

(7) 数値ラプラス変換を用いた衝撃問題の数値解法

長岡技術科学大学 ○ 岩崎英治
長岡技術科学大学 林 正

1. まえがき

衝撃的な外力による構造物内の応力波伝播等の動的挙動を数値的に解析するには、Newmark のβ法や中央差分法などの直接時間積分法、固有関数によりモード分解して Duhamel 積分などを時間座標に適用する方法などがある。前者の方法は汎用性に優れているが、不連続に変化する応力波の伝播の様子を正確に求めることは難しい。これに対し後者の方法は、適用範囲が線形問題に限定されるが、高次の固有関数を用いることにより、応力波伝播挙動を正確に知ることができる¹⁾。

ところで、衝撃等の波動問題を解析的に解く場合には、ラプラス変換を用いると、解析が容易になることが少なくない。しかし、逆変換を解析的に行うことは煩雑なことから、数値的に扱う方法が種々研究されている。著者らは、この数値ラプラス変換とマトリックス法を組合わせた方法により、骨組構造の衝撃問題に数値ラプラス変換を用いることの有効性を示している²⁾。

本論分では、2次元線形弾性体を対象にして、応力波伝播などの動的挙動を精度良く、解析できる汎用的な手法として、数値ラプラス変換と有限要素法を用いた衝撃問題の数値解析法を提案し、その有効性について検討する。

2. ラプラス変換後の基礎式

本文では、時刻 t に関してラプラス変換された諸量には、右肩に添え字 s を付けて表すことにする。

座標系 (x, y) 内に弾性体の占める領域を V 、この領域を囲む境界を S とし、境界の上で変位が規定される部分を S_u 、その他の応力が規定される部分を S_σ とする。また、 x, y 方向の変位をそれぞれ u_x^s, u_y^s 、 x, y 方向の直応力を $\sigma_{xx}^s, \sigma_{yy}^s$ 、せん断応力を σ_{xy}^s とすると、ラプラス変換された運動方程式は次のようになる。

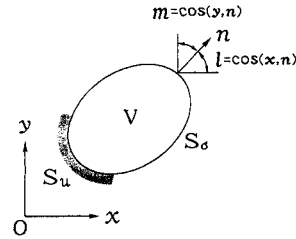


図-1 2次元弾性体

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^s}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^s}{\partial y} + \hat{q}_x^s = s^2 \rho u_x^s, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}^s}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^s}{\partial y} + \hat{q}_y^s = s^2 \rho u_y^s \quad (1)$$

ここに、 ρ は密度、 s は変換パラメータを表す。また、 \hat{q}_x^s, \hat{q}_y^s は、変換された分布荷重 q_x^s, q_y^s 、初期速度 v_x^0, v_y^0 と初期変位 u_x^0, u_y^0 から、それぞれ次式で与えられる。

$$\hat{q}_x^s = q_x^s + \rho(v_x^0 + s u_x^0), \quad \hat{q}_y^s = q_y^s + \rho(v_y^0 + s u_y^0) \quad (2)$$

また、境界条件式は境界 S_σ 上で

$$Q_x^s = \bar{Q}_x^s, \quad Q_y^s = \bar{Q}_y^s \quad (3)$$

境界 S_u 上で次のようになる。

$$u_x^s = \bar{u}_x^s, \quad u_y^s = \bar{u}_y^s \quad (4)$$

ここに、 \bar{Q}_x^s, \bar{Q}_y^s は境界 S_σ 上で与えられている x, y 軸方向の外力、 \bar{u}_x^s, \bar{u}_y^s は境界 S_u 上で与えられている x, y 軸方向の変位である。また、 Q_x^s, Q_y^s は応力 $\sigma_{xx}^s, \sigma_{yy}^s, \sigma_{xy}^s$ と境界 S の外向き法線 n と x 軸、 y 軸との間の方向余弦 l, m から、次式で与えられる。

$$Q_x^s = l\sigma_{xx}^s + m\sigma_{xy}^s, \quad Q_y^s = l\sigma_{xy}^s + m\sigma_{yy}^s \quad (5)$$

また、応力 $\sigma_{xx}^s, \sigma_{yy}^s, \sigma_{xy}^s$ は、変位から次のようになる。

$$\sigma_{xx}^s = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_x^s}{\partial x} + \lambda\frac{\partial u_y^s}{\partial y}, \quad \sigma_{yy}^s = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_y^s}{\partial y} + \lambda\frac{\partial u_x^s}{\partial x}, \quad \sigma_{xy}^s = \mu\left(\frac{\partial u_x^s}{\partial y} + \frac{\partial u_y^s}{\partial x}\right) \quad (6)$$

