

## (8) 多層軸対称円版の弾性衝撃応答解析

大阪市立大学工学部 ○小林 治俊  
 大阪市立大学大学院 石丸 和宏  
 大阪市立大学工学部 園田恵一郎

### 1. まえがき

土木分野では、積層板の一種と見なせる鋼・コンクリート合成床版が種々の理由から用いられており、この種の構造物が衝撃荷重を受ける際の接合面等での弾性応力変動を応力波伝播の観点より理論的に明らかにしておくことは破壊メカニズムの究明に関連して重要であると思われる。近年、積層板（殻）理論の進展は目ざましいものがあり、それを用いた衝撃応答解析も行われるようになった〔例えば文献、1-3〕。しかしながら、古典積層板（殻）理論およびせん断変形を考慮した修正積層板（殻）理論は、曲げ波・せん断波の伝播は表現できるが、板（殻）厚方向の応力を無視しているために積層された接合面での反射・透過を含む応力波の伝播現象を正確に表すことが出来ない。そのためには動弾性論に基づく解析が必要であろう。

著者ら〔4-6〕は、これまでに動弾性論に基づく固有関数展開法〔7〕により鋼・コンクリート合成円版の応力波伝播解析を行い、コンクリート・鋼よりなる2層円版、鋼・コンクリート・鋼よりなる3層円版が衝撃荷重を受けた際の初期応力状態を明らかにした。一方、岸ら〔8〕は、衝撃を受けるRC円盤の載荷点近傍の応力波や変形挙動をリング要素を用いたモード法により示している。本文は、多層軸対称円版の解析方法を示すとともに、鋼層を内部に持つ鋼・コンクリート合成円版の初期応力状態、特に、版厚方向の応力に着目した結果を示すものである。解析手法としては上述の固有関数展開法に依るが、本法によれば対象とする問題の固有関数（振動モード関数）を求めることができれば、通常動弾性解析で用いられるラプラス変換とその煩雑な（場合によっては困難な）ラプラス逆変換は不要であり、構造物の動的応答解析で用いられているモード解析に則る解析手順により解を求めることができる。なお、円版は軸対称状態にあり、各層の接合面は完全接着されているものとし解析を行う。

### 2. 固有関数

軸対称多層円版の座標系を図1に示している。最初に、自由振動解析により固有関数（モード関数）を誘導する。変位 $(u, w)$ で表わした等方性軸対称問題の運動方程式は物体力が存在しない場合、

$$G \left[ \nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right] = \rho \ddot{u}, \quad G \left[ \nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} \right] = \rho \ddot{w} \dots \dots \dots (1)$$

で与えられる。ここに、 $\rho$ 、 $\nu$ 、 $G$ は各々密度、ポアソン比、せん断弾性係数であり、 $\nabla^2$ はラプラシアン、 $e (= \partial u / \partial r + u / r + \partial w / \partial z)$ は体積ひずみ、ドットは時間 $t$ に関する微分を意味する。

応力・変位関係式は次式で表される。

$$\sigma_r = 2G \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\nu e}{1-2\nu} \right], \quad \sigma_\theta = 2G \left[ \frac{u}{r} + \frac{\nu e}{1-2\nu} \right], \quad \sigma_z = 2G \left[ \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\nu e}{1-2\nu} \right], \quad \tau_{rz} = G \left[ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right] \dots \dots (2)$$

いま、固有円振動数 $\omega$ の調和振動、

$$(u, w) = (U, W) \cos(\omega t) \dots \dots \dots (3)$$

を仮定し、式(1)へ代入すれば、次式を得る。

$$G \left[ \nabla^2 U + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial E}{\partial r} - \frac{U}{r^2} \right] = -\rho \omega^2 U, \quad G \left[ \nabla^2 W + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial E}{\partial z} \right] = -\rho \omega^2 W \dots \dots \dots (4)$$

ここに、 $E = \partial U / \partial r + U/r + \partial W / \partial z$ .

