

【特別講演】

(1) 衝撃問題における動的解析

日本大学生産工学部 土木工学科 能町純雄

1. はじめに

電子計算機のハードウェアおよびソフトウェアの急速な発展にともない、これまで現象により専門別に取り扱われてきた力学の分野を電磁気も含めて計算力学という形に捉え1つの学問分野が確立されつつある。この計算手法の発達は、現実の現象に近い条件での解析を可能にしてきたが、衝撃応答解析はその重要な位置を占めているものの1つである。

時間依存現象は工学から社会科学に亘る広大な分野に跨がるが、数値解析手法は大きく、差分法、有限要素法、境界要素法などに分けられる。

構造物の動的問題には、風力、地震力による応答、落石、その他の事故時の衝撃荷重などがある。たとえば、原子力プラントでは耐震基準が厳しいため、多くの動的解析が行われている。この外、衝撃問題では、原子力発電格納建造物への飛行機の衝突、核燃料輸送容器の落下事故、乗用車の衝突事故などが近年、計算対象とされている。さらに、破壊力学分野においても動的荷重に対する亀裂の進展、停止問題など重要な問題が扱われている。

Lindholmは材料に対する負荷重方法とひずみ速度範囲との対応を図-1のように分類している。

2. 動的解析手法

固体の動的問題に有限要素法を適用すると、次の式で示される離散化された運動方程式を得る。

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f \quad (1)$$

ここで、M, C, Kはそれぞれ質量、減衰、剛性マトリックスであり、 $\ddot{u}$ ,  $\dot{u}$ , uは加速度、速度、変位ベクトルである。

剛性マトリックス、荷重ベクトルは静的問題と同様に求められるが、一般には時間の関数である。質量マトリックスは、運動エネルギー $\dot{u}^T M \dot{u}/2$ から求められる。要素の形状関数として剛性マトリックスを導いたものと同じものを用いれば、質量マトリックスは非対角行列となるが、関数は必ずしも同じである必要はなく、質量マトリックスを対角行列とするような形状関数を用いることがある。このよう

にして得られた集中質量マトリックス (lumped mass matrix) の場合、陽的時間積分法に対して、計算効率が大幅に改善される。これに対して、剛性マトリックスを導いたものと同じ形状関数を用いて得られる整合質量マトリックス (consistent mass matrix) の場合の計算はやや複雑となる。

減衰マトリックスに対しては理論的な定式化はなされていないが、次式で表されるような比例粘性減衰 (Rayleigh減衰) が假定されることが多い。

$$C = aM + bK \quad (2)$$

ここで、a, bはスカラー定数であり、実験によって求められる。

2. 1 自由振動解析

簡単のために減衰を省略すると自由振動問題の運動方程式は次式となる。

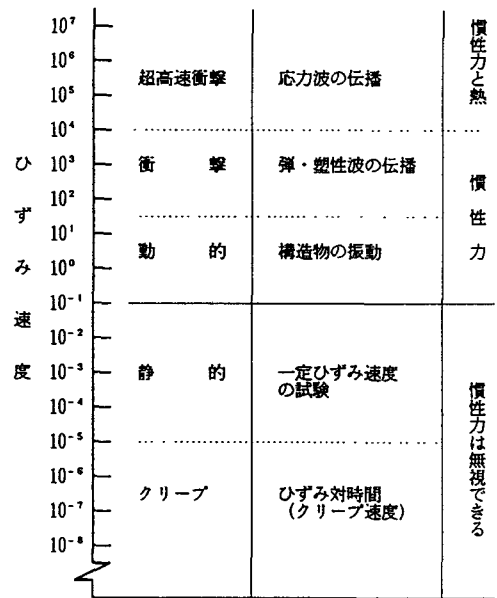


図-1 動的負荷の分類

$$M\ddot{u} + K u = 0 \quad (3) \quad (-\omega^2 M + K) \phi = 0 \quad (4)$$

ここで、調和振動  $u = \phi \sin(\omega t)$ , ( $t$ ; 時間)

