

## (40) 時刻歴の重みを考慮した梁に作用する衝撃力の同定

AN IDENTIFICATION OF IMPACT LOAD WITH TIME-VARYING COEFFICIENT

柴田俊文\*、須藤敦史\*\*、三上 隆\*\*\*

Toshifumi SHIBATA, Atsushi SUTOH and Takashi MIKAMI

\*北海道大学大学院工学研究科修士課程 (〒060-0813 札幌市北区北13条西8丁目)

\*\*工博 (株)地崎工業技術開発部 (〒105-0003 東京都港区西新橋2丁目23番1号)

\*\*\*工博 北海道大学大学院工学研究科教授 (〒060-0813 札幌市北区北13条西8丁目)

キーワード: カルマンフィルタ、マルコフ過程、時系列変化

(Kalman filter, Markov process, time series)

## 1. 概要

梁の衝撃挙動を明白にすることは安全性の検討において重要である。通常入力値である衝撃荷重は簡易な形状を仮定して解析を行うが、衝撃力波形の正確な評価は設計上不可欠である。これまでも時系列に関する変換行列を用いたカルマンフィルタを適用して応答波形から入力波形の同定を行ってきたが<sup>1)</sup>、良好な推定精度を得るには改善すべき課題も多い。

一方、時系列に変化する値を同定する際に観測値に時間に対する重みを考慮して解析する「漸化形最小二乗法」<sup>2)</sup>の研究例が報告されているが、変換行列に時間の影響を導入した知見は少ない。変換行列は未知量と観測値との変化率を直接的に表し、パラメータの変化に対する最適解の安定性を知る上で重要な意味を有し、感度解析の研究分野での発展も顕著である<sup>3)</sup>。また、観測点配置の評価として拡張カルマンフィルタでの研究例も多数報告されている<sup>4,5)</sup>。そこで本研究では変換行列に過去の影響を縮小する重みを乗じて観測値の影響を変化させ、前者との理論・解析面での比較を行った。

## 2. 理論

## 2-1. 変換行列の導出

カルマンフィルタは以下の状態方程式及び観測方程式で構成されている<sup>6,7)</sup>。

$$\frac{dx_t}{dt} = f(x_t, t) + G_t W_t \quad (1)$$

$$z_t = h(x_t, t) + V_t \quad (2)$$

ここで $x_t$ は状態ベクトル、 $G_t$ は変換行列、 $W_t$ はシステム雑音ベクトル、 $z_t$ は観測ベクトル、 $V_t$ は観測雑音ベクトルである。今衝撃荷重を状態量とし、有限要素法を用いるため状態方程式が定常性を示すものと仮定する。式(1)を離散表示すると次式となる。

$$\hat{x}_{t+1} = I \hat{x}_t + W_t \quad (3)$$

ただし $I$ は単位行列を表す。式(3)のように状態方程式を定常と仮定したため、カルマンフィルタの状態量推定アルゴリズムでは観測方程式を各推定状態量で偏微分した変換行列を求めなければならない。そこで式(4)に示すように影響係数法により近似的に求める。

$$\frac{\partial h_i(x_{jt})}{\partial x_j} = \frac{h_i(x_{jt} + \Delta x_j e_j) - h_i(x_{jt})}{\Delta x_j} \quad (4)$$

ここで $\Delta x_j$ は $x_j$ の微小増分、 $e_j$ は $j$ 番目の要素が1の単位ベクトルである。

式(4)の変換行列をマルコフ過程( $m$ 重マルコフ連鎖)<sup>8)</sup>の考えに基づき2種類用意する。

$$H_t = \{0, \dots, 0, H_{t-m+1}, \dots, H_t, 0, \dots, 0\} \quad (5)$$

$$H_t = \{0, \dots, 0, H_t, 0, \dots, 0\},$$

$$\{0, \dots, 0, H_{t-1}, 0, \dots, 0\},$$

$$\dots, \{0, \dots, 0, H_{t-m+1}, 0, \dots, 0\}$$

(6)

変換行列は未知量と観測量の関係が非線形の場合は依存して変化するが、線形である場合には未知量の値に依らず一定となる。式(5)、(6)をそれぞれ変換行列(1)、変換行列(2)とする。

## 2-2. 評価関数の比較

漸化形最小二乗法の評価関数  $J$  は次式で示される。

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t \beta_{t,i} (z_i - H_i \hat{x})^T R_i^{-1} (z_i - H_i \hat{x})$$

(7)

評価関数中の  $\beta_{t,i}$  は  $0 < \lambda_j < 1$  の積として定義する。

$$\beta_{t,i} = \prod_{j=i+1}^t \lambda_j, \quad \beta_{t,i} = \lambda_t \beta_{t-1,i}, \quad \beta_{t,t} = 1$$

