

(8) 積層板の衝撃応答解析

ANALYSIS OF LAMINATED PLATES SUBJECTED TO IMPACT LOADS

熊谷清貴* , 三上隆**

Kiyotaka KUMAGAI and Takashi MIKAMI

* 工修 北海道開発コンサルタント(〒001 北海道札幌市北区北11条西2丁目)

** 工博 北海道大学教授 工学部土木工学科(〒060 北海道札幌市北区北13条西8丁目)

キーワード: 衝撃, 積層板, 有限要素法, アングルプライ

(Impact, Laminated Plates, FEM, Angle-Ply)

1. はじめに

積層板は、その優れた材料特性から多くの工学的分野での使用を目指し数多くの研究がなされている。しかし、より積極的な利用を図るには、まだ検討すべき問題が残されている。本論文で取り上げる衝撃問題もその一つである。ここでは、Mindlin 板理論を拡張した、1次せん断変形理論に基づいて、衝撃荷重を受ける任意形状積層板の応答特性の解明を目的に、アインパラメトリック要素による定式化を試みる。なお、数値計算では、周辺が固定されたアングルプライ積層板の正方形・円板を対象にした。

2. 解析方法

2.1 基礎関係式

図-1に示すような積層板に座標軸をとり、 x, y, z 軸方向の変位を $u (= u_0 + z\psi_x)$, $v (= v_0 + z\psi_y)$, w とする。歪み-変位の関係式は式(1)のように表される^{1, 2)}。

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \gamma_{zx} &= \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad \dots\dots(1)$$

ここで u_0, v_0 は板の中央面での変位、 ψ_x, ψ_y はそれぞれ $x-z$ 平面、 $y-z$ 平面における回転角である。また、一般的な合応力成分と歪み成分、曲率成分との関係は式(2)で表される。

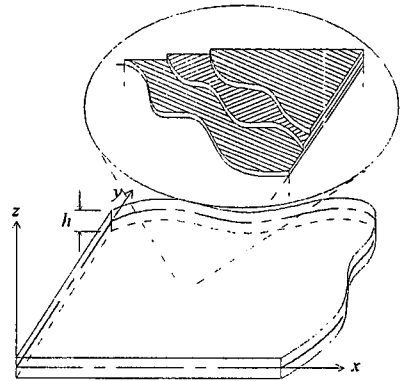


図-1 解析モデル

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ & & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ & & & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ & & & & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ & & Sym. & & & D_{66} & 0 & 0 \\ & & & & & & A_{44} & A_{45} \\ & & & & & & & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial u_0 / \partial x \\ \partial v_0 / \partial x \\ \partial u_0 / \partial y + \partial v_0 / \partial x \\ \partial \psi_x / \partial x \\ \partial \psi_y / \partial y \\ \partial \psi_x / \partial y + \partial \psi_y / \partial x \\ \partial w / \partial y + \psi_y \\ \partial w / \partial x + \psi_x \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(2)$$

式中の A_{ij} は伸張剛性, D_{ij} は曲げ剛性, B_{ij} は曲げ伸張カップリング剛性である。これらは弾性係数, ポアソン比, 積層状態 (繊維構成, 積層数等) を与えることにより決定する。

2. 2 運動方程式

剛性マトリックスは, 式(2)のままで導くと種々の剛性の影響が加え合わさった形で得られるので, ここでは式(2)を次式のように拡張する。

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N}' \\ \mathbf{M}' \\ \mathbf{Q}' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{B}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}' & \mathbf{D}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}'' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\psi} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots(3)$$

ただし $\{\mathbf{N}'\} = \{N_x, N_{xy}, N_{yx}, N_y\}^T$, $\{\mathbf{M}'\} = \{M_x, M_{xy}, M_{yx}, M_y\}^T$, $\{\mathbf{Q}'\} = \{Q_x, Q_y, Q_x, Q_y\}^T$
 $\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}, \frac{\partial v_0}{\partial x}, \frac{\partial v_0}{\partial y} \right\}^T$, $\{\boldsymbol{\kappa}\} = \left\{ \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \frac{\partial \psi_x}{\partial y}, \frac{\partial \psi_y}{\partial x}, \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right\}^T$, $\{\boldsymbol{\psi}\} = \left\{ \psi_x, \psi_y, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right\}^T$

