衝撃力の算出に非線形方程式を解く必要があるなど、実用的な解析法とはいいがたい面もある。そのため、衝撃体と被衝撃体の接触点の相互作用を線形バネー質量系にモデル化して、局所変形の影響を考慮したり、解析を簡便化するなど方法も提案されているが、バネ（等価剛性）と質量（等価質量）の算出根拠やその適用限界が不明のものも多い。

本研究は、構造要素が板でモデル化できる中空梁を対象に、局所変形の効果等を等価バネと等価質量で簡易に評価しようとするものである。本方法では、梁の構成要素である板に静的な荷重を載荷し、その

変形解からエネルギー法的な考え方で等価バネと等価質量を得ている。その結果、比較的大きな局所変形が予想される場合の衝撃荷重も簡便に求められることとなる。しかし、衝撃体と被衝撃体の相互作用を単一のバネー質量系に置き換えて評価するため、その適用限界等について明示する必要があると考え、妥当性、適用可能性の検証を Hertz 理論や柴田²の提案する局所変形の簡易評価法等との比較を通じて行った。

2. Hertz の弾性接触論に基づく衝撃力評価

Hertz の弾性接触論に基づいて、両端単純支持梁に球体が衝突する際の衝撃力を評価する。図-1に示すように、長さ l の梁の中央に質量 m_c の球が速度 v_0 で衝突した状態を想定し、その時の衝撃荷重 $P(t)$ を考える。時刻 $t=0$ を衝撃の瞬間とし、球の変位を $u(t)$ 、梁のたわみを $w(x,t)$ として、球と梁との接近量 $\delta(t)$

と衝撃力 $P(t)$ の間に Hertz の弾性接触が成立するとすれば、基礎方程式は次のようになる。

$$m_c = \frac{d^2 u(t)}{dt^2} = -P(t) \quad (1)$$

$$E_b I_b \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \mu_b \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = p(x,t) \quad (2)$$

$$\mu_b = \rho_b h_b \quad (3)$$

ここに、 E_b ：梁の弾性係数、 I_b ：梁の断面二次モーメント、 ρ_b ：梁の質量、 ν_b ：梁のポアソン比である。

上式に、初期条件として球の衝突速度 v_0 と梁の静止条件、梁の境界条件として両端の支持条件を導入した上で、以下の接触条件を適用する。

$$\delta = u(t) - w(x = l/2, t) = \left[\frac{P(t)}{K} \right]^{2/3} \quad (4)$$

ここに、 $w(x=l/2, t)$ は球が衝突する梁中央での変位を表しており、衝撃力 $P(t)$ は球と梁中央の相対変位と K により求められることになる。Hertz の弾性接触論では K は下式で与えられる。

$$K = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{R}}{\left[\frac{(1-\nu^2)}{E} \right] + \left[\frac{(1-\nu_b^2)}{E_b} \right]} \quad (5)$$

ただし、 R ：球の半径、 E ：球の弾性係数、 ν ：球のポアソン比を示す。

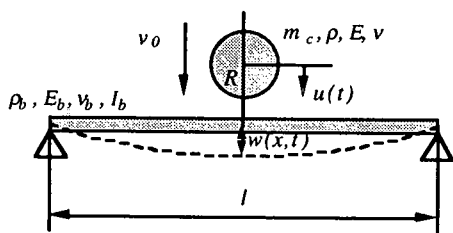


図-1 Hertz による梁の衝撃評価モデル

式 (5) から明らかなように、 K は衝撃体と被衝撃体の大きさや弾性係数、ポアソン比によってのみ決定され、衝突部分での局所変形の影響は考慮されない。

3. 等価線形バネ-質点系モデル

衝突による局所変形の影響は、梁の衝突部分に等価線形バネ（弾性係数： k_e ）と等価質量（質量： m_e ）を導入することで評価する（図-2）。

梁は曲げ変形のみを考慮して離散化し、各節点に鉛直方向変位 w と回転変位 θ の 2 自由度を与えた上、衝突部分の等価質量には鉛直方向自由度のみを加えて運動方程式を構築する。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{K}\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (6)$$