(4)式が解を持つためには、 $\det(-\omega^2 M + K) \neq 0$ , すなわち、固有値問題に帰着される。

通常、低次の振動モードのみが問題となるので、比較的少ない自由度で精度の良い解を求めることができる。

## 2. 2 モード重ね合わせ法

減衰がない場合の  $i$  次固有値と固有モードをそれぞれ  $\omega_i^2$ ,  $\phi_i$  とし、これらの低次より  $m$  個 ( $m \leq n$ ,  $n$  は総自由度数) 並べた行列を  $\Omega$ ,  $\Phi$  とし、変位  $u$  を (4) 式のように固有モードの重ね合わせにより表すことができると仮定すると、(1)式は (5)式のように書き換えられる。

$$\Phi^t M \Phi \ddot{q} + \Phi^t C \Phi \dot{q} + \Phi^t K \Phi q = F \quad (5)$$

ただし、

$$u = \Phi^t q, \quad F = \Phi^t f \quad (6)$$

ここで、 $q$  は固有モードの係数ベクトルであり、その次数は  $m$  次となる。固有モードの直交性から  $\Phi^t M \Phi$ ,  $\Phi^t C \Phi$ ,  $\Phi^t K \Phi$  は対角行列となる。また、 $\Phi^t M \Phi$  が単位行列になるように  $\Phi$  を正規化すれば (5)式より (7)式を得る。さらに、比例減衰 (2)式を仮定すると、

$$\Phi^t K \Phi = \Omega \quad (7)$$

$$\ddot{q} + (a I + b \Omega) \dot{q} + \Omega q = F \quad (8)$$

を得る。すなわち、左辺に現れる行列はすべて対角行列になり、各行は次式に示すような独立の運動方程式となる。

$$\ddot{q}_i + 2 h_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = F_i \quad (9)$$

$$\text{ただし、} h_i = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{\omega_i} + b \omega_i \right) \quad (10)$$

ここで、 $q_i$ ,  $F_i$  はそれぞれ  $q$ ,  $F$  の第  $i$  次成分であり、 $h_i$  は第  $i$  次モードの減衰率である。

この方程式群は次に示す時間積分法によって容易に解くことができる。本法は低次モードが卓越した振動解析に対して有効な手法である。

## 2. 3 直接時間積分法

モード重ね合わせ法が適用できないような高次モード成分が卓越する衝撃荷重の問題や極短時間の挙動に注目する場合、または剛性マトリックスが時間とともに変化する問題に対して、時間を小さな差分  $\Delta t$  に分割し (1)式を逐次直接時間積分する方法が用いられる。この方法は、時刻  $t + \Delta t$  の解を求めるため、時刻  $t$  における運動方程式を解く陽的手段と、時刻  $t + \Delta t$  における運動方程式を解く陰的手段に分けられる。陽的手段には Euler 法、Runge-Kutta 法などがあり、質量マトリックスが対角行列であれば連立一次方程式を解く必要がない。陰的手段には後退差分法、Newmark- $\beta$ 法、Wilson- $\theta$ 法などがあり、質量マトリックスの形状によらず連立一次方程式を解く必要がある。また、これ以外にも時刻  $t + \Delta t$  での値を得るために時刻  $t$  での値のみを用いる単段法と、さらに前の値を用いる多段法とがある。その他、区間内で解析的に解を求めてそれを数値的に近似する手法などもある。時間軸に対して重み付き残差法を適用し、差分近似を行う多段法が統一的にまとめられており、さらに単段法についても統一的手法が求められている。

時間積分法の評価基準として、陽解法の安定性については次の関係式が知られている。

$$\Delta t = 2 / \omega_{\max} \quad (11)$$

ここで、 $\omega_{\max}$  は解析モデルの最大固有振動数である。

以下に運動方程式に対する代表的時間スキームを示す。

(1)式を  $t = t_n$  で考え、時間ステップ幅を  $\Delta t$  の一定値として、

(a) 中心差分法 (陽解法)

$$\left( \frac{1}{(\Delta t)^2} [M] - \frac{1}{2\Delta t} [C] \right) \{u\}_{n+1} \\ = \{F\}_n - \left( [K] - \frac{2}{(\Delta t)^2} [M] \right) \{u\}_n - \left( \frac{1}{(\Delta t)^2} [M] - \frac{1}{2\Delta t} [C] \right) \{u\}_{n-1} \quad (12)$$

