

(41) 梁と剛球の接触条件を考慮した衝撃荷重の一計算法

A METHOD FOR ESTIMATING IMPACT FORCE CONSIDERING CONTACT CONDITION BETWEEN A BEAM AND AN IMPACTOR

三上 隆\*、柴田俊文\*\*、佐藤昌志\*\*\*、須藤敦史\*\*\*\*

Takashi MIKAMI, Toshifumi SHIBATA, Masashi SATOH and Atsushi SUTOH

- \*工博 北海道大学大学院工学研究科教授 (〒060-0813 札幌市北区北13条西8丁目)
- \*\*北海道大学大学院工学研究科修士課程 (〒060-0813 札幌市北区北13条西8丁目)
- \*\*\*工博 北海道開発局開発土木研究所室長 (〒062-0931 札幌市豊平区平岸1-3)
- \*\*\*\*工博 (株)地崎工業技術開発部 (〒105-0003 東京都港区西新橋2丁目23番1号)

キーワード：局所変形、修正ヘルツ理論、ばね-質量系、有限要素法  
(local deformation, Hertz's law, spring-mass model, finite element method)

1. 序論

衝撃体の梁への接触の応答を明確にするのは構造物の設計上重要であり、その基本的特性の把握は板や殻(シェル)に対しても多くの研究が行われている。通常衝撃解析を行う場合接触部の局所変形と梁の振動を考慮に入れた修正 Hertz 理論を使用する。この理論は非線形項を有し数値計算時に煩雑性を伴うため、ばね-質量系にモデル化して解析を行う例が多数報告されている。しかし局所変形に相当するばね定数(等価剛性)及び質量(等価質量)の導出を明瞭にした研究は少ない。そこで本研究では有限要素法を用いた等価剛性及び等価質量の一導出方法を提案し、剛球と梁の分離・付着条件を考慮に入れ、適用性・数値妥当性の比較を行った。また微分方程式をモード解析法を用いて解き、有限要素法の解と比較することで解析方法の拡張性を検討した。

2. 解析方法

質量  $m_c$ 、速度  $v_0$  の剛球が両端単純支持梁に梁中央に衝突する場合を考える(図-1)。局所変形の等価剛性を  $k_1$ 、等価質量を  $m_1$  とし、衝撃力を集中荷重と仮定して作用するものとした。

Bernoulli-Euler 梁理論に基づき梁を有限要素法で離散化し、衝突時には剛球と質点が付着すると考えるとすれば運動方程式及び衝撃力  $f$  は以下のように示

される。ただし減衰の影響は無視できるものとする。

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{0\} \quad (1)$$

$$f = -(m_1 + m_c)\{\ddot{u}_1\} \quad (2)$$

ここで  $[M]$  は質量マトリックス、 $[K]$  は剛性マトリックス、 $\{u\}$  は変位ベクトル、 $t$  は時間、そして  $u_1$  は等価質量の変位である。式(1)を分離・付着条件(各時刻の変位・速度)を考慮に入れ Newmark  $\beta$  法を用いて解析を行った。各状態の条件は以下のように分類できる。

