

(7) 異方性板の衝撃応答解析

IMPACT RESPONSE ANALYSIS OF TRANSVERSELY ISOTROPIC PLATES

米田幸司*, 小林治俊**, 園田恵一郎***

Koji YONEDA, Harutoshi KOBAYASHI and Keiichiro SONODA

- * 大阪市立大学大学院前期博士課程 工学部土木工学科 (〒558 大阪市住吉区杉本 3-3-138)
- ** 工博 大阪市立大学助教授 工学部土木工学科 (〒558 大阪市住吉区杉本 3-3-138)
- *** 工博 大阪市立大学教授 工学部土木工学科 (〒558 大阪市住吉区杉本 3-3-138)

キーワード：異方性，平板，応力波，固有関数展開法
(anisotropy, plate, stress wave, eigenfunction expansion method)

1. はじめに

繊維補強複合材料は軽くて高強度であるという特性を有しており，種々な複合材料の開発とともに，その適用分野が広がっている．このような複合材料は巨視的に異方性(横等方性)材料とみなすことができるので，異方性体の力学特性を解明する必要性が高まっている．弾性論に基づく異方性の梁・平板の静的問題では多くの研究があるが，応力波動を問題とする衝撃問題を取り扱った研究は，著者ら[1]による円板の解析以外はほとんどみられないように思われる．

本研究は，平面ひずみ状態の横等方性板の衝撃応答解析を行ったものであり，動弾性論に基づく固有関数展開法[1]により厳密な境界値問題としてその応答解を求めた．

2. 衝撃応答解析

2.1 基礎方程式 図-1は本研究で取り扱う横等方性板の座標系(x, z)であり，板はスパン長がℓ，梁高 h の単位幅矩形断面の平面ひずみ問題として取り扱う．xy 面を等方面とし，z 軸を異方軸とする．なお両端(x=0, ℓ)で単純支持とする．平面ひずみでの応力-変位関係は次のように与えられる[2]．

$$\sigma_x = C_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{13} \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \sigma_z = C_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{33} \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \tau_{xz} = C_{44} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (1)$$

ここに C_{ij} は材料定数であり，等方面内でのヤング率，ポアソン比を E, ν とし，等方面に垂直な面内のヤング率，ポアソン比，せん断弾性係数をそれぞれ E' , ν' , G' とすれば次のように表される．

$$C_{11} = \frac{E[1-(\nu')^2(E/E')]}{(1+\nu)R}, \quad C_{13} = \frac{E\nu'}{R}, \quad C_{33} = \frac{E'(1-\nu)}{R}, \quad C_{44} = G' \quad (2)$$

ただし，

$$R = 1 - \nu - 2(\nu')^2(E/E') \quad (3)$$

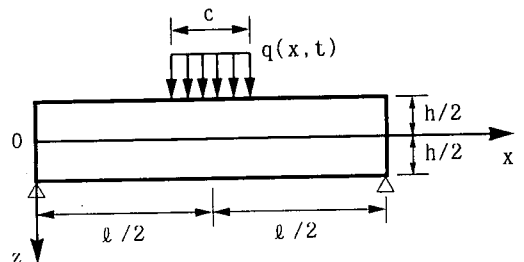


図-1 横等方性板の座標系

変位で表したつり合い式は、 ρ を密度として次のようになる。

$$L_x(u, w) = \rho \ddot{u}, \quad L_z(u, w) = \rho \ddot{w} \quad (4)$$

ただし、ドットは時間微分 ($\dot{\quad} = \partial / \partial t$) を意味し、演算子 L_x, L_z は次式で与えられる。

$$L_x(u, w) = C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{44} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (C_{13} + C_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}, \quad L_z(u, w) = (C_{13} + C_{44}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + C_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (5)$$

境界条件は次のように規定する。

$$w = \sigma_x = 0 \quad (x=0, \ell), \quad \tau_{xz} = 0, \quad \sigma_z = -q(x, t) \quad (z=-h/2), \quad \tau_{xz} = \sigma_z = 0 \quad (z=h/2) \quad (6)$$

荷重のフーリエ展開は、

$$q(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \alpha_m x, \quad q_m = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} q(x, t) \sin \alpha_m x dx, \quad \alpha_m = \frac{m\pi}{\ell} \quad (7)$$