ここで、 \mathbf{M} は質量マトリックス、 \mathbf{C} は減衰マトリックス、 \mathbf{K} は剛性マトリックス、 \mathbf{w} は衝撃体の変位 $u(t)$ および衝突部分の等価質量の変位 $w_0(t)$ を含む変位ベクトルである。衝撃力 f は、等価バネの弾性係数 k_e を用いて次のように求められる。

$$f = k_e (w_0(t) - w(x = l/2, t)) \quad (7)$$

計算にあたって設定した条件は次の通りである。

i) 初期条件

$$u(0) = w_0(0) = 0, \quad \frac{dw_0(t=0)}{dt} = 0, \quad \frac{du(t=0)}{dt} = v_0$$

$$w(x, 0) = \frac{\partial w(x, t=0)}{\partial t} = 0$$

ii) 境界条件

$$w(0, t) = \frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial x^2} = 0$$

$$w(l, t) = \frac{\partial^2 w(l, t)}{\partial x^2} = 0$$

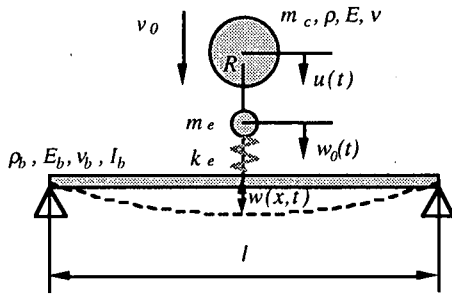


図-2 等価線形バネ-質点系モデル

iii) 接触条件

$$u(t) \leq w_0(t) \Rightarrow f = 0$$

計算は、Newmark β 法に定加速度条件 ($\beta = 0.25, \gamma = 0.5$) を適用して行った。

4. 等価線形バネと等価質量の設定

局所変形の影響を考慮した等価線形バネと等価質量の設定において、柴田らは静的な有限要素法に基づく方法を提案している。これは、三次元有限要素にモデル化した梁の衝撃点に静的な集中荷重 P_s を載荷し、その時の衝撃点変位 δ_s から等価バネ値を求めるものである。等価質量については、集中荷重 P_s による静的変形を用いて、エネルギー法的手法で設定を行っている。これを式で表すと次のようになる。

$$k_e = P_s / \delta_s \quad (8)$$

$$m_e = \mathbf{w}_s^T \cdot \mathbf{M}_s \cdot \mathbf{w}_s / \delta_s^2 \quad (9)$$

ここで、 k_e : 等価バネ値、 m_e : 等価質量、 \mathbf{w}_s : 集中荷重 P_s を三次元モデルに載荷した時の変位ベクトル、 \mathbf{M}_s : 三次元モデルの質量マトリックスである。

本論文でも同様の手法を用いるものとするが、局所変形を生じやすい薄肉中空断面の場合、その変形が梁断面の構成要素である薄板の局所的な変形に

支配されると思われる。このため、等価質量と等価線形バネを求めるために梁全体の三次元モデル化を行う方法に替えて、薄板の弾性変形解から等価質量と等価線形バネを求めることとした。

相対二辺が単純支持された無限帯状板の場合、板幅の中央に集中荷重 P_s を受けた時のたわみ $w_l(x, y)$ は、Levy の単級数解によって次のように与えられる³ (図-3)。

$$w_l(x, y) = \frac{P_s a^2}{2\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \sin \alpha_m \xi \cdot (1 + \alpha_m y) \cdot e^{-\alpha_m y} \cdot \sin \alpha_m x \quad (10)$$

ここに、 $\alpha_m = m\pi/a$ 、 ξ : 載荷点の x 座標 = $(1/2)a$

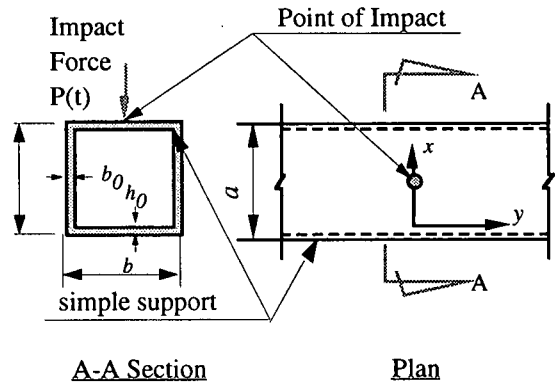


図-3 等価線形バネ、等価質量の算定モデル

式 (10) に基づいて、単位荷重を作用させその時の載荷点での変位 $w_l(x=a/2, y=0)$ から等価バネ値 k_e を求める。すなわち、

$$k_e = P_s / w_l(x=a/2, y=0) \quad (11)$$

一方、等価質量 m_e については、式 (9) と同様の考え方から、下式 (12) で求めることとする。

$$m_e = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-a/2}^{a/2} \rho h_0 \left(\frac{w(x, y)}{w(a/2, 0)} \right)^2 dx \cdot dy \quad (12)$$