式(3)の特徴は, 合応力, 曲げモーメント及びせん断力の成分をそれぞれ4つの成分で表したことである。

剛性マトリックスの組立は, $[\mathbf{A}']$, $[\mathbf{B}']$, $[\mathbf{D}']$, $[\mathbf{A}'']$ のそれぞれに対して独立して行い, 要素全体の剛性マトリックスは4つの剛性マトリックスを組み合わせることによって得られる。4つの剛性マトリックスはそれぞれ, 伸び剛性に依存するマトリックス, 伸びと曲げが連成するマトリックス, 曲げ剛性に依存するマトリックス, せん断変形の影響を表すマトリックスであり, それぞれの特性に応じた積分則により数値的に評価される。また, 剛性マトリックスの誘導過程で用いる形状関数は, 次式で表されるような Serendipity 系の補間公式³⁾を用いた8節点四辺形要素の形状関数とした。

$$N_i = \frac{1}{4} \xi_i^2 \eta_i^2 \left\{ (1 + \xi_i \xi_i)(1 + \eta_i \eta_i) - (1 + \eta_i \eta_i)(1 - \xi_i^2) - (1 + \xi_i \xi_i)(1 - \eta_i^2) \right\} + \frac{1}{2} \left\{ (1 - \xi_i^2)(1 + \eta_i \eta_i)(1 - \xi_i^2) + (1 - \eta_i^2)(1 + \xi_i \xi_i)(1 - \eta_i^2) \right\} \quad \dots\dots\dots(4)$$

求められた剛性マトリックス $[\mathbf{K}]$ と, 質量マトリックス $[\mathbf{M}]$, 外力ベクトル $\{\mathbf{F}\}$, 節点変位ベクトル $\{\mathbf{a}\}$ から積層板全体の運動方程式が得られる。

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{a}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{a}\} - \{\mathbf{f}(t)\} = 0 \quad \dots\dots\dots(5)$$

式(5)の解は, 数値積分法^{4, 5)}の適用により解くことができる。本研究では, Newmark-β法を用いた。Δt に関しては板の繊維方向弾性係数 E_{11} , ポアソン比 ν , 板厚 h , 密度 ρ , 節点間距離 Δx , から次式を用いて算出した⁶⁾。

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \Delta x \left(\rho(1 - \nu^2) / E_{11} \left\{ 2 + (1 - \nu) \left(\pi^2 / 12 \right) \left(1 + 1.5(\Delta x / h)^2 \right) \right\} \right)^{1/2} \quad \dots\dots\dots(6)$$

3. 数値計算例

3. 1 静的解析

図-2, 3 に積層板の板中央面での撓みと弾性係数比 E (繊維方向弾性係数 E_{11} と繊維直角方向弾性係数 E_{22} の比), 積層角 θ の関係を示す。解析に用いた積層板は逆対称アングルプライ (斜交積層) の正方形板 (辺長 a , 板厚 h) とこれに内接する円形板に等分布荷重 q_0 を載荷したものとし, 対称性から板の4分の1に対して解析を行った。また, 境界条件は全周固定とし, 積層数が2, 4のものと同交異方性板についての計算例を示す。

剛性マトリックスの作成に際しては, 数値積分において全ての剛性に対して 3×3 の積分則を用いたものと 2×2 の積分則を用いたものを比較すると, 3×3 の積分則では特に板厚が薄くなるほど剛性を高めに評価しているという結果が得られたため, 以下の計算では 2×2 の次数低減積分法を用いた。

以下に示すグラフの縦軸には式(7)に示す板の中央点での撓み w_0 を無次元化した無次元変位 W とする。

$$W = w_0 E_{22} h^3 \times 10^3 / q_0 a^4 \quad \dots\dots\dots(7)$$

図-2は積層板の弾性係数比 $E = E_{11}/E_{22}$ と W の関係を求めたものである。ただし、積層角 $\theta = 45^\circ$ 、板厚比 $a/h = 100$ とする。変位は積層数が少ないほど大きくなり、積層数の増加に伴って直交異方性解に収束する。