(8)

通常  $\lambda_j$  の値は 0.95~0.99 に設定され、小さくするほど観測値の重みは指数関数的に減少し過去の情報が縮小される。 $\lambda_j$  は観測値の価値を減退させる速度を支配することから忘却係数と呼ばれている。ここで  $\lambda_j = 1.00$  とすると通常の最小二乗法を表し、時間変化に対する重みはすべて等価になる。忘却係数  $\lambda_j$  の決定に関しては赤池ベイズ情報量規準 (ABIC) を用いた研究がある<sup>9)</sup>。

式(7)を最小にする  $\hat{x}$  は評価関数の変分値を 0 とすることで得られる。

$$\hat{x} = \Theta_t^{-1} \xi_t \quad (9)$$

ここに式(9)の各変数は次式で示される。

$$\Theta_t = \sum_{i=1}^t \beta_{t,i} H_i^T R_i^{-1} H_i, \quad (10)$$

$$\xi_t = \sum_{i=1}^t \beta_{t,i} H_i^T R_i^{-1} z_i \quad (11)$$

式(8)の関係と式(10)、(11)を用いると次式が得られる。

$$\Theta_t = \lambda_t \Theta_{t-1} + H_t^T R_t^{-1} H_t \quad (12)$$

$$\xi_t = \lambda_t \xi_{t-1} + H_t^T R_t^{-1} z_t \quad (13)$$

式(12)、(13)を式(9)に代入して整理すると式(14)が得られる。

$$\hat{x}_t = \hat{x}_{t-1} + \Theta_t^{-1} H_t^T R_t^{-1} (z_t - H_t \hat{x}_{t-1})$$

(14)

これに対し各時刻の観測値をベクトルで表し各要素に時刻歴変化の重みを乗ずるとすると、評価関数は次式で表される。

$$J = \frac{1}{2} (z_t - H_t \gamma)^T R_t^{-1} (z_t - H_t \gamma)$$

(15)

ここで  $\gamma$  はベクトル量で次式で表され変換行列に直接乗ずるものとする。

$$\gamma = \{\gamma_{s1}, \gamma_{s2}, \dots, \gamma_{st}, \dots, \gamma_{sn}\} \quad (16)$$

式(15)を最小にする  $\hat{x}$  は評価関数の変分値を 0 とすることで求められる。

$$\hat{x}_t = x_t + \Lambda^{-1} (H_t \gamma)^T R_t^{-1} (z_t - H_t \gamma)$$

(17)

ここで上式の変数は以下のように表される。

$$\Lambda = \left( (H_t \gamma)^T R_t^{-1} H_t \gamma \right) \quad (18)$$

時間の考慮の仕方が異なっているため式(10)では  $\Theta_t$  中で忘却係数を乗じて総和をとっているが、式(15)では時間に関する係数がベクトル量で表される。