(b) Houbolt 法 (陽解法)

$$\left( \frac{2}{(\Delta t)^2} [M] + \frac{1}{6\Delta t} [C] + [K] \right) \{u\}_{n+1} \\ = \{F\}_{n+1} + \left( \frac{5}{(\Delta t)^2} [M] + \frac{3}{\Delta t} [C] \right) \{u\}_n - \left( \frac{4}{(\Delta t)^2} [M] + \frac{3}{2\Delta t} [C] \right) \{u\}_{n-1} \\ + \left( \frac{1}{(\Delta t)^2} [M] + \frac{1}{3\Delta t} [C] \right) \{u\}_{n-2} \quad (13)$$

(c) Wilson の  $\theta$  法 (陰解法)  $t = t_n + \theta \Delta t_n$  ( $\theta \geq 1$ ),  $\Delta t_n$  は変化してよい

$$\left( [K] + \frac{3}{\theta \Delta t_n} [C] + \frac{6}{(\theta \Delta t_n)^2} [M] \right) \{u(t_n + \theta \Delta t_n)\} \\ = \left[ \{F(t_n + \theta \Delta t_n)\} + [M] \left( 2 \{\ddot{u}\}_n + \frac{6}{\theta \Delta t_n} \{\dot{u}\}_n + \frac{6}{(\theta \Delta t_n)^2} \{u\}_n \right) \right. \\ \left. + [C] \left( \frac{\theta \Delta t_n}{2} \{\ddot{u}\}_n + 2 \{\dot{u}\}_n + \frac{3}{\theta \Delta t_n} \{u\}_n \right) \right] \quad (14)$$

(d) Newmark の  $\beta$  法 (陰解法)  $t = t_n$  で  $\Delta t_n$  は変化してよい

$$\left( [K] + \frac{\delta}{\beta \Delta t_n} [C] + \frac{1}{\beta (\Delta t_n)^2} [M] \right) \{U\}_{n+1} \\ = \left[ \{F\}_{n+1} + [M] \left\{ \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \{\ddot{u}\}_n + \frac{1}{\beta \Delta t_n} \{\dot{u}\}_n + \frac{1}{\beta (\Delta t_n)^2} \{u\}_n \right\} \right. \\ \left. + [C] \left\{ \left( \frac{\delta}{2\beta} - 1 \right) \Delta t_n \{\ddot{u}\}_n + \left( \frac{\delta}{\beta} - 1 \right) \{\dot{u}\}_n + \frac{\delta}{\beta \Delta t_n} \{u\}_n \right\} \right] \quad (15)$$

### 3. 衝撃問題

衝撃問題は 2 物体の衝突など外力が急激に変化するときの短時間の応答を追うもので、支配方程式は一般の動的問題と変わらないが、応力波伝播、局所的あるいは短時間の挙動の表現など、細かい要素分割、細かい時間増分の取り扱いが要求される。また、実際に扱われる問題は 3 次元的な現象であることが多く、この場合、計算コストは増大するので、詳細な解析を行うには超大型機でも困難を伴う。

また、衝撃力による応力-ひずみ関係式 (構成式) が非弾性挙動を示すようになると、変形速度の大きさと相まって静的な構成式とは異なってくる。これをひずみ速度依存性というが、非弾性衝撃問題を精度よく解析するため、ひずみ速度依存の構成モデルは不可欠である。

#### 3.1 衝撃問題のための時間積分法

衝撃問題では陽解法が有利であるが、条件安定の上で、時間増分に対する制限が厳しい。また、無条件安定となる陰解法については不要な高次振動の数値誤差が重なって精度を下げる原因ともなる。この高次の数値振動を抑えるため、積極的に減衰項を導入する方法と数値的減衰を含む時間積分法を用いる方法がある。Rayleigh 減衰を用い、 $a=0$  とおけば、(13) 式からも分かるように  $\omega$  の大きいモードで減衰率を大きくすることができる。このとき固有周期  $T_i$  が例えば時間増分  $\Delta t$  よりも小さい振動モードにおいて過減衰となるように、すなわち  $h_i \geq 1$  と仮定されることがある。 $\omega_i = 2\pi/T_i$  と (11) 式より