初期条件は、静止状態からの衝撃応答を考えると次式で与えられる。

$$u = w = 0, \quad \dot{u} = \dot{w} = 0 \quad (t=0) \quad (8)$$

2.2 固有関数展開法による衝撃応答解析 固有関数展開法[1]によれば、式(4)の解を次のように慣性項を無視した準静的解 u^s, w^s と擾乱解 u^d, w^d の和で与えることができる。

$$u = u^s(x, z, t) + u^d(x, z, t), \quad w = w^s(x, z, t) + w^d(x, z, t) \quad (9)$$

準静的解 u^s, w^s は、つり合い式：

$$L_x(u^s, w^s) = 0, \quad L_z(u^s, w^s) = 0 \quad (10)$$

および境界条件式：

$$w^s = \sigma_x^s = 0 \quad (x=0, \ell), \quad \tau_{xz}^s = 0, \quad \sigma_z^s = -q(x, t) \quad (z=-h/2), \quad \tau_{xz}^s = \sigma_z^s = 0 \quad (z=h/2) \quad (11)$$

を満足する。ただし、準静的応力は式(1)より次式で与えられる。

$$\sigma_x^s = C_{11} \frac{\partial u^s}{\partial x} + C_{13} \frac{\partial w^s}{\partial z}, \quad \sigma_z^s = C_{13} \frac{\partial u^s}{\partial x} + C_{33} \frac{\partial w^s}{\partial z}, \quad \tau_{xz}^s = C_{44} \left(\frac{\partial u^s}{\partial z} + \frac{\partial w^s}{\partial x} \right) \quad (12)$$

次に、擾乱解 u^d, w^d を未定の時間係数 $Q_{mn}(t)$ と固有関数(モード関数) $U_{mn}(x, z), W_{mn}(x, z)$ の積より成る次の級数で与える。ただし、 m, n はそれぞれ x, z 方向の波数である。

$$[u^d, w^d] = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn}(t) [U_{mn}(x, z), W_{mn}(x, z)] \quad (13)$$

固有関数は、本問題の自由振動解析により得られる振動モード関数であり、 ω_{mn} を固有円振動数とすれば、方程式：

$$L_x(U_{mn}, W_{mn}) = -\rho \omega_{mn}^2 U_{mn}, \quad L_z(U_{mn}, W_{mn}) = -\rho \omega_{mn}^2 W_{mn} \quad (14)$$

と境界条件式：

$$W_{mn} = \sigma_{x, mn} = 0 \quad (x=0, \ell), \quad \tau_{xz, mn} = \sigma_{z, mn} = 0 \quad (z = \pm h/2) \quad (15)$$

を満たすものである。ただし、 m, n 次の応力式は式(1)より次式で与えられる。

$$\sigma_{x, mn} = C_{11} \frac{\partial U_{mn}}{\partial x} + C_{13} \frac{\partial W_{mn}}{\partial z}, \quad \sigma_{z, mn} = C_{13} \frac{\partial U_{mn}}{\partial x} + C_{33} \frac{\partial W_{mn}}{\partial z}, \quad \tau_{xz, mn} = C_{44} \left(\frac{\partial U_{mn}}{\partial z} + \frac{\partial W_{mn}}{\partial x} \right) \quad (16)$$

固有関数には、Bettie の相反定理より求められる次の直交性がある。

$$\int_0^{\ell} \int_{-h/2}^{h/2} (U_{ij} U_{mn} + W_{ij} W_{mn}) dx dz = \delta_{im} \delta_{jn} N_{mn}^2 \quad (17)$$

ここに δ_{im}, δ_{jn} はクロネッカのデルタ、 N_{mn} はノルムである。

以上より求められる準静的解および擾乱解の和が、衝撃問題の境界条件(6)を満足していることは明らかであり、次に、未定の時間関数 $Q_{mn}(t)$ を求める手順を示す。式(9)、(13)を式(4)へ代入し、式(10)、(14)を利用すると、

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\ddot{Q}_{mn} + \omega_{mn}^2 Q_{mn}) U_{mn} = -\ddot{u}^s, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\ddot{Q}_{mn} + \omega_{mn}^2 Q_{mn}) W_{mn} = -\ddot{w}^s \quad (18)$$