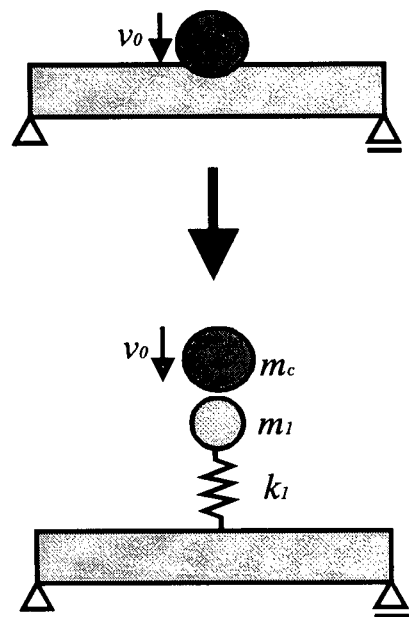


図-1 ばね-質量系へのモデル化

〈1〉初期条件

剛球衝突時に等価質量と剛球が一体となって運動するため等価質量の初期速度は剛球の初速度 $v_0$ を用いて運動量保存則より次式で表される。

$$\dot{u}_{1,t_0} = m_c v_0 / (m_1 + m_c) \quad (3)$$

〈2〉分離時の条件

剛球分離時には衝撃力が0となるため等価質量の加速度も0となる。加速度0となった時刻の変位及び速度を条件として分離時は等価質量 $m_1$ のみで解析を行う。分離後の剛球の速度は分離直前(時刻 $t_1 - \Delta t$ )の速度 $\dot{u}_{1,t_1 - \Delta t}$ を用いて以下のように示される。

$$v_{t_1} = \left\{ (m_1 + m_c) \dot{u}_{1,t_1 - \Delta t} - m_1 \dot{u}_{1,t_1} \right\} / m_c \quad (4)$$

〈3〉付着時の条件

分離後剛球は式(4)の初速度で等速直線運動を行う。等価質量と剛球の相対変位が0となった時刻 $t_2$ での各値を付着時の条件とする。付着時の等価質量の速度は付着直前(時刻 $t_2 - \Delta t$ )の値を用いて

$$\dot{u}_{1,t_2} = \left\{ m_1 \dot{u}_{1,t_2 - \Delta t} + m_c v_{t_1} \right\} / (m_1 + m_c) \quad (5)$$

で表される。付着後の等価質量は $(m_1 + m_c)$ として解析を行う。

次に等価剛性と等価質量の近似的な導出方法を示す。ここでは静的な三次元有限要素法を用いる。剛球の接触点に対応するスパン中央に上下から荷重 $P$ を作用させる(図-2)。マトリックス表示すると次式となる。

$$[K_s] \{u_s\} = \{P_s\} \quad (6)$$

等価剛性 $k_1$ は荷重載荷点の変位 $\delta$ を用いて次式より得られる。

$$k_1 = P / \delta \quad (7)$$

一方等価質量は式(6)の解 $\{u_s\}$ とモード解析法の等価質量の算定法を援用して導出する。モード解析法によれば $n$ 次の等価質量は次式で定義される。

$$M_n = \{\phi_n\}^T [M_s] \{\phi_n\} \quad (8)$$

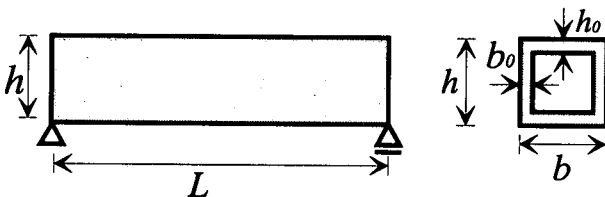


図-2 梁の横断面図

表-1 梁の諸元

	梁-A	梁-B
$b/h$	$0.1 \times 10$	0.50
$L/h$	$0.15 \times 10^2$	$0.10 \times 10^2$
$h_0/h$	0.20	0.10
$b_0/h$	0.20	0.10

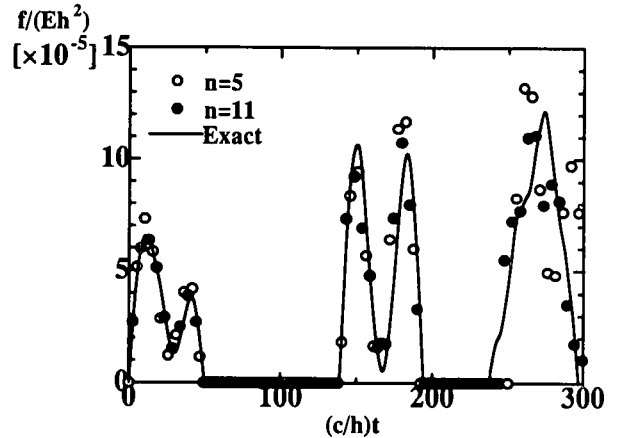


図-3 モード次数の影響

ここで $\{\phi_n\}$ は $n$ 次固有モード、 $[M_s]$ は質量マトリックスである。式(6)から得られる $\{u_s\}$ を $\delta$ で規格化し固有モードに使用して等価質量 $m_1$ を求める。