$$b_i > T_i / \pi = \Delta t / \pi \quad (16)$$

この場合は、低次モードに対しても  $\omega_i$  に比例する減衰を受けるのであまり好ましくない。

さて、数値的減衰を含む時間積分法として、最近よく用いられるH-H-T法はNewmark- $\beta$ 法を基本とし、数値的減衰のパラメータ $\alpha$ を導入する。Newmark- $\beta$ 法に負の $\alpha$ による減衰の影響で固有周期が時間増分より小さい低次モードの範囲で減衰の小さい、好ましい減衰特性を持つ時間積分法が得られる方法である。

### 3. 2 一点積分法とアワーグラスモード制御

低ひずみ要素では、剛性マトリックスの計算における要素内積分は解析的に行えるが、それ以外の要素では、数値積分をする必要がある。通常、一次要素では1方向に2点(2次元では4点、3次元では8点)の積分点を用い厳密な積分を行っているが、計算時間の短縮のため、積分点を一点に減らした低減積分(reduced integral)を行うことがある。このとき、積分が厳密に行われないため、力学的エネルギーの変化を伴わない変形モード、いわゆるアワーグラスモードが発生し数値的不安定の原因となる。D.P.Flanaganはこのモードを抑制するような接点力を加えることにより、この不安定現象を取り除く計算法を示している。

図-2は、その例題で、一様荷重を受ける両端で支持されたはり(対称性のため左半分のみ解析)のアワーグラスモード抑制力を用いない場合の各時間ステップの変形を示している。アワーグラスモード抑制のため人工剛性を与えると図-3のように安定な解を得る。ただし、アワーグラスモードは常に生じるとは限らず、境界条件に敏感である。例えば、同じ要素分割で片持ばりを解析すると、アワーグラスモード抑制を全く行わなくても安定な解が得られる。

### 4. D Y N A 3 D

材料の非線形性を状態方程式と偏差応力モデルに分解するHydrodynamicコードの手法を取り入れ、1積分点立体要素1種のみを用いて表現した一般連続体の衝撃計算有限要素コードDYNA3D(1986)はL.L.N.L.のJ.O.Hallquistを中心とするグループにより開発され、有限要素コードも陽的差分コードとはほぼ同様に弾塑性、大変形問題を実用的なレベルで解析する能力を持つに至った。

#### 4. 1 計算手法

通常の有限要素コードでは、ひずみ-変位関係を定める作用素マトリックス〔B〕と材料の構成式マトリックス〔D〕として、

$$\int_{v_e} \{B\}^t \{D\} \{B\} dv_e \{u\} = \{K\} \{u\} \quad (17)$$

により内力を定め、減衰項がない場合には、運動方程式(1)のC=0として、Newmarkの $\beta$ 法や、中央差分法を用いて時間積分を行い、変位量を算出する。このとき、ひずみ-変位関係式および構成式が非線形性をもてば、

〔B〕および〔D〕マトリックスには非線形項が加わり、剛性マトリックス〔K〕もこの非線形性に対応して、その都度計算されることになる。DYNA3Dでは、これを、

$$\{F\} = \Sigma \{L\}^t \int_{v_e} \{B\}^t \{\sigma\} dv_e \quad (18)$$

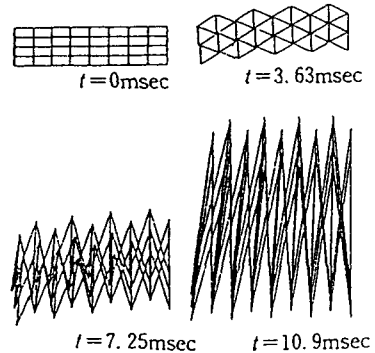
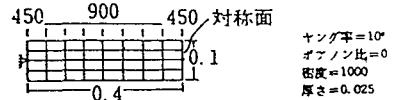


図-2 単純支持ばりの変形  
(アワーグラスモード制御なし)