となる。ここで、第1式の両辺に U_{ij} 、第2式に W_{ij} を掛けて加え合わせ、これを物体全体にわたって積分し、式(17)の固有関数の直交条件を利用すると、次式を得る。

$$\ddot{Q}_{mn} + \omega_{mn}^2 Q_{mn} = \ddot{z}_{mn}(t), \quad z_{mn} = \frac{-1}{N_{mn}^2} \int_0^{\ell} \int_{-h/2}^{h/2} (u^s U_{mn} + w^s W_{mn}) dx dz \quad (19)$$

式(19)の解は周知のように次式で与えられる。

$$Q_{mn}(t) = Q_{mn}(0) \cos \omega_{mn} t + \frac{1}{\omega_{mn}} \dot{Q}_{mn}(0) \sin \omega_{mn} t + \frac{1}{\omega_{mn}} \int_0^t \ddot{z}_{mn}(\tau) \sin[\omega_{mn}(t-\tau)] d\tau \quad (20)$$

積分定数 $Q_{mn}(0)$, $\dot{Q}_{mn}(0)$ を求めるため、初期条件式(8)に式(9), (13)を代入すると、まず $u=w=0$ より

$$u^*(x, z, 0) = -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn}(0) U_{mn}(x, z), \quad w^*(x, z, 0) = -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn}(0) W_{mn}(x, z) \quad (21)$$

が得られ、第1, 第2式の両辺にそれぞれ U_{ij} , W_{ij} を掛けて加え合わせ、物体全体にわたって積分し、固有関数の直交条件を用いれば、次式が得られる。

$$Q_{mn}(0) = Z_{mn}(0) \quad (22)$$

同様に

$$\dot{Q}_{mn}(0) = \dot{Z}_{mn}(0) \quad (23)$$

3. 固有関数

式(14)の解を求めるため、静的問題に対する Hu の変位関数[3]を拡張して、変位モードを次のように採る。

$$U_{mn} = \frac{\partial^2 \psi_{mn}}{\partial x \partial z}, \quad W_{mn} = \frac{-1}{C_{13} + C_{44}} \left(C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \rho \omega_{mn}^2 \right) \psi_{mn} \quad (24)$$

これを式(14)へ代入して ψ_{mn} が満たすべき式を求めると、

$$\left[\left(C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \rho \omega_{mn}^2 \right) \left(C_{44} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{33} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \rho \omega_{mn}^2 \right) - (C_{13} + C_{44})^2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2} \right] \psi_{mn} = 0 \quad (25)$$

ここで、式(15a)の単純支持条件($x=0, l$)を満足するように ψ_{mn} を

$$\psi_{mn} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \Phi_{mn}(z) \sin \alpha x \quad (26)$$

とおき、上式を式(25)へ代入し整理すると、次の Φ_{mn} に関する4階の微分方程式を得る。

$$A \Phi_{mn}^{IV} + B \Phi_{mn}^{III} + C \Phi_{mn} = 0 \quad (27)$$

ただし

$$A = C_{33} C_{44}, \quad B = (C_{13}^2 + 2C_{13} C_{44} - C_{11} C_{33}) \alpha_m^2 + (C_{33} + C_{44}) \rho \omega_{mn}^2, \quad C = (C_{11} \alpha_m^2 - \rho \omega_{mn}^2)(C_{44} \alpha_m^2 - \rho \omega_{mn}^2) \quad (28)$$

次に $\Phi_{mn} = e^{\beta z}$ とおき、式(27)へ代入すると、 β に関する特性方程式：

$$A \beta^4 + B \beta^2 + C = 0 \quad (29)$$

を得る。これは β^2 についての2次方程式であり、その根は材料定数 C_{ij} 、固有円振動数 ω_{mn} によって根の形式が異なり、(1)2正根、(2)1正根、1負根、(3)2負根、(4)共役複素根となるので、これに対応して β は(1)4実根、(2)2実根、2虚根、(3)4虚根、(4)2共役複素根をもつことになる。以下では煩雑さをさけるため4実根の場合の取扱いのみを示すことにする。式(29)の2正根を β_1^2, β_2^2 とすれば、式(27)の解は $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}$ を積分定数として

$$\Phi_{mn} = (A_{mn} \sinh \beta_1 z + B_{mn} \cosh \beta_1 z) / \alpha_m \beta_1 + (C_{mn} \sinh \beta_2 z + D_{mn} \cosh \beta_2 z) / \alpha_m \beta_2 \quad (30)$$