式(16)で表される重みを変換行列(1)(2)にそれぞれ乗じて解析を行い、重みを考慮に入れていない変換行列とで比較を行う。

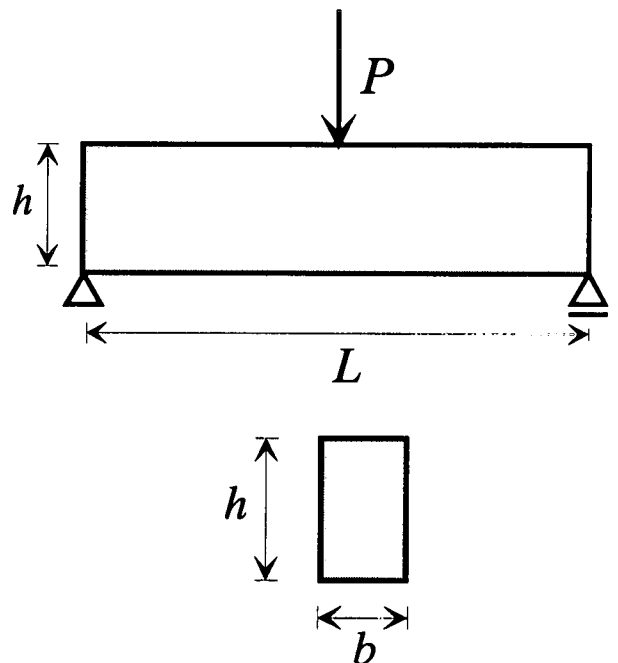


図-1 梁の横断面図

### 3. 解析

3-1. 諸元  $L/h$  (梁の長さ/高さ) = 6.67、 $b/h$  (梁の幅/高さ) = 0.52、 $E/G$  (弾性係数/せん断弾性係数) = 2.4、 $c$  (縦波の速度) =  $0.35 \times 10^6$  (cm/sec) の両端支持梁の中央に三角形の形状を有する衝撃荷重が作用するとし、梁中央のひずみの値より衝撃荷重の同定を行う(図-1)。梁は Timoshenko 梁理論に基づき有限要素法で離散化し、対称性より片側半分を 20 要素に分割して解析を行った。時間積分法は無条件安定の Newmark  $\beta$  法を採用した。 $P$  (推定誤差の共分散) = 100、 $R$  (観測誤差の分散) =  $1.0 \times 10^{-6}$ 、 $\hat{x}_0$  (初期推定値) = 0 の事前情報を用い、また正規乱数を観測誤差として観測波形に付加した。式(9)で表される重みは  $\gamma_{st-1} = \lambda_s \gamma_s$  とし、 $\lambda_s = 0.65$  とし解析を行った。

#### 3-2. 結果

結果を以下に示す。縦軸に衝撃荷重、横軸に時間をそれぞれ無次元化して示す。破線がモード解析より求めた厳密解、実線が同定した値である。右側の

図に観測誤差を付加した結果を示す。なお、ノイズの分散は  $1.0 \times 10^{-9}$  とした。図-2 の (a) と (b) に通常の変換行列(1)の結果を、また (c) と (d) に時間の重みを乗じた結果を示す。なお式(5)の影響時間数は  $m=5$  を用いた。(a)、(c) より平滑化の性質の強い変換行列(1)に重みを考慮に入れたことで不連続点の同定も改善されていることがわかる。また(b)、(d) より観測誤差を考慮した場合にもより良好な結果が得られているのが確認できる。

次に変換行列(2)の結果を図-3 に示す。(a) と (b) に通常の変換行列(2)の結果を、(c) と (d) に重みを乗じた結果をそれぞれ示す。ここで影響時間数は  $m=10$  を用いた。重みを考慮しない場合のほうが変換行列(1)のケースとは逆に良好な結果を得ているが、観測誤差付加時には時間の係数を乗じることで良好な同定値を得ている。一般に同定値の適応性とノイズの除去性はトレードオフの関係にあり、変換行列(2)では後者の性質が勝っていることが確認できる。