変位ポテンシャル  $\phi_i(r, z)$  が波動方程式：

$$\nabla^2 \phi_i + (\omega/c_i)^2 \phi_i = 0 \quad (i=1, 2) \dots \dots \dots (5)$$

を満足するとき、変位  $U, W$  は、

$$U = \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial r \partial z}, \quad W = \frac{\partial \phi_1}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \right) \dots (6)$$

で表される。ここに、 $c_1 = \sqrt{2G(1-\nu)/\rho(1-2\nu)}$ ,  $c_2 = \sqrt{G/\rho}$  ( $c_1 > c_2$ ) は各々縦波と横波の速度である。

円版周面 ( $r=b$ ) で単純支持 ( $w = \sigma_r = 0$ ) あるいは固定 ( $w = u = 0$ ) 条件を満足する解は、単純な変数分離形で求められない [9]。そこで、本研究では固有関数展開法による解析の便を考慮して次の支持条件を用いる。

$$w = \sigma_z = 0 \dots \dots \dots (7)$$

これを満たすため  $\phi_i$  を次式に採る。

$$\phi_i(r, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_i(z) J_0(\alpha_m r) \dots \dots \dots (8)$$

ただし、 $J_0$  は 0 次のベッセル関数、 $\alpha_m$  は  $J_0(\alpha b) = 0$  の  $m$  番目の正根である。なお、上式の変位ポテンシャルを用いると、円版周面では  $u \neq 0, \sigma_r \neq 0$  となるので、式(7)の支持条件は単純支持と固定の中間のものとなすことができる [10]。式(8)を波動方程式(5)に代入すれば、 $\Phi_i(z)$  に関する 2 階の微分方程式を得、その解は次式で与えられる。

$$\Phi_i(z) = A_i \cosh(\lambda_i z) + B_i \sinh(\lambda_i z) \quad (i=1, 2) \dots \dots \dots (9)$$

$A_i, B_i$  は境界条件および接合面での連続条件より定まる積分定数、 $\lambda_i = \sqrt{\alpha_m^2 - (\omega/c_i)^2}$ 。

式(8)、(9)を式(6)に代入すれば変位式が決まり、従って応力式は式(2)、(3)より定まる。以上の展開は円版の各層において成立するので、以後関連する諸量に添字  $k$  ( $k=1, \dots, K$ ) を付して  $k$  層における諸式を示すこととする。

次に、円版上下面の自由境界条件および接合面の連続条件は、

$$z_1 = -h_1/2 \text{ において、} \sigma_{z,1} = \tau_{rz,1} = 0 \dots \dots \dots (10)$$

$$z_k = h_k/2, z_{k+1} = -h_{k+1}/2 \quad (k=1, \dots, K-1) \text{ において、}$$

$$u_k = u_{k+1}, w_k = w_{k+1}, \sigma_{z,k} = \sigma_{z,k+1}, \tau_{rz,k} = \tau_{rz,k+1} \dots \dots \dots (11)$$

$$z_K = h_K/2 \text{ において、} \sigma_{z,K} = \tau_{rz,K} = 0 \dots \dots \dots (12)$$

となるので、変位・応力式をこれらの条件式に代入すれば、次の  $4K$  元連立同次方程式を得る。

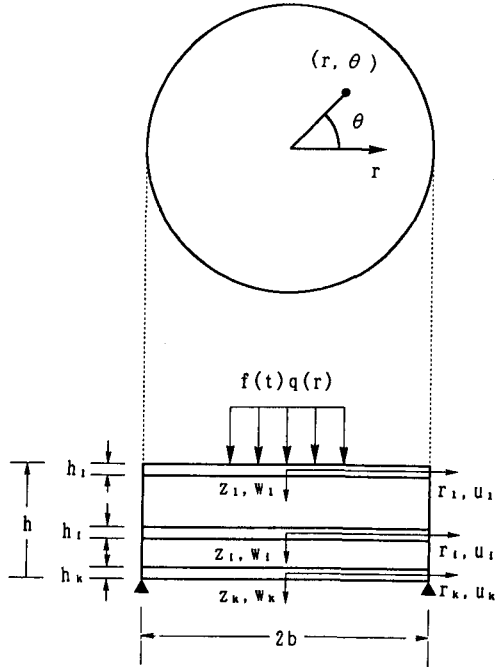


図1 軸対称合成円版の座標系

$$[C][A_{1,1}, B_{1,1}, \dots, A_{1,K}, B_{1,K}, A_{2,K}, B_{2,K}]^T = 0 \dots \dots \dots (13)$$

ここに、[C]は $4K \times 4K$ の係数行列であり、振動数方程式は、 $|C| = 0$  で与えられる。これをRegula-Falsi法で数値的に解き $mn$ 次の固有円振動数 $\omega_{mn}(m, n = 1, 2, 3, \dots)$ を求め、対応する積分定数 $A_{i, mn, k}$ を定めれば固有関数 $U_{mn, k}(r_k) = [U_{mn, k}(r_k), W_{mn, k}(r_k)]$ が確定する。ただし、 $r_k = (r, z_k)$ 。