で与えられ、これを式(26)へ代入した後、式(24)へ代入すると、変位式が

$$U_{mn} = -[(A_{mn} \cosh \lambda_1 z + B_{mn} \sinh \lambda_1 z) + (C_{mn} \cosh \lambda_2 z + D_{mn} \sinh \lambda_2 z)] \cos \alpha_m x \\ W_{mn} = -[\mu_1 (A_{mn} \sinh \lambda_1 z + B_{mn} \cosh \lambda_1 z) + \mu_2 (C_{mn} \sinh \lambda_1 z + D_{mn} \cosh \lambda_1 z)] \sin \alpha_m x \quad (31)$$

と求められる。ただし

$$\mu_i = \frac{C_{44} \beta_i^2 - C_{11} \alpha_m^2 - \rho \omega_{mn}^2}{(C_{13} + C_{44}) \alpha_m^2 \beta_i} \quad (i=1, 2) \quad (32)$$

この変位式を応力式(16)に代入し、それらを式(15b)の境界条件式に代入すると、次の4元連立同次方程式を得る。

$$C [A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}]^T = 0 \quad (33)$$

ここで、 C は 4×4 の係数行列である。したがって、固有円振動数 ω_{mn} を定める振動数方程式は次式となる。

$$|C| = 0 \quad (34)$$

上式より ω_{mn} が定まれば、式(34)より積分定数 $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}$ が決定し、従って、固有関数も確定する。

4. 準静的解

次に式(10)-(12)に示されている準静的問題を考える。準静的問題では慣性項がなく、自由振動問題で $\rho \omega_{mn}^2 = 0$ としたものであるから、 Hu の変位関数[3]を用いて、変位 u^* , w^* を次のようにおく。

$$u^* = \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x \partial z}, \quad w^* = \frac{-1}{C_{13} + C_{44}} \left(C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi^* \quad (35)$$

これを式(10)に代入すると、 ψ^* は次式を満足する関数 ψ_1^* 、 ψ_2^* の和： $\psi^* = \psi_1^* + \psi_2^*$ として与えられる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{\gamma_i^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi_i^* = 0 \quad (i=1,2) \quad (36)$$

ここに、 γ_i^2 は方程式

$$C_{33}C_{44}\gamma^4 + (C_{13}^2 + 2C_{13}C_{44} - C_{11}C_{33})\gamma^2 + C_{11}C_{44} = 0 \quad (37)$$

を γ^2 の2次式と見なした場合の2根であり、材料定数 C_{ij} によって解形式が異なるが、ここでは2正根として議論を進める。式(36)の解として、境界条件式(11a)を満足するように

$$\psi_i^* = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \Phi_{m,i}^*(z) \sin \alpha x \quad (38)$$

とおき、式(36)へ代入し、 $\Phi_{m,i}^*$ を求め、更にそれを式(35)へ代入すれば、変位式として次式を得る。

$$u^* = \sum_{\alpha=1}^{\infty} (A_m^* \cosh \gamma_1 z + B_m^* \sinh \gamma_1 z + C_m^* \cosh \gamma_2 z + D_m^* \sinh \gamma_2 z) \cos \alpha x$$

$$w^* = \sum_{\alpha=1}^{\infty} [\mu_1^* (A_m^* \sinh \gamma_1 z + B_m^* \cosh \gamma_1 z) + \mu_2^* (C_m^* \sinh \gamma_2 z + D_m^* \cosh \gamma_2 z)] \sin \alpha x \quad (39)$$

ただし

$$\mu_i^* = \frac{C_{44}\gamma_i^2 - C_{11}\alpha^2}{(C_{13} + C_{44})\alpha^2\gamma_i} \quad (i=1,2) \quad (40)$$