なお、 λ, μ はラメの定数であり、弾性係数 E とポアソン比 ν から次式で与えられる。

$$\lambda = \begin{cases} \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \text{平面ひずみ状態} \\ \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} & \text{平面応力状態} \end{cases}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (7)$$

運動方程式 (1), 境界条件式 (3), (4) が、停留条件として得られるような汎関数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \pi^s &= \frac{1}{2} \int_V \left\{ \sigma_{xx}^s \frac{\partial u_x^s}{\partial x} + \sigma_{yy}^s \frac{\partial u_y^s}{\partial y} + \sigma_{xy}^s \left(\frac{\partial u_x^s}{\partial y} + \frac{\partial u_y^s}{\partial x} \right) \right\} dV \\ &+ \frac{\rho s^2}{2} \int_V \left\{ (u_x^s)^2 + (u_y^s)^2 \right\} dV - \int_V (\hat{q}_x^s u_x^s + \hat{q}_y^s u_y^s) dV \\ &- \int_{S_\sigma} (\bar{Q}_x^s u_x^s + \bar{Q}_y^s u_y^s) dS + \int_{S_u} \left\{ Q_x^s (\bar{u}_x^s - u_x^s) + Q_y^s (\bar{u}_y^s - u_y^s) \right\} dS \end{aligned} \quad (8)$$

3. 有限要素法の定式化

弾性体の領域 V を有限個の要素 V^e に分割し、それぞれの要素の剛性方程式を求める。

変位 u_x^s, u_y^s 、初期速度 v_x^s, v_y^s と初期変位 u_x^o, u_y^o を節点 i の変位 u_{xi}^s, u_{yi}^s 、初期速度 v_{xi}^o, v_{yi}^o 、初期変位 u_{xi}^o, u_{yi}^o と形状関数 N_i, N_i^o から次のように表す。

$$\left. \begin{aligned} u_x^s &= \sum_{i=1}^p N_i u_{xi}^s, \quad v_x^o = \sum_{i=1}^p N_i^o v_{xi}^o, \quad u_x^o = \sum_{i=1}^p N_i^o u_{xi}^o \\ u_y^s &= \sum_{i=1}^p N_i u_{yi}^s, \quad v_y^o = \sum_{i=1}^p N_i^o v_{yi}^o, \quad u_y^o = \sum_{i=1}^p N_i^o u_{yi}^o \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここに、形状関数 N_i^o には通常の有限要素法で使用される補間関数を用いる。像空間での要素内変位を節点変位で表現するための関数 N_i は、一般的には座標 x, y の他に変換パラメータ s の関数で表される²⁾ため、初期値に関する形状関数と区別している。しかし、このような関数 N_i は棒部材を除いて誘導することは容易ではない。そこで、計算例では、通常の有限要素法で使用される補間関数を用いる。なお、 p は一有限要素を構成する節点の数である。

上式を式 (8)に代入して、第一変分がゼロになる条件を用いると、次の節点 i に関する要素剛性方程式が得られる。

$$\sum_{j=1}^p (\mathbf{k}_{ij} + s^2 \mathbf{m}_{ij}) \mathbf{d}_j = \mathbf{p}_i + \sum_{j=1}^p \mathbf{n}_{ij} (\mathbf{v}_j^o + s \mathbf{d}_j^o) \quad (i = 1 \sim p) \quad (10)$$

ここに、 $\mathbf{k}_{ij}, \mathbf{m}_{ij}, \mathbf{n}_{ij}$ は、それぞれ、節点 i, j に関する剛性行列、質量行列と初期条件に対する質量行列である。また、 $\mathbf{d}_i, \mathbf{p}_i, \mathbf{v}_i^o, \mathbf{d}_i^o$ は、それぞれ、節点 i に関する変位ベクトル、等価節点荷重ベクトル、初期速度ベクトルと初期変位ベクトルである。

$$\left. \begin{aligned}
 k_{ij} &= \int_{V^e} \left[\begin{array}{cc} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \mu \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} & \lambda \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \mu \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} \\ \lambda \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \mu \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} & (\lambda + 2\mu) \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \mu \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \end{array} \right] dV \\
 m_{ij} &= \int_{V^e} \left[\begin{array}{cc} \rho N_i N_j & 0 \\ 0 & \rho N_i N_j \end{array} \right] dV & n_{ij} &= \int_{V^e} \left[\begin{array}{cc} \rho N_i N_j^o & 0 \\ 0 & \rho N_i N_j^o \end{array} \right] dV \\
 d_i &= \left\{ \begin{array}{c} u_{xi}^s \\ u_{yi}^s \end{array} \right\} & p_i &= \left\{ \begin{array}{c} \int_{V^e} N_i q_x^s dV + \int_{S_g} N_i \bar{Q}_x^s dS \\ \int_{V^e} N_i q_y^s dV + \int_{S_g} N_i \bar{Q}_y^s dS \end{array} \right\} \\
 v_i^o &= \left\{ \begin{array}{c} v_{xi}^o \\ v_{yi}^o \end{array} \right\} & d_i^o &= \left\{ \begin{array}{c} u_{xi}^o \\ u_{yi}^o \end{array} \right\}
 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