ここに、 ρ : 薄板の密度、 h_0 : 薄板の厚さである。

5. Hertz 理論による解との検証

Hertz 理論による解と本提案手法による解との比較を行い、その妥当性を検証する。Hertz 理論による解は、Liao ら⁴の方法を用いて行った。解析は、表-1に示すように、衝撃体の質量と衝突速度を変化させた4ケースであり、その他の解析条件は表-2の通りである。図-4、図-5は、それぞれA-1とA-3の衝撃波形であり、図には柴田らの方法による結果も併せて記載した。なお、衝撃力は梁の弾性係数 (E) と梁高 (h) で、また時間軸は弾性波の梁上下方向伝播速度 (c) と梁高 (h) で無次元化している。

この解析結果では、衝突は大きく分けて3回発生することになるが、特に第一回目の衝突による衝撃波形は三者ともに比較的良く一致している。また、三回の衝突を通じての最大衝撃力は、Hertz による方法を100%とすると、ケースA-1の場合で本方法が92%となっている。このように、本方法が若干小さな値を示しているのは、局部変形の評価時に相対二辺を単純支持と仮定したためであり、設計時などにおいて衝撃荷重の過小評価を避けたいのであれば支持条件を固定にすることも考えられる。

この解析結果のように、Hertz 理論に基づく解と提案手法の解の整合性が良いのは、等価バネや等価質量の評価が妥当であったことを示しているが、一方で、梁の断面が中空であるために生じる局所変形

の影響がそれ程大きくなかったとも言える。そこで次節では、梁自体の剛性に対する局所変形量の大きさが変化するような梁を想定して解析的な検討を試みることにした。

表-1 解析ケース (Series A)

ケース名	衝撃体質量 m_c	衝突速度 v_0
A-1	0.91 (kg)	1.0 (m/sec)
A-2	0.91 (kg)	0.5 (m/sec)
A-3	4.02 (kg)	1.0 (m/sec)
A-4	4.02 (kg)	0.5 (m/sec)

表-2 解析条件

項目	設定条件
梁 (被衝撃体)	
l	0.15 (m)
h	0.01 (m)
b/h	1.0
l/h	15.0
h_r/h	0.2
b_r/h	0.2
E_b	0.22×10^{12} (N/m ²)
ρ_b	0.79×10^4 (kg/m ³)
球 (衝撃体)	
R	0.01 (m)
E	0.22×10^{12} (N/m ²)
ρ	0.79×10^4 (kg/m ³)
v_0	1.0 (m/sec)
等価線形バネ、等価質量	
k_e	9.99×10^7 (N/m)
m_e	6.29×10^{-4} (kg)

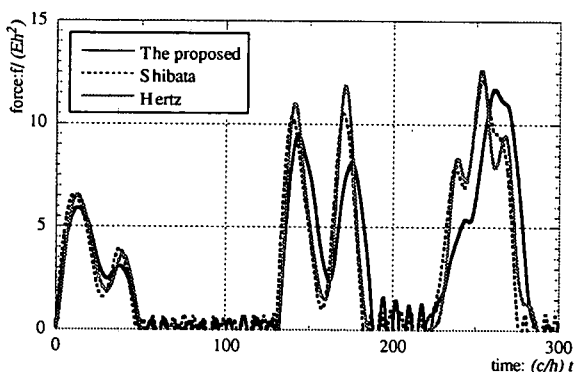


図-4 ケースA-1の衝撃波形

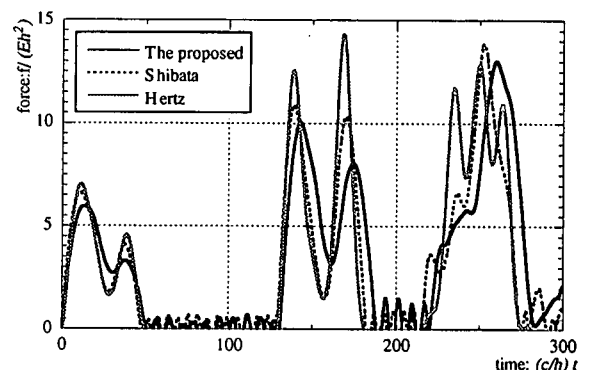


図-5 ケースA-3の衝撃波形

6. 局所変形の影響評価

本節では、局所変形が衝撃力に与える影響を把握し、Hertz の解とどの程度差異が生じるのかを数値解析により検証する。

この比較解析で着目したいのは、梁中央に同一荷重が載荷された場合でも、梁としての剛性に対する局所変形量が大きくなると、局所変形を考慮することの効果が顕著に表れてくることを確認することであり、その影響の程度を定量的に把握することにある。