これらを応力式(12)に代入し、それらを境界条件式(10b,c)に代入すれば、積分定数 A_m^* 、 B_m^* 、 C_m^* 、 D_m^* が決定する。

5. 数値計算結果

ここでは、部分等分布荷重(強度 q_0)が平板の上面中央部に作用し、その載荷幅を $c=0.2\ell$ 、また時間に関してはステップ状に作用する場合 [$q(x,t)=q_0H(t)$] を、板厚比 $h/\ell=0.2$ として数値計算を行った。材料定数については円板の解析で示したように[1]、等方面と異方面でのヤング率の変化による応答の違いのみを検討することにし、 $E/E'=1,2,3$ 、 $\nu=\nu'=0.3$ 、 $G=E'/2(1+\nu')$ とした場合を取り扱う。

振動数方程式(34)は Regula-Falsi 法により数値的に解き、固有値を求めた。数値計算は全て無次元化して行い、時間に関しては、ラメの定数 $\lambda=2\nu\mu/(1-2\nu)$ 、 $\mu=G$ を用いた等方性体の縦波の速度 $c_1=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$ を基準に採り、無次元時間 $\tau=c_1t/h$ を使用した。

図-2は、板厚方向の応力 σ_z の板中央点 ($x=\ell/2$, $z=0$) での時間的変化を示したものである。時間きざみは $\Delta\tau=0.01$ として描いている。応答曲線が不連続的に変動している箇所は、荷重の載荷中央点、載荷端部で発生した応力波の波面やそれに続く板の上面や側面からの反射波の波面が到達した応答を示している。載荷中央点($x=\ell/2$, $z=-h/2$) からの最初の応力波の到達後に応答が始まり、その後下面中央($x=\ell/2$, $z=h/2$) からの反射縦波の到達により引張り応力がいずれの場合にも生じており、spalling 破壊に関連して興味深い。また荷重強度を越える大きな圧縮応力が生じており、ヤング率比が大きいほどその値も大きい。

次に、板上下面の中央点($x=\ell/2$, $z=\pm h/2$) での応力 σ_x の初期($0 \leq \tau \leq 10$)および長期($0 \leq \tau \leq 200$)応答曲線を図-3に示している。まず、図-3(a)の初期応答を検討すると、上面中央では、衝撃荷重が作用した瞬時に応答値を持っている。これは作用圧縮荷重 q_0 とつり合う圧縮応