$$m_1 = \{u_s\}^T [M_s] \{u_s\} / \delta^2 \quad (9)$$

なお本研究では20節点の立体要素を、質量マトリックスは集中質量マトリックスを使用した。

3. 数値計算例

以下に上述した方法で求めた等価剛性及び等価質量を用いた解析結果を示す。数値妥当性の検討は修正 Hertz 理論を有限要素法及び Newton-Raphson 法で求めた時系列変化(以下便宜的に厳密解と称する)と比較して行った。図-2に示す長さ $L$ の中空断面の梁で二種類の諸元(表-1)を用い、次に示す無次元化したパラメータを用いて結果を整理する指標とした。

$$v = v_0 / c \quad m_a = m_c / M_0$$

$$k = k_1 / k_0 \quad m = m_1 / m_0$$

ここで $v$ 、 $m_a$ 、 $k$ 、 $m$ は順に剛球の初期速度、剛球の質量、等価剛性、等価質量を表すパラメータである。また $c$ は縦波の速度、 $M_0$ は梁の全質量である。 $k_0$ 、 $m_0$ はそれぞれ梁の曲げ変形に対する等価剛性及び等価質量で次式で示される。

$$k_0 = 48EI / L^3 \quad (10)$$

$$m_0 = 17M_0 / 35 \quad (11)$$

ここで  $E$  はヤング係数、 $I$  は断面二次モーメントである。 $k$ 、 $m$  はそれぞれ以下の値を用い、また結果は衝撃力を  $Eh^2$  で除し時間を  $c/h$  で乗じて無次元化して示した。破線は厳密解、実線がここで提示した方法の結果である。

$$\text{梁-A: } k = 0.88 \times 10^2 \quad m = 0.79 \times 10^{-2}$$

$$\text{梁-B: } k = 0.20 \times 10^2 \quad m = 0.14 \times 10^{-1}$$

最初にモード解析法の適用性の確認を行う。解に影響を与えるモードの次数  $n$  を調べるため梁-A (図-4(a)の諸元) を用いて  $n=5$  及び  $n=11$  として解析を行った (図-3)。図より次数を 11 以上に設定すると有限要素法の解とほぼ一致することがわかる。次に本導出方法を使用した数値妥当性を検討するため有限要素法を用いた結果を示す。

図-4 は複数回の衝撃を繰り返す梁-A の結果で (a) と (b) 及び (c) と (d) は剛球の質量を一定にして初期速度を変化させている。いずれも分離・付着の時刻、衝撃力のピーク値等全体的挙動はよく再現されているが速度が大きい場合は衝撃力の最大値に差異が見られる。これは静的解析より求めた等価剛

性及び等価質量を動的解析に用いたことに起因するものと思われ、時間影響の導入の必要性を示唆している。次に剛球衝突後衝撃が一回のみ発生する梁-B の結果を図-5 に示す。図-4 と同様、(a) と (b)、(c) と (d) は剛球の質量を一定として初期速度を変化させたときの結果である。この場合も剛球の諸元によって衝撃時間・衝撃力のピーク値等衝撃波形の形状の細部に差が生じていることが確認できる。しかし衝撃力の基本的特性の理解に対してこの近似解法は実用的に満足していると考えても不備はないであろう。