固有関数の直交条件は、相反作用の定理を適用すれば次のように得られる。

$$\sum_{k=1}^K \int_0^b \int_{-h_k/2}^{h_k/2} \rho_k U_{mn, k}(r_k) U_{st, k}(r_k) r dr dz_k = \delta_{ms} \delta_{nt} N_{mn}^2 \dots \dots \dots (14)$$

ここに、 $\delta_{ms}, \delta_{nt}$ はKroneckerのデルタ、 $N_{mn}$ はノルム。

ところで、以上の取り扱い $\lambda_{i, k}$ が実数、すなわち $\alpha_{mci, k} > \omega$ の場合であるが、 $\alpha_{mci, k} < \omega$ の場合は虚数となる。この場合は複素演算により実変数の式形に変形すればよい。

### 3. 衝撃応答解析

円版上面に衝撃荷重 $f(t)q(r)$ が作用する場合を取扱う。衝撃問題の基礎方程式、円版周囲および下面の境界条件さらに接合面の連続条件は自由振動解析の場合と同じであり、荷重が作用する上面の境界条件は次のように規定される。

$$\sigma_{z, 1} = -q(r)f(t), \quad \tau_{rz, 1} = 0 \quad (z_1 = -h_1/2) \dots \dots \dots (15)$$

さて、衝撃問題に対する式(1)の解を慣性力の影響を無視した静的荷重 $q(r)$ による解、 $u^S_k = (u^S_k, w^S_k)$ 、とそれを考慮した解(擾乱解)、 $u^D_k = (u^D_k, w^D_k)$ 、の和として次のように与える。

$$u_k(r_k, t) = f(t)u^S_k(r_k) + u^D_k(r_k, t) \dots \dots \dots (16)$$

静的解 $u^S_k(r_k)$ は式(1)より慣性項を省いた次式を満足する。

$$G_k \left[ \nabla^2 u^S_k + \frac{1}{1-2\nu_k} \frac{\partial E^S_k}{\partial r} - \frac{u^S_k}{r^2} \right] = 0, \quad G_k \left[ \nabla^2 w^S_k + \frac{1}{1-2\nu_k} \frac{\partial E^S_k}{\partial z_k} \right] = 0 \dots \dots \dots (17)$$

ただし、 $E^S_k = \partial u^S_k / \partial r + u^S_k / r + \partial w^S_k / \partial z_k$ 。境界条件および連続条件を満足する上式の解は、Loveの応力関数[11]を用いて単級数の形で容易に得ることが出来るが省略する。

次に擾乱解 $u^D_k(r_k, t)$ は、未定の時間関数 $Q_{mn}(t)$ と前節で求めた固有関数により次のように表す。

$$u^D_k(r_k, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn}(t) U_{mn, k}(r_k) \dots \dots \dots (18)$$

式(16)、(18)を式(1)に代入し、式(4)、(17)を考慮して式を変形すれば、次式を得る。

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{Q}_{mn}(t) + \omega_{mn}^2 Q_{mn}(t)] U_{mn, k}(r_k) = -f(t)u^S_k(r_k) \dots \dots \dots (19)$$

両辺に $U_{st, k}(r_k)$ を掛け積分し固有関数の直交条件を利用すれば、 $Q_{mn}(t)$ に関する次の微分方程式を得る。

$$\ddot{Q}_{mn}(t) + \omega_{mn}^2 Q_{mn}(t) = f(t) \eta_{mn} \dots \dots \dots (20)$$

ここに、係数 $\eta_{mn}$ は、

$$\eta_{mn} = \frac{-1}{N_{mn}^2} \left[ \sum_{k=1}^K \int_0^b \int_{-h_k/2}^{h_k/2} \rho_k u^S_k(r_k) U_{mn, k}(r_k) r dr dz_k \right] \dots \dots \dots (21)$$

与えられ、式(20)の解は次のDuhamel積分形に得られる。

$$Q_{mn}(t) = Q_{mn}(0)\cos(\omega_{mn}t) + \frac{1}{\omega_{mn}} \dot{Q}_{mn}(0)\sin(\omega_{mn}t) + \frac{\eta_{mn}}{\omega_{mn}} \int_0^t \ddot{f}(\tau)\sin[\omega_{mn}(t-\tau)]d\tau \dots\dots\dots (22)$$

積分定数 $Q_{mn}(0)$ ,  $\dot{Q}_{mn}(0)$ は次のように決定できる。今、衝撃を受ける前の円版は静止しているものとすれば、

$$u_k(r_k, 0) = \dot{u}_k(r_k, 0) = 0 \dots\dots\dots (23)$$

すなわち、式(18)より、

$$u_k^D(r_k, 0) = -f(0)u_k^S(r_k), \quad \dot{u}_k^D(r_k, 0) = -\dot{f}(0)u_k^S(r_k) \dots\dots\dots (24)$$

