

(10) 拡張カルマンフィルタによる梁に作用する衝撃荷重の同定

AN IDENTIFICATION OF IMPACT LOAD ON BEAMS BY EXTENDED KALMAN FILTER

桑邊和幸*, 三上隆**, 須藤敦史***, 佐伯昇**

Kazuyuki KUWABE, Takashi MIKAMI, Atsushi SUTOU and Noboru SAEKI

* (株) 日本工営(〒102 東京都千代田区麹町5丁目4番地)

**工博 北海道大学教授 工学部土木工学科(〒060 札幌市北区北13条西8丁目)

***工博 (株) 地崎工業 技術開発部(〒105 東京都港区西新橋2-23-1)

キーワード: 衝撃荷重, カルマンフィルタ, Timoshenko 梁理論, 有限要素法

(impact load, Kalman filter, Timoshenko beam theory, finite element method)

1.はじめに

梁や板などの構造部材の衝撃挙動に関する研究が盛んに行われている¹⁾。衝撃応答の理論解析において、外力として作用する衝撃力の大きさと時間的変動は、基本的な応答特性の把握を目的にするため簡単な形で仮定される場合が多い。しかし、構造物の安全性の検討を行うためには、構造物に作用する衝撃力の正確な評価が重要となる。そこで本研究では、入力としての衝撃力と出力としての応答値(変位、ひずみ、加速度)を確率過程を用いてとらえ、パラメータ同定などに有効な拡張カルマンフィルタ^{2,3)}を適用し、出力波形から衝撃力波形を導く手法の検討を行ったものである。数値解析では両端単純支持された Timoshenko 梁を取り上げ、手法の適用可能性・有効性を明らかにする。

2.カルマンフィルタ

本解析において、パラメータ同定には、確率論に基づくカルマンフィルタを用いている。そこで、確率的な最適化手法の基本的な考え方を説明する。

確率論的手法では、同定パラメータは分布する値とし、その特性は平均と分散で表されるものであり、かつ事前情報が得られていると定義している。同定パラメータは分布する値の平均値とし、事前情報ではその初期推定値と初期推定誤差の共分散、加えて観測値の誤差分散を与える。次に、観測値を得ることにより事前情報による推定値の分布を更新させ、事後の分布を推定するものである。

より理解を深めるため、確率的な最適化手法と確定的な最適化手法の評価関数を比較することで説明を行う。一般的に確定的な最適化手法としては最小自乗法などが挙げられる。また、カルマンフィルタはベイズの推定を漸化的なアルゴリズムとして構成したものである。そこで、ここでは確定的な最適化手法の説明については最小自乗法を、確率的な最適化手法の説明についてはベイズの推定を用いる。以下、評価関数を用いて説明する。

確定的な最適化手法(最小自乗法)に用いられる評価関数を求める。同定するパラメータ x と観測値 z が線形関係で表されるものとする

$$z = Hx \quad H(m \times n) : \text{変換行列(既知)} \quad (1)$$

m が n より大きい場合、すなわち観測値の数が未知量の数より多い場合には式(1)のすべての条件を満たすことができないため、次の評価関数を定めることとする。

$$\theta_1 = \frac{1}{2}(z - Hx)^T W (z - Hx) \quad (2)$$

ここで $W(m \times m)$ は重み行列であり、観測値の重要度や信頼度に基づいて設定される値である。したがって、式(2)を最小にする x の値が同定値となる。

確率論的手法(ベイズの推定)に用いられる評価関数を求める。この場合、同定するパラメータに関する事前情報を与える必要があり、またこのことで観測値の数が未知量の数より少ない場合についての同定も可能となる。事前情報は、その統計的な性質が正規分布で与えられるものとし、次式のように平均値が \bar{x} 、推定誤差の共分散が P であるとする。

$$E(x) = \bar{x} \quad E[(x - \bar{x})(x - \bar{x})^T] = P \quad (3)$$

ノイズの含まれた m 個の観測値が m 次元のベクトル z で表され、未知量 x と次式の関係があるものとする。

$$z = Hx + v \quad (4)$$

ここで、 v は m 次元の観測誤差を表すベクトルで x とは無相関であるとする。 v の確率的な特性は正規分布で表されるものと仮定し、次式のように平均 0、共分散行列を $R(m \times m)$ とする。

$$E(v) = 0 \quad E[vv^T] = R \quad (5)$$

上記の事前情報と観測情報より評価関数は条件つき確率より求められ、次式となる。

$$\theta_2 = \frac{1}{2} \left\{ (x - \bar{x})^T P^{-1} (x - \bar{x}) + (z - Hx)^T R^{-1} (z - Hx) \right\} \quad (6)$$