ここでは、梁の幅 b を少しずつ増加して、梁としての剛性 ($E_b I_b$) を増しながら、同時に局所変形量が増大するようなケース設定を行っている。

表- 3 解析ケース (Series B : 抜粋)

ケース名	b	k_0/k_e
B-006	0.006 (m)	0.0052
B-016	0.016 (m)	0.0895
B-020	0.020 (m)	0.1726
B-024	0.024 (m)	0.2957

梁としての剛性と局所変形量のバランスは、局所変形を考慮しない場合の載荷点での変形量に基づく換算バネ値 ($k_0 = 48 E_b I_b / l^3$) と、局所変形のみによる等価バネ値 (k_e) の比で表現した。

表- 3は、比較解析に用いた解析ケースの抜粋を示している。解析による衝撃波形を図- 6、図- 7、図- 8、図- 9に示す。

これらの図から明らかなように、局所変形が大きくなると、それによる衝撃エネルギーの吸収が顕著に現れるようになり、その影響を見込まないで解析した場合に比べ、かなり小さな衝撃力で済むことがわかる。衝撃力の最大値を、局所変形を見込んだ場合 (Hertz) と見込まない場合について整理した結果が図- 10である。また、局所変形を見込まない Hertz の衝撃力で正規化した結果を図- 11に示す。