構造全体の剛性方程式を解くと、ある変換パラメータ“ s ”に関する像空間での節点変位が求められ、式(9)を式(6)に代入すると応力が求められる。このような操作を一連の s について行い、文献2)で用いた数値ラプラス逆変換の手法を、求めようとする点の変位と応力に適用することにより、物理的な変位と応力の時刻歴応答が得られる。

4. 数値計算例

数値ラプラス変換を有限要素法に用いた手法の有効性を確認するために、解析解が求められている図-2のような自由端に荷重が作用した L/H の大きな片持ちばりと、支間中央の上縁に荷重が作用した L/H の小さな両端単純支持はりの応力波伝播挙動を解析する。なお、いずれの荷重も時間座標に関してステップ状に作用するものとする。また、初期条件はすべてゼロとする。

図-2.(a),(b)の片持ちばりでは、棒理論による解と比較するため、ポアソン比 ν をゼロとする。また、長さ方向には4次のラグランジュ補間関数を用い、応力やひずみの高さ方向の分布を棒理論による結果に合わせるために、高さ方向には1次のラグランジュ補間による形状関数を用いた10節点要素を12要素使用している。全節点数は98である。

図-2.(c)の単純支持はりでは、はりの高さ方向の応力波伝播の挙動を調べる。なお、小林らによる2次元弾性論に基づいた固有関数展開法による解¹⁾との比較のために、単純支持の境界条件は、両端で鉛直変位が拘束され、水平変位を自由とする。また、平面応力状態として扱う。有限要素と要素分割に関しては、長さ方向に4次、高さ方向に4次のラグランジュ補間による形状関数を用いた25節点要素を使用し、構造の対称性を考慮し右側半分を高さ方向に6要素分割、長さ方向に10要素分割している。全節点数は1025である。また、それぞれの方向の分割数を倍にした全節点数3969の結果も示す。

図-3,4は、それぞれ自由端に長さ方向と鉛直方向の分布荷重が作用した片持ちばり中央の応力 σ_{xx}, σ_{xy} の時刻歴応答を示している。これらの図で横軸は、長さ L だけ縦波が伝播する時間 L/c ($c = \sqrt{E/\rho}$: 伝播速度)で正規化している。また、図-4の解析解には、Timoshenkoはりの解を用いている。本方法による結果は、全解析時間 $T = 5L/c$ 、時間分割数 $N = 128$ とし、変換パラメータ s の実部には $\alpha = 2\pi/T$ を用いている²⁾。

図-3より、本方法による結果は応力が不連続に変化する部分でわずかに乱れているが全体に精度良く求められている。また、図-4では、応力が複雑に変動しているが、比較的よく求められているものと思われる。しかし、時間の後半部分で解析解とずれが生じている。これは、図-2.(b)の要素モデルとTimoshenkoはりの解析仮定との整合性の不一致によるものと思われる。

図-5,6は、両端単純支持されたはりを、それぞれ総節点数を1025と3969としたときのはり中央の点Aの応力 σ_{xx}, σ_{yy} と、この点から $L/6$ だけ離れた点Bの応力 σ_{xy} の時刻歴応答を表している。これらの図で横軸は、高さ H だけ縦波が伝播する時間 H/c_1 ($c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$: 伝播速度)で正規化している。本方法による結果は、全解析時間 $T = 5H/c_1$ 、変換パラメータ s の実部には $\alpha = 2\pi/T$ を用いている。また、時間分割数 N は、図-5では $N = 64$ 、図-6では $N = 128$ を用いている。

図-5より、解析解^{1,3)}と比較して、時刻 $\tau = 4.0$ 以降での応答に乱れが生じており、時刻全体を通して、応力が急激に変化する部分では正確な挙動を示していないが、全体の傾向はつかんでいる。また、節点数と時