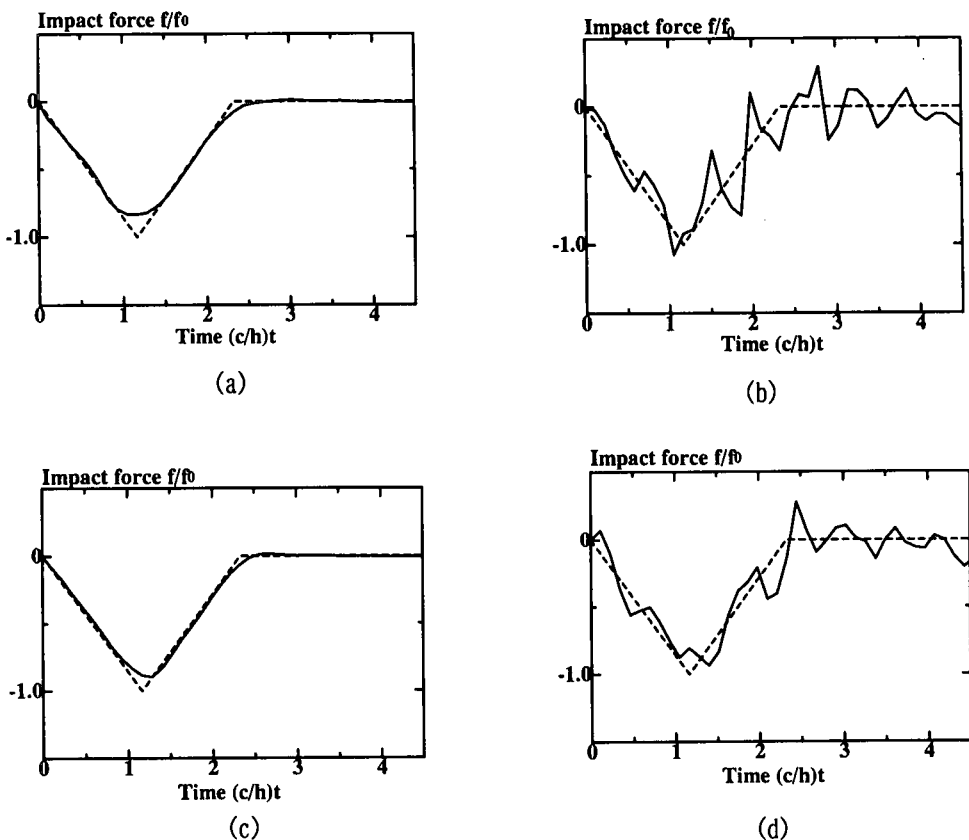


図-2 変換行列(1)使用時の結果

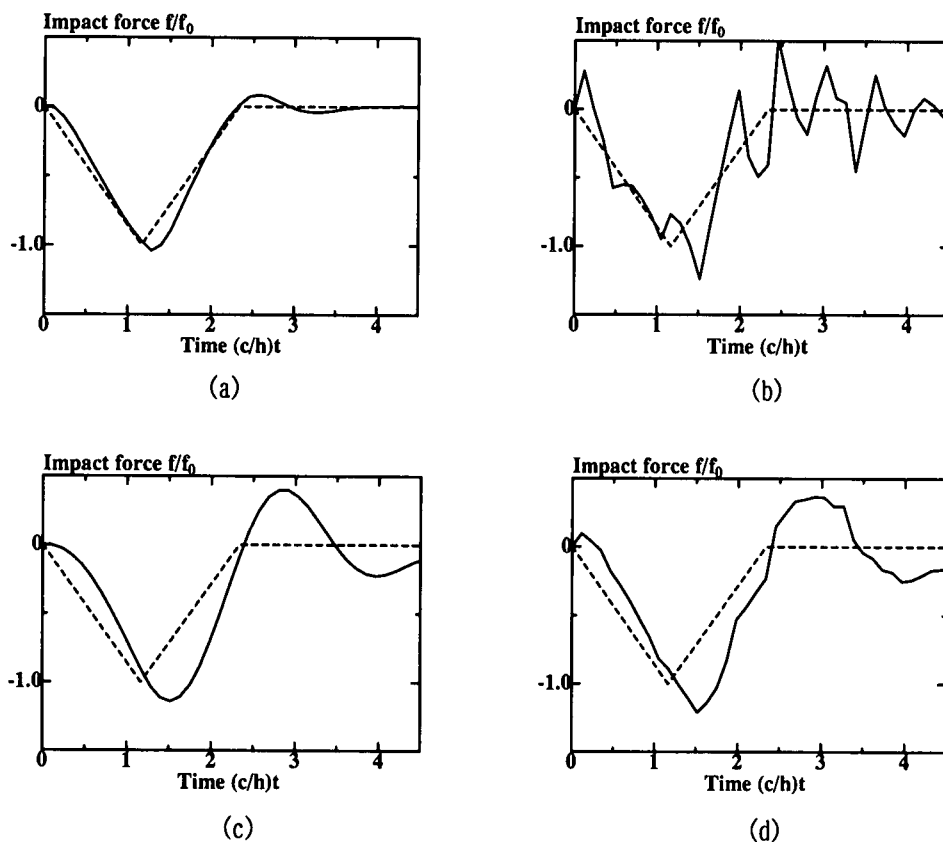


図-3 変換行列(2)使用時の結果

#### 4. 結論

変換行列(2)では時間に対する重みを考慮することによって収束性の低下を招いたが、雑音除去には優れていることが確認できた。また、変換行列(1)では雑音の有無に関わらず良好な結果が得られた。前者は重みが同定値の適応性を下げているのに対し、後者は忘却機能を導入することで同定値の適応性と雑音除去性をバランス良く満足させる結果になることが確認できた。

#### 参考文献

- 1) 柴田俊文、三上隆、須藤敦史、佐藤昌志：  
Timoshenko 梁に作用する横衝撃荷重の予測、土木学会第 52 会年次学術講演会、1997
- 2) 佐藤忠信：地盤工学における逆解析(3. 逆解析の手法)、土と基礎、pp. 67-72、1996、5月号
- 3) 山川宏：最適化とデザイン、培風館、1993
- 4) 門田俊一、齊藤悦郎、和久昭正、後藤哲雄：繰り返し拡張カルマンフィルタによる異方性岩盤物性の同定と地下空洞計算管理への適用、土木学会論文集、第 406 号、pp. 107-116、1989
- 5) 村上章、長谷川高士：Kalman フィルター有限要素法による逆解析と観測点配置、土木学会論文集、第 388 号、1987
- 6) R. E. Kalman : A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems、Journal of Basic Engineering、Transactions of the ASME、pp. 35-45、1960、March
- 7) 星谷勝、齊藤悦郎：建設技術者のためのデータ解析と応用 カルマンフィルタを中心として、鹿島出版会、1991
- 8) 森村英典、高橋幸雄：マルコフ解析、日科技連
- 9) 本城勇介：地盤工学における逆解析(5. 逆解析における事前情報とモデルの選択(その 1))、土と基礎、pp. 63-68、1995、7月号