この結果、局所変形を見込むことにより大幅な衝撃力の緩和が期待できるのは、局所変形量が梁の変形量の 15%程度までであり、それよりも大きな局

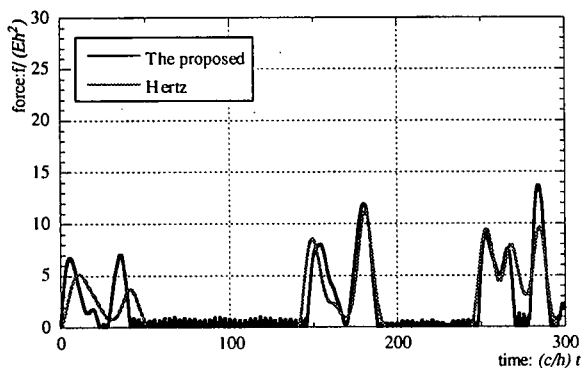


図- 6 ケース B-006 の衝撃波形

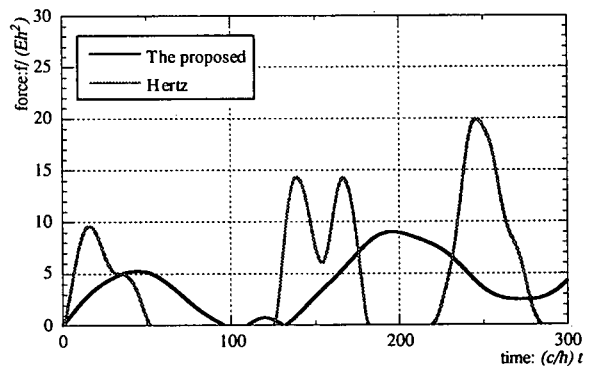


図- 8 ケース B-020 の衝撃波形

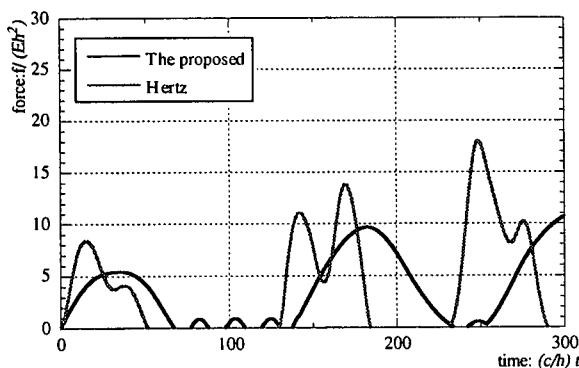


図- 7 ケース B-016 の衝撃波形

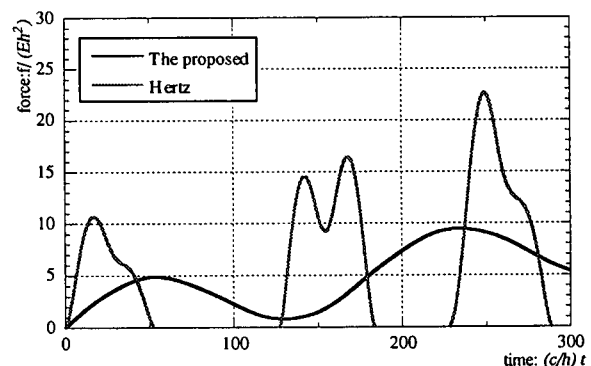


図- 9 ケース B-024 の衝撃波形

所変形が生じてても衝撃力の最大値としては大きな減少が期待できない。こうした効果は、衝撃力の載荷時間と梁や局所変形の変形モードならびに固有周期に依存するため、ただちにすべての梁の衝撃問題に適用できるわけではないが、局所変形が衝撃力緩和に与える影響として理解しておく必要がある。

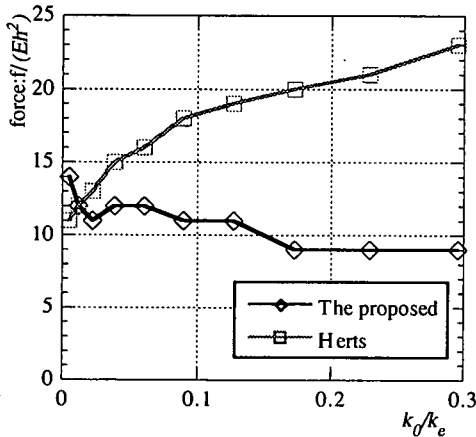


図-10 衝撃力最大値と局所変形

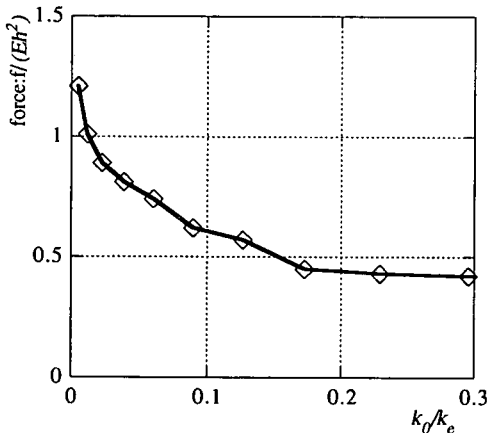


図-11 衝撃力の比と局所変形

7. まとめ

本研究は、薄肉中空断面を有する梁を対象に、比較的大きな局所変形が予想される場合の簡易評価手法について検討を行ったものである。検討の結果、次のようなことが確認された。

① 局所変形が比較的小さなケースでは、Hertz の接触理論による衝撃力評価とほとんど変わらない

い解が求められる。これは、三次元有限要素法に基づいて設定した等価バネ、等価質量による衝撃力の線形化手法ともほぼ同じ結果を与えることが判明した。

- ② 局所変形の影響が大きい断面形状を用いて比較検討を行った結果、衝撃力波形や衝撃力の最大値評価において大きな差が生じることが確認された。
- ③ 局所変形が生じやすい構造を選択し、衝突エネルギーの吸収能力を高めても、本方法により確認できる範囲では、その効果に限界があると考えられる。

上記③に関しては今後の課題として、梁ならびに局所変形の変形モードと固有周期が、衝撃力に与える影響という観点から改めて整理を行う必要があると考える。また、本研究で提案したようなモデル化や、衝撃力の線形化手法の限界についても、衝撃体をもたらすエネルギーや衝撃体の剛性を変化させて検討を行うことが重要と考える。

参考文献

- 1) Timoshenko, S. : Zur Frage der Wirkung eines Stosses auf Einer Balken, Zeitschrift für Mathematik and Physik, Vol. 62, pp.198-209, 1913
- 2) 柴田俊文、三上隆、佐藤昌志、須藤敦史、蕪澤憲吉：局所変形の影響を考慮した梁の衝撃力の一計算法、構造工学論文集、Vol. 44A, pp.1753-1759, 1998
- 3) 土木学会構造工学委員会：構造力学公式集、(社)土木学会、pp.313-376, 1997
- 4) Liao, C. L. and Tsai, J. S. : Dynamic Analysis of Laminated Composite Plates Subjected to Transverse Impact Using a Partial Mixed 3-D Finite Element, Computers & Structures, Vol. 1, pp.53-61, 1994