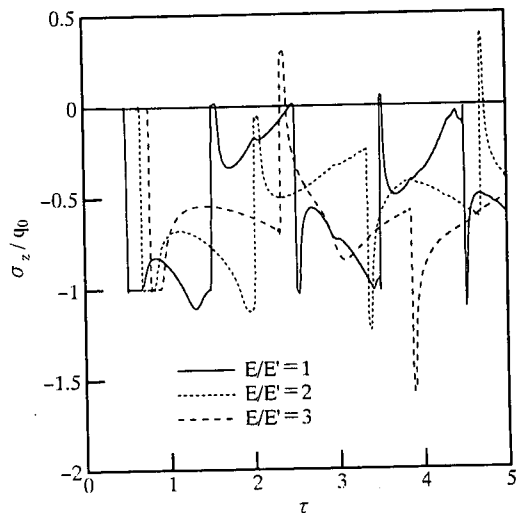


図-2 応力 σ_z ($x=\ell/2$, $z=0$) の初期応答

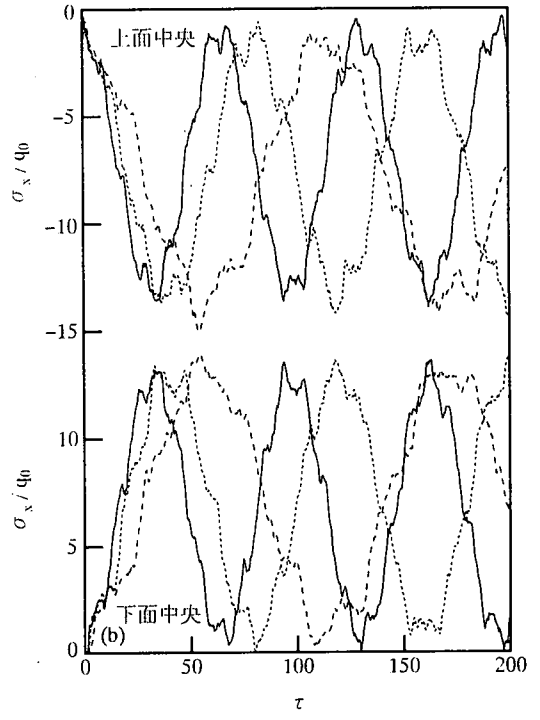
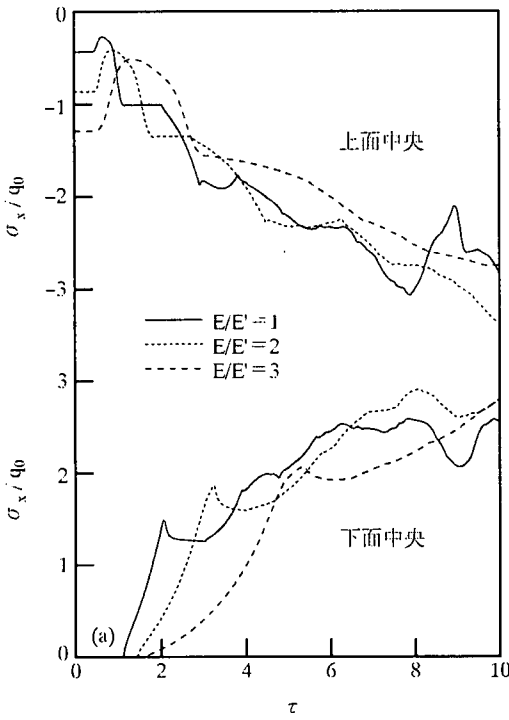


図-3 応力 σ_x ($x = \ell/2, z = \pm h/2$) の (a)初期応答と(b)長期応答

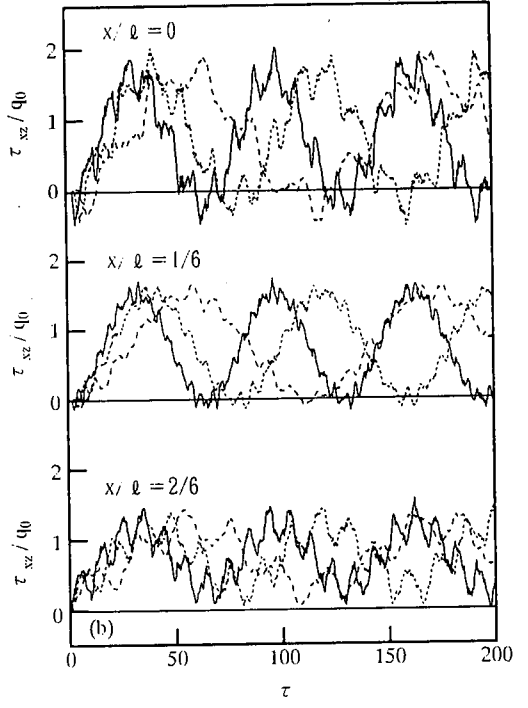
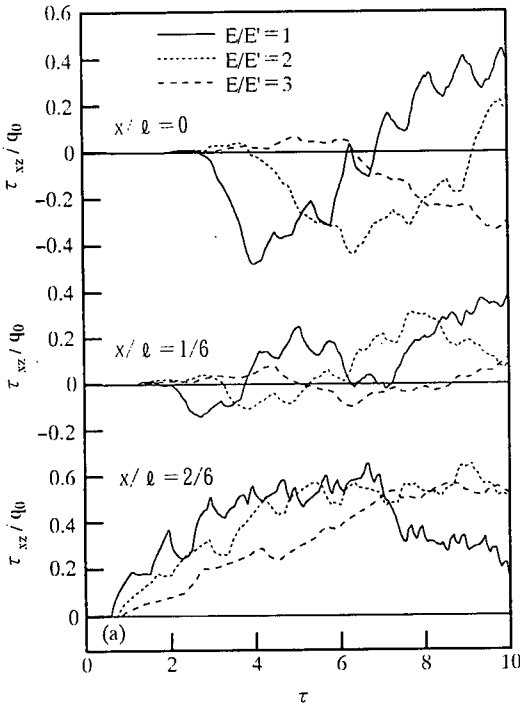