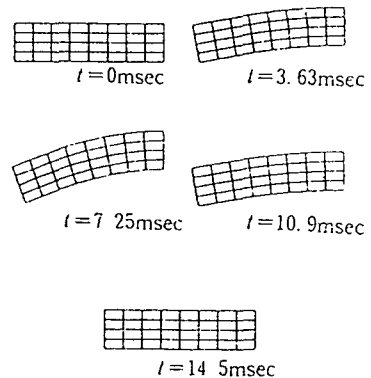


図-3 単純支持ばりの変形  
(アワーグラスモード制御あり)

ここで、 $\{\sigma\}$  は応力ベクトルとして内力を計算してこれに変える。この応力はJaumann の応力速度を用いて各時間ごとに計算される。また、 $[L]$  は、要素剛性行列を全体マトリックスにアセンブルするときの作用素である。

いま、ひずみベクトル $\{\varepsilon\}$ を用いて、 $\{\sigma\} [D] \{\varepsilon\} = [D] [B] \{u\}$ と置きなおせば、通常の剛性マトリックスとその逆行列の作成にかかる計算時間を考えると、厳密性を犠牲にしているが、衝撃計算を実用的なレベルで実現可能にしたいという意味で価値あるものと考えられる。

#### 4. 2 時間増分値の設定

陽解法では、質量マトリックスが対角化されていれば、連立方程式を解く必要がないため、計算時間が大幅に縮小される。しかしながら、条件安定公式であるため、線形解析の場合、その時間増分値は、次式により制限される。

$$\Delta t < \frac{1}{c} \{ (h^2 + 1)^{1/2} - h \} \quad (19)$$

ここで、 $h$  は減衰係数、 $c$  は波動伝播速度、 $l$  は節点間最小距離である。

この条件式は、無減衰( $h=0$ )の場合、よく知られたCourant-Friedrichs-Law 条件に一致する。多くの計算コードでは、この時間増分値に安全係数を乗じた値が自動的に計算される。ラグランジュコードでは、変形量の増大によりステップ数が極度に増加したり、メッシュのkink (もつれ) が発生する場合がある。

#### 4. 3 材料モデル

流体と構造物の相互作用、固体材料の衝撃破壊を表現するため、ひずみ、ひずみ速度、あるいは内部エネルギー関数により表される降伏モデルと、体積変形を表す状態方程式を組あわせて、系の材料特性を記述する構成となっているものが多い。なお、STEALTHコードとDYNA3Dコードは公開コードとなっているため、使用者が改造することも可能である。

#### 4. 4 接触・離接

DYNA3Dでは、これら差分系コードと異なり、接点拘束法、処罰法および分布パラメータ法と呼ばれる3種のアプローチを用いて、接触問題を取り扱う。

接点拘束法は、粗いメッシュ間と細かいメッシュ間の接合面において、異なる質量分布間の運動量を等価にするために用いられる。また、分布パラメータ法は、すべり境界面上での圧力および質量から、両面の垂直加速度成分および垂直速度成分の適合性を満たすために用いられる。

処罰法は、両境界面における接触点の進入量より、境界接点力を算出し、力の伝達と両面の離接を計算するために用いられる。

#### 4. 5 破壊

媒体を伝播してきた応力波は、端部において反射し、次の進行波と重なり合ったところで大きな引張力が生じる。この引張力が媒体の破断強度を超えると、引張破壊であるスポーリングが生じる。

スポール状態の規定は、平均応力が負のある値になった場合に、その要素は存在しないものとして扱う(圧縮力が働けば、その要素はリカバリーする)場合が多い。また、比体積、内部エネルギー密度などの関数として平均応力を定義する場合もある。

このような破壊とは別に、飛翔体のもつ運動エネルギーが非常に大きく、被衝撃体の体積膨張により破裂するような破壊現象を取り扱う場合も生じる。この種の破壊も、数値計算上、連続体として表現する必要があるため、そのセルの体積が初期のセルの体積の係数倍になった時点で、セルのせん断抵抗がなくなり、状態方程式だけで記述される物質として扱うような表現方法が取られている。例えば、DYNA3DのSoil and Crushable Form モデルでは、降伏関数 $\phi$ を

$$\phi_s = \frac{1}{2} S_{ij} \cdot S_{ij} - (a_0 + a_1 P + a_2 P^2) \quad (20)$$