上式の左辺に式(20)を代入したのち両辺に $U_{st, k}(r_k)$ を掛け積分し、固有関数の直交性を利用すれば、

$$Q_{mn}(0) = -f(0)\eta_{mn}, \quad \dot{Q}_{mn}(0) = -\dot{f}(0)\eta_{mn} \dots\dots\dots (25)$$

#### 4. 数値計算例

ここでは、(1)上層がコンクリート、下層が鋼の2層円版、(2)上下層がコンクリート、中間層が鋼よりなる3層円版を取扱う。鋼板厚はいずれの円版も円版厚 $h$ の1割とし、3層円版の中間層の配置は版中央、したがって、 $h_1/h=0.45$ ,  $h_2/h=0.1$ ,  $h_3/h=0.45$ である。円版厚/直径比はいずれも  $h/2b=0.3$ とする。また、鋼、コンクリートの材料定数は、 $\rho_s=7.85(\text{tf/m}^3)$ ,  $E_s=2.1 \times 10^7(\text{tf/m}^2)$ ,  $\nu_s=0.3$ ,  $\rho_c=2.3(\text{tf/m}^3)$ ,  $E_c=2.4 \times 10^6(\text{tf/m}^2)$ ,  $\nu_c=0.167$ 。衝撃荷重は、時間に関してステップ関数 $f(t)=H(t)$ 、空間に関して部分等分布荷重 $q(r)=q(0 < r < a, a/b=0.2)$ を用いた。級数解の項数は、 $m=50$ ,  $n=1000$ としている。なお、時間は無次元時間 $\tau(=ct/h)$ で取扱う。すなわち、コンクリート内部を進行する縦波が円版厚  $h$ を進むに要する時間が1である。

図2, 3は、それぞれ2層・3層円版の中心軸上( $r=0$ )の応力 $\sigma_z$ の初期応答曲線であり、図において応答曲線が不連続的に変動している箇所は応力波の波面が到達したことを示しており、特に小刻みな不連続変動は鋼板内で反射・透過を繰り返す応力波の波面の到達を意味している。

3層円版の上接合面での最初の応答値は応力波(縦波)が剛性の低いコンクリートから高い鋼に入射するため応答値は入射波より大きくなり、逆に下接合面では、鋼からコンクリートへと進行するため応答値は小さい値となっている。また、上接合面では $\tau=1.35$ で引張応力となっているが、これは最初の入射波が上接合面で反射され円版上面でさらに反射され引張波となって入射する応答である。さらにこの応力波は鋼層よりコンクリート層へと進行するが、その際( $\tau=1.41$ )下接合面でも引張り応力を生じさせている。このように、着目点に到着する応力波の種類、伝播経路、到達時刻は波線理論[12]により幾何学的考察から説明できるが、本例は鋼板内で反射・透過を繰り返す応力波や載荷端からの応力波など応答に及ぼす要因が多く非常に複雑であり、その詳細は省略する。

#### 5. おわりに

本文は、衝撃荷重を受ける軸対称多層円版を動弾性論に基づく固有関数展開法により解析する方法を示し、時間に関してステップ状の衝撃荷重が作用する場合の鋼・コンクリート合成円版に対して数値計算を行い、過渡状態での応力波伝播特性を示したものである。特に、鋼板・コンクリートの接合面では応力波の入射・反射・透過現象により、複雑な応力変動を示すことが明らかになった。