等価剛性及び等価質量の影響を調べた結果を図-6 に示す。梁-A (図-4(a)) について (a)、(b) は等価質量を一定として等価剛性をそれぞれ 10 倍、1/10 倍としたもので (c) 及び (d) は等価質量を 10 倍、1/10 倍と変化させたものである。等価剛性の過大な評価及び等価質量の過小な評価は衝撃力のピーク値を大きめに、衝撃時間は短めの結果を与える傾向にあることが確認でき、等価剛性は衝突回数にも大きく影響することがわかる。

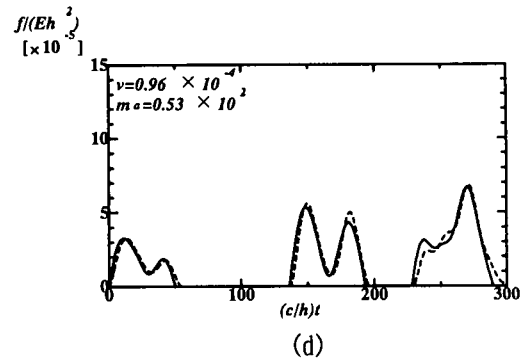
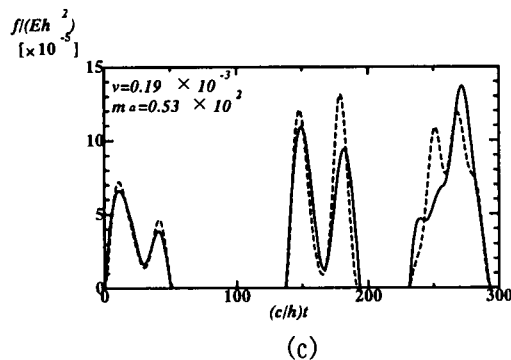
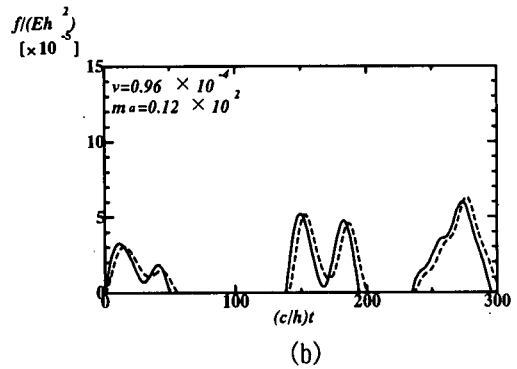
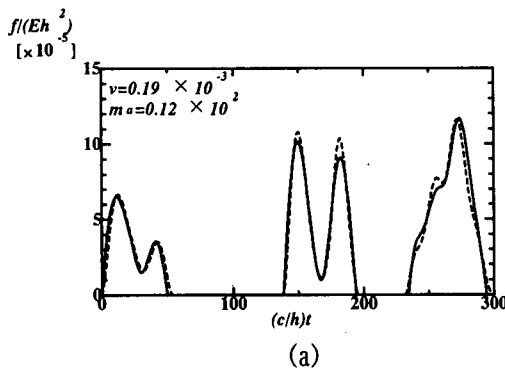