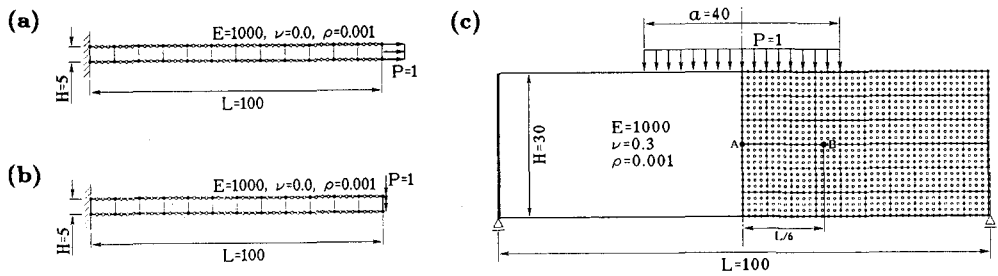


図-2 計算例

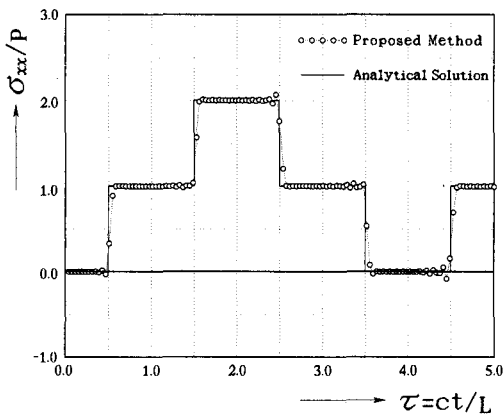


図-3 応力 σ_{xx} の応答

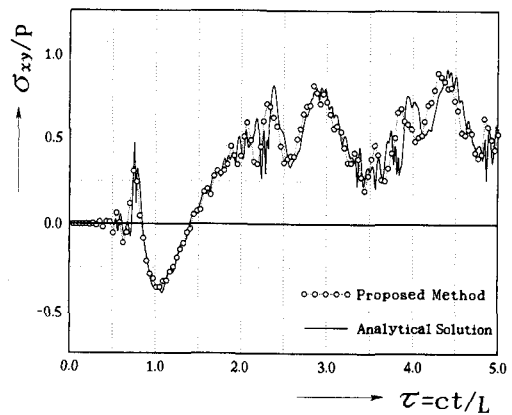


図-4 応力 σ_{xy} の応答

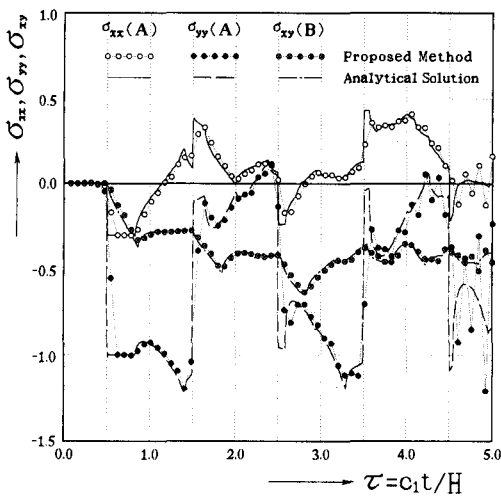


図-5 節点数 1025, 時間分割 64 の場合

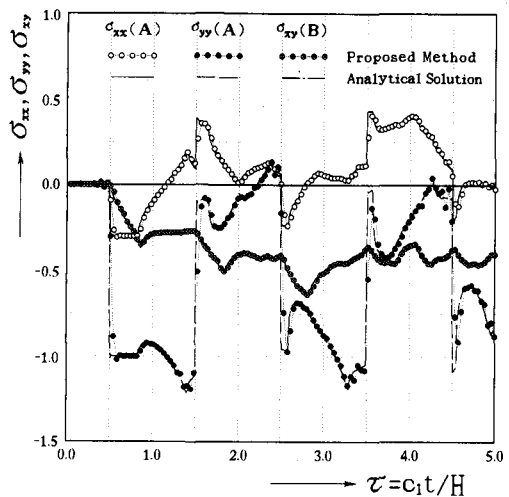


図-6 節点数 3969, 時間分割 128 の場合

間分割数を増やした図-6では、波形の乱れが消え、一部を除いて精度良く時刻歴の応答を求めている。

5. あとがき

本論文は、ラプラス変換された像空間での2次元動弾性体の基礎方程式を、有限要素法により解き、得られた数値解に数値ラプラス逆変換を施して、物理的な変位や応力を求める手法を提案し、その有効性を数値計算例により示した。