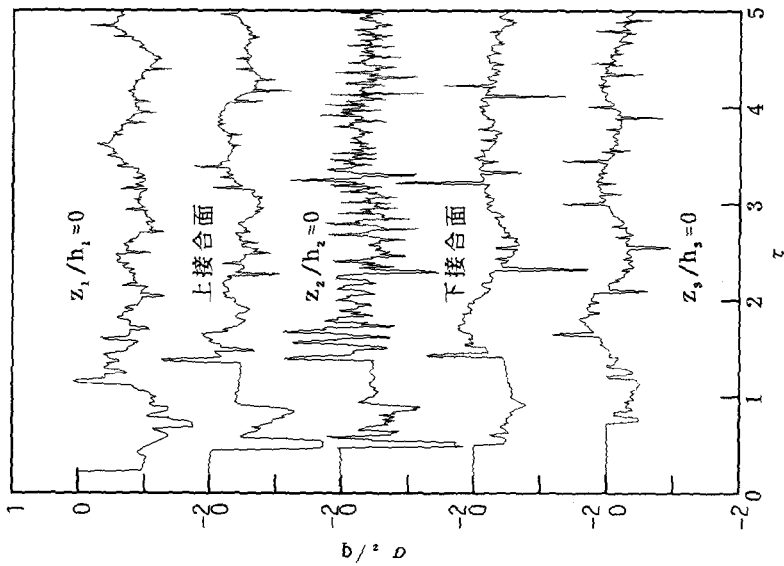


図3 3層円版中心軸上( $r=0$ )の $\sigma_z$ の応答曲線

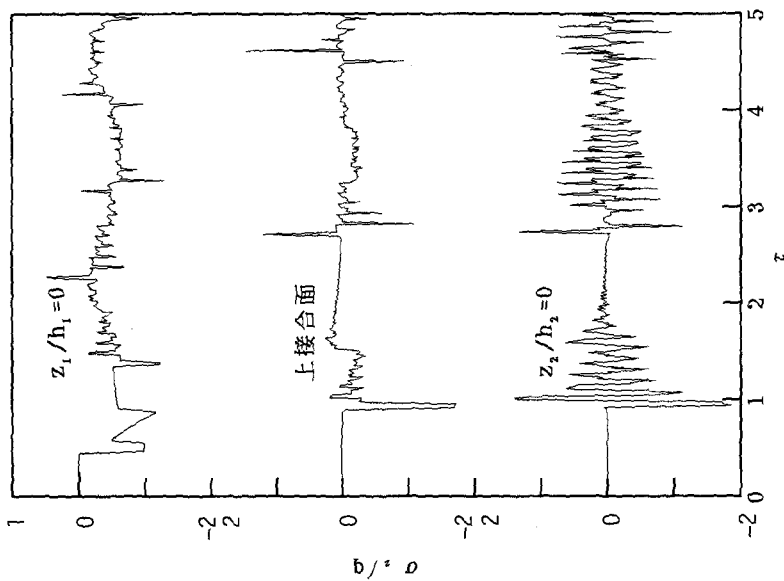


図2 2層円版中心軸上( $r=0$ )の $\sigma_z$ の応答曲線

### 参考文献

- 1) Sun, C.T. and Chattopadhyay, S.: Dynamic Response of Anisotropic Laminated Plates under Initial Stress to Impact of a Mass, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.42, pp. 693-698, 1975.
- 2) 文 桂栄, 谷 順二, 大好 直, 渡辺一実: 点衝撃を受ける複合材料積層板の応答解析, *機会学会論文集 (A編)*, 56巻, 530号, pp. 2064-2069, 1990.
- 3) 三上 隆, 佐伯 昇, 芳村 仁: 二層円筒殻の弾性衝撃応答解析, *構造工学論文集*, Vol. 39A, 1993. (印刷中)
- 4) 小林治俊, 園田恵一郎, 石丸和宏: 衝撃荷重を受ける鋼・コンクリート合成円版の応答解析, *構造工学における数値解析法シンポジウム論文集*, Vol. 15, pp. 419-424, 1991.
- 5) 小林治俊, 園田恵一郎, 石丸和宏: 鋼・コンクリート合成円版の弾性衝撃応答解析, *構造工学論文集*, Vol.38A, pp. 1497-1504, 1992.
- 6) Kobayashi, H., Sonoda, K. and Ishimaru, K.: Three Dimensional Impact Response Analysis of Axisymmetric Circular Sandwich Plates, *Proc. of the Third Pan American Congress of Applied Mechanics*, Sao Paulo, Brazil, pp. 173-176, 1993.
- 7) Reismann, H.: On the Forced Motions of Elastic Solids, *Applied Scientific Research*, Vol. 18, pp. 156-165, 1967.
- 8) 岸 徳光, 松岡健一, 能町純雄, 天沼宇雄: リング要素を用いた厚肉円盤の衝撃応答解析, 昭和63年度土木学会北海道支部論文報告集, I-36.
- 9) Hutchinson, J. R.: Axisymmetric Flexural Vibrations of A Thick Free Circular Plate, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 46, pp. 139-144, 1979.
- 10) 西村源四郎: *振動工学*, pp. 422-442, 誠文堂新光社.
- 11) Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N.: *Theory of Elasticity*, 3rd ed., McGraw-Hill International Edition, Singapore, pp. 380-382, 1970.
- 12) 佐藤泰夫: *弾性波動論*, 岩波書店, 1978.