図-3は積層角 θ と W の関係を求めたものである。ただし、弾性係数比 $E_{11}/E_{22} = 25$ 、板厚比 $a/h = 100$ とする。層数による影響は、弾性係数比による場合より顕著に現れる。

3. 2 動的解析

動的解析では、静的解析に用いた積層板に等分布荷重 q_0 をステップ荷重として載荷したものを考える。また、グラフの縦軸には静的な場合と同様に無次元変位 W をとり、横軸には経過時間を周期で無次元化したものをとる。

図-4, 5は静的解析における、弾性係数比と積層角による撓みの変動に対応した動的挙動を調べたものである。2つのグラフとも、積層数2の場合と直交異方性解について示した。

図-4は板厚比 $a/h = 100$ 、積層角 $\theta = 45^\circ$ に対し弾性係数比 E が25の場合と40の場合について、また図-5は板厚比 $a/h = 100$ 、弾性係数比 $E = 25$ に対して、積層角 θ が $15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ の場合についての動的挙動を表す。波形は共に積層数によらずほぼ同様な奇跡を描き、またパラメータによらず静的な場合の約2倍のピーク値をとることがわかる。

図-6は、ステップ荷重を短時間載荷した後、荷重を除去した例を示す。グラフの縦軸は静的な変位との比を表す。また図中の波形は、実線がステップ荷重を載荷したものであり、波線は上からそれぞれ、周期の40%、30%、20%、10%の間のみ載荷した後、荷重を除去した例を示す。荷重を除去した後は自由振動を起こす。

図-7は、板厚比 $a/h = 10, 20, 100$ の場合の動的応答倍率を示す。正方形板、円形板ともに板厚比によらず周期の50%の載荷時間で静的変位の約2倍のピーク値に収束する。

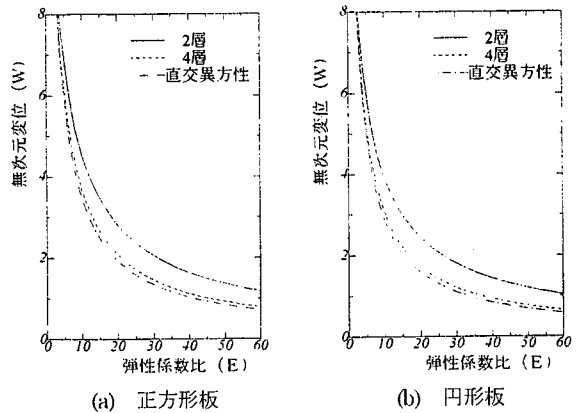


図-2 弾性係数比を変化したときの変位応答

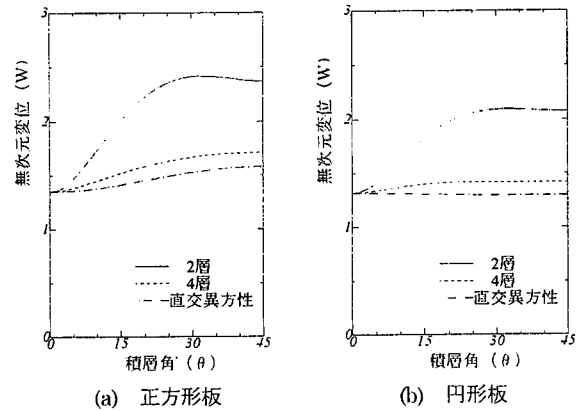


図-3 積層角を変化したときの変位応答

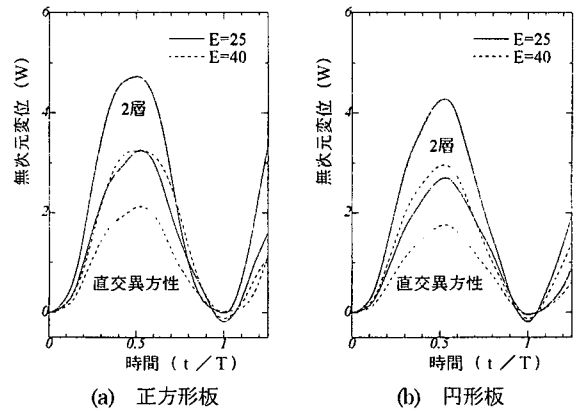


図-4 弾性係数比を変化したときの変位応答

4. まとめ

以上の結果をまとめると

- (1)面積のほぼ等しい周辺固定された正方形板と円形板の板中央点での変位応答は大体等しくなる。
- (2)積層数が増加するとともに直交異方性板に近づく。
- (3)正方形板と円形板の動的応答倍率は、ほぼ同程度の値をとる。