したがって、式(6)を最小にする x が同定値となる。式(6)は、右辺の第 1 項は事前情報を表し、第 2 項は事後情報(観測情報)を表している。式(2)の W を R^{-1} と置き換え、事前情報の項をつけ加えると式(6)と等しくなることがわかる。したがって、確率論的手法は、確定論的手法に同定パラメータの事前情報と観測値両方の誤差を定量的に考慮したものであることがわかる。

3. 解析の諸元

解析に用いた供試体は両端単純支持梁とし、供試体諸元は $h/L = 0.15, b/h = 0.52$ である。ここで h は梁の高さ、 b は梁の幅を表す。梁の解析には有限要素法を用い、要素分割は左右対称であるため梁の半分について行い、20 分割した。

衝撃荷重として、 $f = \sin \pi(ct/0.6125L)$ の \sin 荷重が梁の中央に作用するものと仮定した。ここで f は荷重、 c は縦波の速度、 L は梁の長さ、 t は時間を表す。観測データは、上記の \sin 荷重を用いて順解析を行い、変位、ひずみ、加速度の応答をあらかじめ求め、これらのデータに平均 0 の正規乱数をノイズとして加え作成した。

剛性マトリックス、質量マトリックスは Timoshenko 梁の理論によるものを用いた。

時間積分法には高次の振動を抑制するため数値的減衰のある Newmark 法 ($\alpha = 0.6, \beta = 0.3025$) を用いた。時間刻み Δt は $(c/L) \Delta t = 0.0175$ とした。

4. 解析結果

解析で検討した項目は、大きく分けて観測データの時間間隔と数値解析における時間積分法の時間刻みが等しい場合と異なる場合の 2 つである。ここで時間刻みの異なる場合の同定は、時間積分法の収束条件の時間刻みより、得られる観測データの時間間隔が大きい場合を想定した。この場合、荷重の同定値間を直線で補間し擬似的に荷重データを作成して同定を行った。

観測データの時間間隔と時間積分法の時間刻みの等しい場合には、観測データにノイズが含まれる場合の同定と観測点数が同定結果に与える影響を検討した。時間刻みの異なる場合には、観測データの時間間隔が時間積分法の時間刻みの 2~5 倍で得られた場合について、観測データにノイズが含まれない場合と含まれる場合について同定を行った。

4.1. 観測データの時間間隔と時間積分法の時間刻みの等しい場合

同定に用いた観測データを図 1~3a' に、荷重の同定結果を図 1~3a に示す。ここで、図は無次元化して表しており、 E は弾性係数、 I は断面 2 次モーメント、 w は変位、 ϵ はひずみ、 a は加速度、 f_0 は有限要素に用いた荷重の最大値を表

す。また、観測データは梁の中央で計測され、ひずみデータについては梁の中心から $h/6$ 下方で計測されるとした。

変位データを用いた場合については、観測データに含まれるノイズの分散が 1.0×10^{-16} (125.3%, 5.8%)¹ まででは良好な同定結果を示している(図 1)。ここで*1内の値は、真値に対するノイズの値を%表示したものであり、ノイズの多く含まれている時刻の観測データに着目している。最初に時刻 $(c/L)t=0.1225$ 、2 つ目に時刻 $(c/L)t=0.7175$ の点での値を示している。荷重同定に用いたカルマンフィルタの初期入力値は、初期推定誤差の共分散 $P=50$ 、観測値の誤差分散 $R=1.0 \times 10^{-6}$ である。 R の値を固定させて P の値を変化させてみたが、 P の値が 50 よりも小さい場合初期推定の誤差の影響が残り、50 よりも大きい場合には、観測データにノイズの含まれない場合、真値へ収束するが、観測データにノイズが含まれるとノイズの影響を受けやすくなった。