本方法では、不連続に変化する応答を比較的精度良く求めることができ、他の種々の境界条件を有する構造にも適用できる。

また、Newmark法などの逐次計算法では、ある時刻での解が求められていなければ、以降の計算が行えない。これに対し、本文の方法では、一連の s に関する剛性方程式は、 s に関して独立になっていることから、並列計算機に容易に適用できる特徴を有している。

参考文献

- 1) 小林治俊・奥田東吾・園田恵一郎：衝撃荷重を受ける単純支持はりの応力波伝播解析，構造工学論文集，Vol.38A，pp.1505-1514，1992.
- 2) 岩崎英治・林 正：ラプラス変換法を用いた骨組構造の過渡応答解析，構造工学論文集，Vol.38A，pp.1445-1454，1992.
- 3) 岩崎英治・林 正：ラプラス変換を用いた線形動弾性問題の変分原理，土木学会第47回年次講演会概要集，I-460，pp.1094-1095，1992.

付録 Newmarkの β 法による結果

参考までに、同様の計算例をNewmarkの β 法により、同じ節点数、時間分割の基で解いた結果を、図-7~10に示す。これらの図より、解析解からのばらつきがあり、特に、応力が不連続に変化する図-7の σ_{xx} と図-9,10の σ_{xx}, σ_{yy} などの応答は、時刻全体を通して誤差が大きい。なお、Newmark法の2つのパラメータ値には、 $\beta = 1/4, \gamma = 1/2$ を用いている。

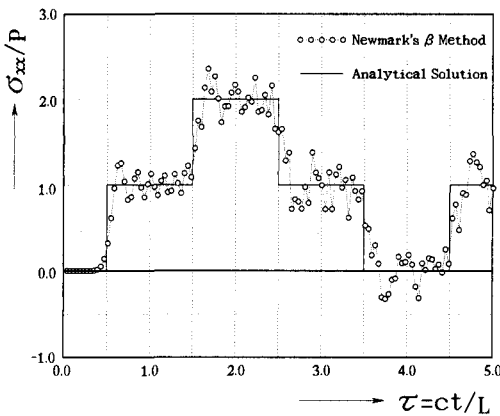


図-7 応力 σ_{xx} の応答

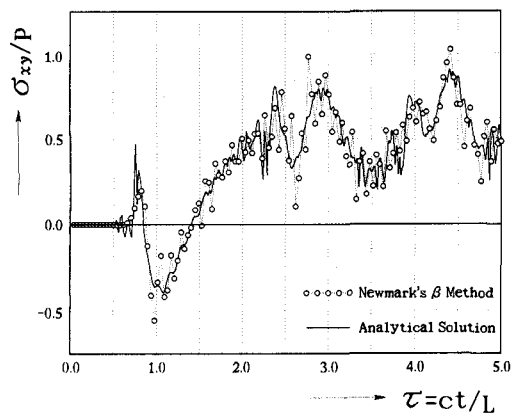


図-8 応力 σ_{xy} の応答

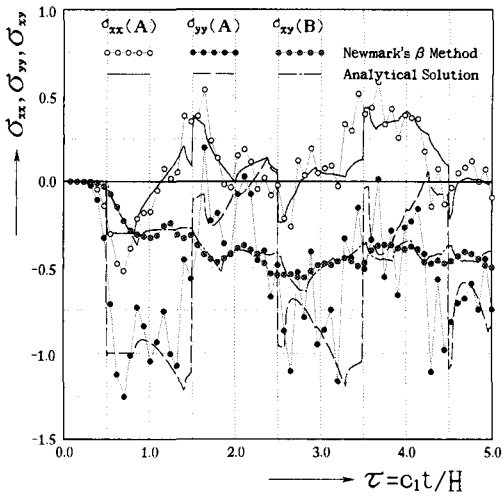


図-9 節点数 1025, 時間分割 64 の場合

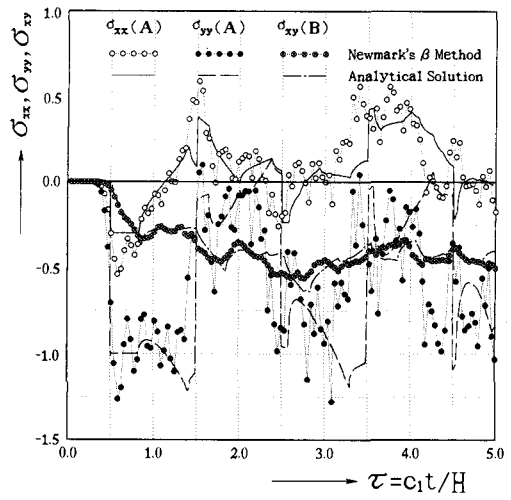


図-10 節点数 3969, 時間分割 128 の場合