ここで、 $S_{ij}$ は偏差応力、 $P$ は圧力、 $a_0$ 、 $a_1$ 、 $a_2$ は係数と定義し、破壊が生じた場合に、第2項の状態方程式のみで規定される材料として扱う。

## 5. 数値計算

5.1 Sandia国立研究所にて1,000Kg 爆弾が剛壁面に衝突した場合、弾頭部の変形だけで、運動エネルギーを吸収する構造を検討するための実験とDYNA3Dによる解析が1980年に行われた。2/9スケールモデルが準静的に10%傾斜した剛壁面に衝突させる実験と、574cm/sの速度で同じ壁面に衝突する動的解析が実施された。結果が図-4に得られている。図からわかるように外形変形にはほとんどちがいが見られなかった。降伏応力とひずみ速度の関係はSymonds-Tingによる。

$$\sigma_y = \sigma_0 \left[ 1 + \left( \frac{\dot{\epsilon}}{D} \right)^{1/P} \right] \quad (21)$$

$\sigma_0$ は $\dot{\epsilon} = 0$ のときの $\sigma_y$ 、 $P$ 、 $D$ は実験結果から最小2乗近似から求められる。約4000要素数である。

5.2 250×250×40cm, RC床版に100Kgの径30cm円柱ストライカーが50m/sで衝突した時の数値結果が図-5に示されている。要素数1600で、コンクリートの破壊条件はRendlic面と静水圧軸に対して $\sigma_{oct}$ の放物回転面と与え鉄筋は、Von Mises条件に従うとしたものである。コンターは2000(MICRO)である。

### 参考文献

矢川元基, 関東康祐: 計算力学における動的解析の状況, 数理科学, No.282, 12月, 1986, P.6~9  
林 卓夫, 田中吉之助: 衝撃工学, 日刊工業新聞社, 10月, 1988

J.O.Hallquist : THEORETICAL MANUAL FOR

DYNA3D, 1983

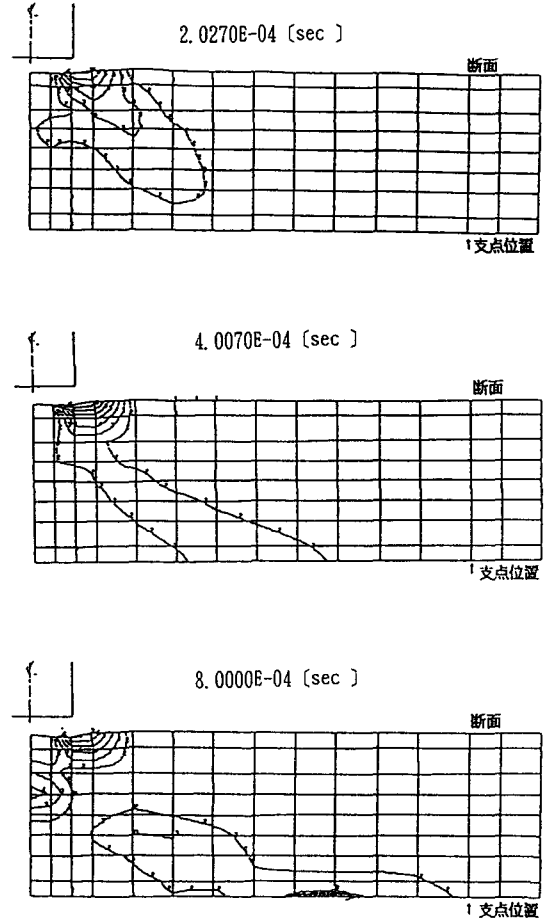


図-4 中央断面主応力分布変化図

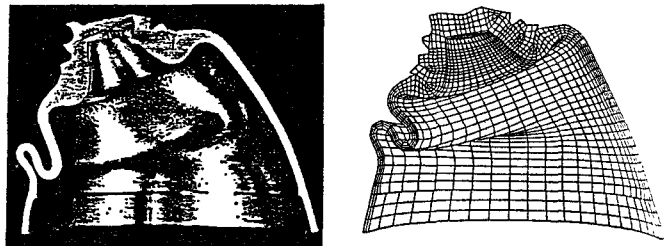


図-5 変形状の実験との比較