ひずみデータを用いた場合については、観測データに含まれるノイズの分散が 1.0×10^{-14} (71.8%, 12.0%)¹ まででは良好な同定結果を示している(図 2)。カルマンフィルタの初期入力値として、 $P=5$ 、 $R=1.0 \times 10^{-6}$ を用いた。この場合にもカルマンフィルタの初期入力値は、変位のデータと同様な傾向がみられた。

加速度データを用いた場合については、観測データに含まれるノイズの分散が 1.0×10^2 (152.5%, 50.2%)¹ まででは良好な同定結果を示している(図 3)。初期入力値は $P=10$ 、 $R=1.0 \times 10^3$ である。カルマンフィルタの初期入力値による影響を変位データの場合と同様の方法で調べてみたが、 P の値が 10 よりも小さい場合初期推定の誤差の影響が残り、大きい場合、観測データにノイズが含まれる、含まれないに係わらず、 P の値を変化させても同定値に違いがなかった。

観測点が梁の中央とそこから $0.1L, 0.2L, 0.3L, 0.4L$ の計 5 点で計測される場合の同定結果を図 4~6 に示す。観測データに含まれるノイズは観測点 1 点で同定した場合と同様の分散の値を用い、変位データは観測データのノイズの分散が 1.0×10^{-16} 、ひずみデータは 1.0×10^{-14} 、加速度データは 1.0×10^2 である。また、カルマンフィルタの初期入力値も観測点 1 点で同定した場合の値を用い、変位データを用いた同定の場合、 $P=50$ 、 $R=1.0 \times 10^{-6}$ とし、ひずみデータの場合、 $P=5$ 、 $R=1.0 \times 10^{-6}$ とし、加速度の場合、 $P=10$ 、 $R=1.0 \times 10^3$ とした。

観測点数 1 点による同定結果の図 1~3 と観測点数 5 点による同定結果の図 4~6 を比較すると、観測点数に同定結果が依存していないことがわかる。

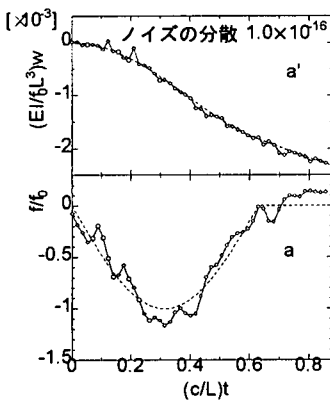


図 1. 変位データによる同定結果

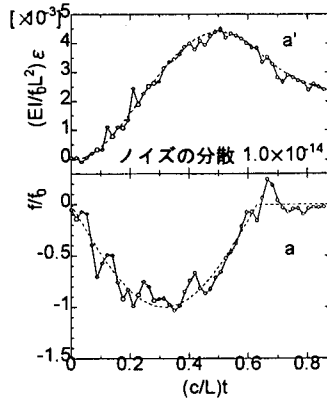


図 2. ひずみデータによる同定結果

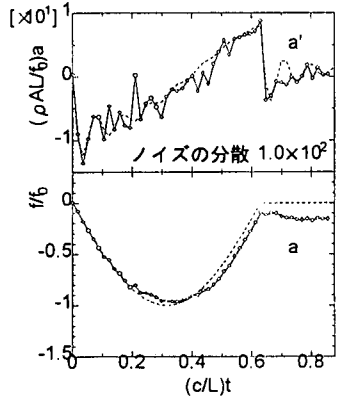


図 3. 加速度データによる同定結果

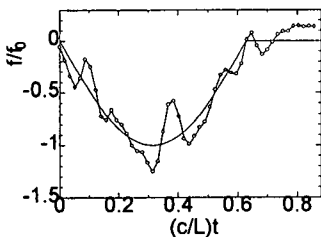


図 4. 変位データ 5 点による同定結果

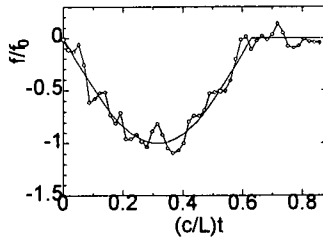


図 5. ひずみデータ 5 点による同定結果

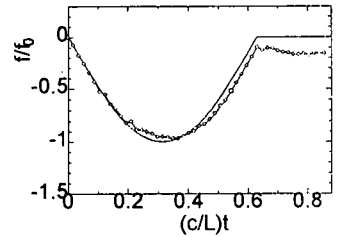


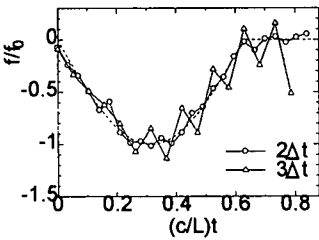
図 6. 加速度データ 5 点による同定結果

4.2. 観測データの時間間隔と時間積分法の時刻刻みの異なる場合(直線補間を用いた場合)