図-4 $z=0$ 断面上のせん断応力 τ_{xz} の (a)初期応答と(b)長期応答

力 $\sigma_x = -q_0$ による x 方向のひずみが拘束されるため、応力 σ_x が生じるからである。一方、下面中央では載荷端からの応力波の到達と共に応答が始まっている。図-3 (b) の長期応答を見ると複雑な応答曲線となっているが、ヤング率比が大きいほど周期が長くなるので右へシフトしたものとなっている。ヤング率比が大きくなれば (x, y) 面内の剛性が高まることになり、 σ_x の応答値も大きくなっている。しかしながら、静的解に対する応答倍率はいずれの場合もおおよそ2倍程度である。

図-4には、 $z=0$ 断面でのせん断応力 τ_{xz} の初期および長期応答曲線を示している。着目点は $x/l = 0, 1/6, 2/6$ の3点とした。なお、 $x/l = 0$ は支持辺である。各着目点ともに応答は応力波の到達と共に始まり、支持辺に近いほど応答開始後しばらくは引張り応力となっている。各ケースとも基本周期による応答曲線の違いはあるが、最大応答値はそれほど変わらない。

最後に、板中央点 ($x = l/2, z = 0$) での変位 w の長期応答曲線を図-5に示している。変位にはヤング率比 E/E' の違いが応答値に明らかに現れている。ヤング率比が大きいことは、 (x, y) 面内の剛性が高まることであるから、ヤング率比が大きいほど一種の膜力効果により変形としては小さくなるものと考えられる。

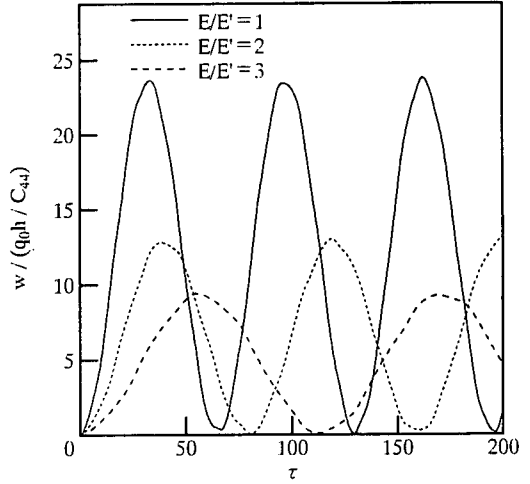


図-5 変位 w ($x = l/2, z = 0$) の長期応答

6. おわりに

本文では、衝撃荷重を受ける横等方性平板を固有関数展開法により解析する方法を示し、時間に関してステップ状で空間には部分等分布荷重が作用した場合の数値計算結果を示した。ここでは、等方面と異方面のヤング率比のみをパラメータとしたが、広範な材料定数を設定することが可能である。数値結果のまとめは次の通りである。

1. いずれの応答も応力波の到達とともに始まる。
2. σ_z の初期応答では、板の下面からの反射応力波の影響により引張り応力が生じ、その後はヤング率比が大きい(等方面内の剛性が高い)ほど大きな圧縮応力が発生する。
3. σ_x の応答では、板の上面において表面波とみられる波動の影響が現れ、またヤング率比が大きくなるほど、最大応答値が大きい。
4. τ_{xz} の応答は、固有周期の違いにより応答曲線に位相差が出るが、最大応答値はそれほど変わらない。
5. 変位 w は、ヤング率比が大きくなれば小さな応答値となる。

参考文献

- [1] 小林治俊, 米田幸司, 石丸和宏, 園田恵一郎: 異方性円板の弾性衝撃応答解析, 構造工学論文集, 土木学会, Vol. 42A, 1996. 3.
- [2] Lekhnitskii, S. G.: Theory of Elasticity of an Anisotropic Body, Mir Publishers, Moscow, 1981.
- [3] Hui Hai-chang: On the Three-dimensional Problems of the Theory of Elasticity of a Transversely Isotropic Body, Acta Scientia Sinica, 2(2)145-151, 1953.
- [4] 小林治俊, 奥田東吾, 園田恵一郎: 衝撃を受ける単純支持はりの応力波伝播解析, 構造工学論文集, 土木学会, Vol. 38A, pp. 1505-1514, 1992.
- [5] Chang, C. and Sun, C. T.: Acoustic Emissions and Transient Elastic Waves in an Orthotropic Laminate Plate, Composites Science and Technology, Vol. 33, pp. 213-236, 1988.