図-4 梁-A の衝撃力波形

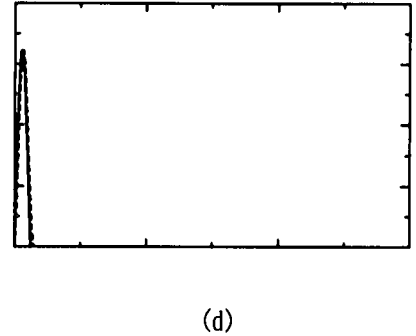
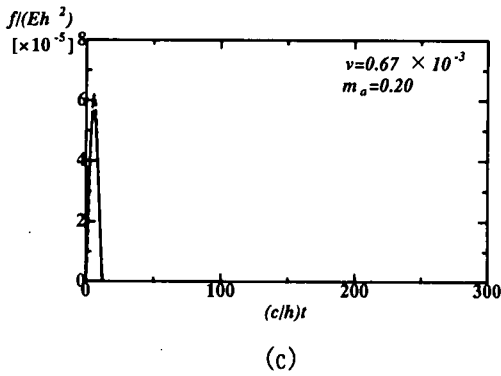
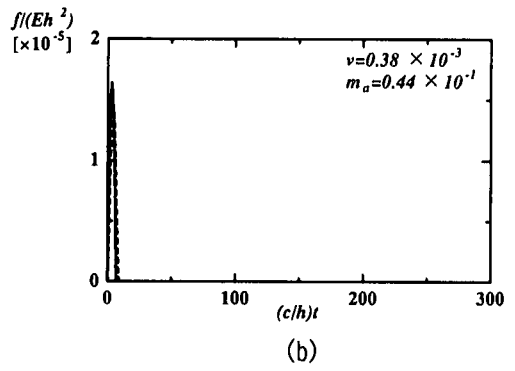
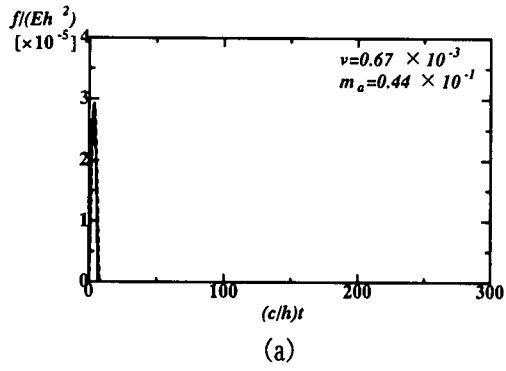


図-5 梁-B の衝撃力波形

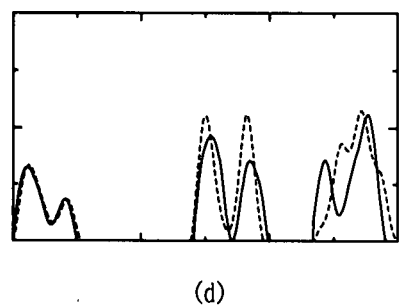
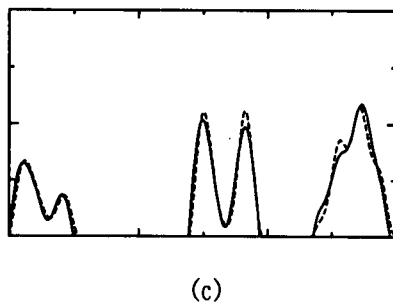
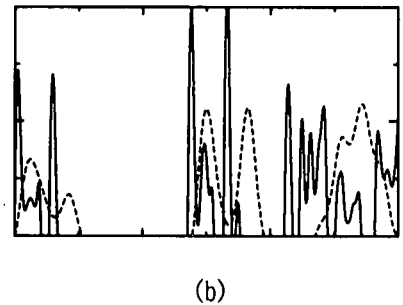
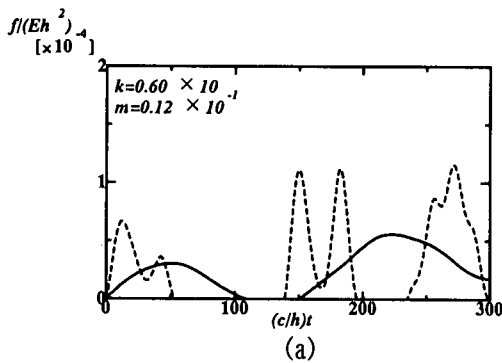


図-6 衝撃力波形に及ぼす等価剛性と等価質量の影響 (梁-A)

#### 4. 結論

- 〈1〉モード解析法を用いた解析方法の適用性が明らかになった。
- 〈2〉本研究で提示した近似解法では衝撃力の時刻歴

- 波形の再現に対しほぼ妥当な結果を示している。
- 〈3〉等価剛性の過大評価及び等価質量の過小評価は、衝撃力のピーク値に対して大きめの結果を、衝撃時間に対しては短めのに結果を与える。