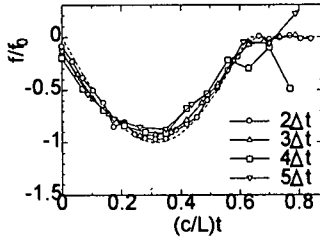
変位データを用いた場合、観測データにノイズが含まれないと観測データの時間間隔が $2, 4, 5 \Delta t$ のときで $P=500, R=1.0 \times 10^{-6}$ 、 $3 \Delta t$ のときは $P=1000, R=1.0 \times 10^{-6}$ で同定値が真値に収束した。ここで、 Δt は時間積分法の時刻刻みを表す。しかし、 P の値がそれより小さいと、同定値は初期推定値の影響を受け、また大きいと同定値は振動した。観測データにノイズが含まれた場合、補間の間隔が少ないものの方が一般的にノイズの影響を受けにくい。観測データの時間間隔が $2 \Delta t$ で、観測データに含まれるノイズの分散が 1.0×10^{-18} まで同定が可能であった(図7)。

ひずみデータを用いた場合については、観測データにノイズが含まれない場合、時刻刻みが $2 \sim 5 \Delta t$ において $P=10, R=1 \times 10^{-6}$ で真値に収束した。この場合も変位のデータを用いた場合と同じような性質を示した。観測データにノイズが含まれる場合、観測データの時間間隔が $5 \Delta t$ まででは観測データに含まれるノイズの分散が 1.0×10^{-18} まで同定が可能であった(図8)。

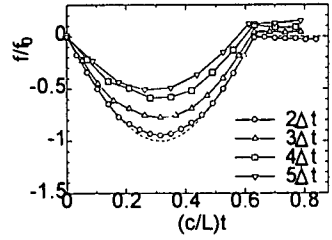
加速度データを用いた場合、観測データにノイズを含む、含まれないに係わらず、時刻刻みが広がるほど荷重の同定値が極端に小さくなる傾向を示した。そこで、プログラムの一部に繰り返し計算をさせたところ、同定値に改善がみられた。しかし、依然観測データの時間間隔が $4 \Delta t$ 以上になると、同定値の最大値が真値の半分以下となった。加速度データを用いた場合には、時刻刻みが $2 \Delta t$ のときではノイズの分散が 1.0×10^2 まで同定が可能である(図9)。



観測データのノイズの分散 1.0×10^{-20}
図7. 変位データによる同定結果



1.0×10^{-18}
図8. ひずみデータによる同定結果



1.0×10^2
図9. 加速度データによる同定結果

5. まとめ

- ・カルマンフィルタは衝撃荷重の同定に有効な手法である

観測データの時間間隔と時間積分法の時刻刻みの等しい場合

- ・変位、ひずみ、加速度データを用いた全ての場合について衝撃荷重の同定を行うことが可能であり、加速度データが良好な結果を与える
- ・同定結果は観測点数に依存しない

観測データの時間間隔と時間積分法の時刻刻みの異なる場合(直線補間を用いた場合)

- ・観測データにノイズが含まれていない場合、変位、ひずみデータは観測データの時間間隔が $5 \Delta t$ まで同定が可能であるが、加速度データは観測データの時間間隔が広がると、同定結果の値が真値に対して小さくなる
- ・観測データにノイズが含まれる場合、ひずみデータが良好な結果を与える

参考文献

- 1) 土木学会構造工学委員会衝撃問題研究小委員会：構造物の衝撃挙動と設計法, 1994.
- 2) 須藤敦史・星谷勝：拡張カルマンフィルタの基本的考察と EK-WLI 法の提案, 土木学会論文集, No.437/I-7, pp.699-702, 1991.
- 3) 須藤敦史・星谷勝・柳河勇：絶対応答波形を用いた地震動入力とシステムパラメータ同定, 構造工学論文集, Vol.41A, pp.709-716, 1995.