今後は幾何学的非線形の影響も明らかにする予定である。

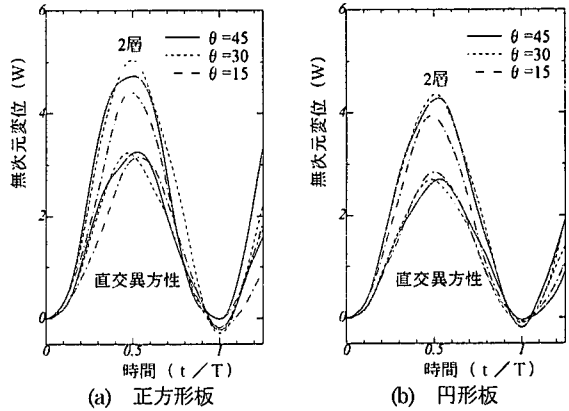


図-5 積層角を変化させたときの変位応答

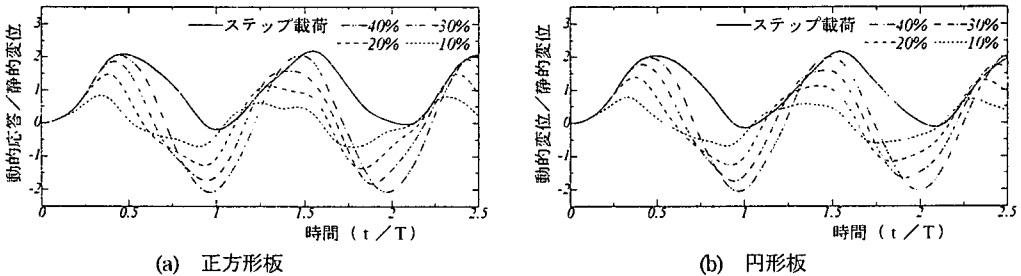


図-6 荷重を途中で除去した場合の時刻歴

参考文献

- 1) 福田博 他訳:複合材料の構造力学, 日刊工業新聞社, 昭和62年
- 2) Chuen-Yuan Chia : Nonlinear Analysis of Plates. McGRAW-HILL, 1980
- 3) O.C.ZienKiewicz : マトリックス有限要素法, 培風館, 1984
- 4) M.A.Dokainish and K.Subaraj : A Survey of Direct Time-Integration Methods in Computational Structural Dynamics-I. Computers & Structures. vol.32. No.6. pp.1371-1386. 1989
- 5) K.Subaraj and M.A.Dokainish : A Survey of Direct Time-Integration Methods in Computational Structural Dynamics-II. Computers & Structures. vol.32. No.6. pp.1387-1401. 1989
- 6) T.Kant and J.R.K. Kommineni : Geometrically Non-Linear Transient Analysis of Laminated Composite and Sandwich Shells with a Refined Theory and C^0 Finite Elements. Computers & Structures. vol52, No.6 pp.1243-1259. 1994

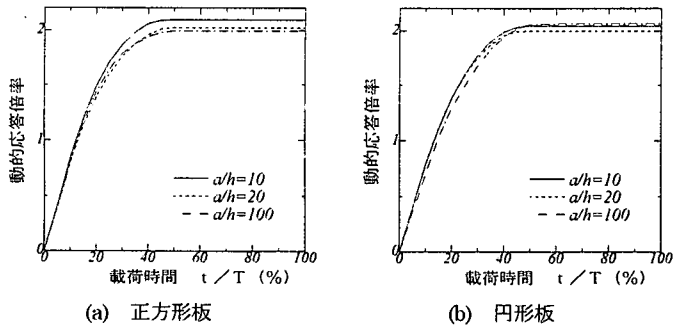


図-7 動的応答倍率