(22) 衝撃荷重を受ける二層円筒殻の解析

北海道大学　工学部　三上　隆

1. はじめに

衝撃荷重を受ける円筒殻の挙動は古くから研究課題に取り上げられているが，弾性的挙動に限定しても今なお完全な解明に至っていないようである。衝撃荷重を受ける円筒殻の解析には，波長が殻の代表長さに比べて十分長い場合はDonnellやFluggeなどの古典殻理論が，波長が短い場合はせん断変形と回転慣性の影響を考慮した例えばMirskyとHerrmannなどの修正殻理論が一般に用いられる。しかし二層円筒殻に対しては，例えばBushell[1]やWeingarten[2]の研究に見られるように古典殻理論に基づく場合が多い。本研究ではMirskyとHerrmann[3]の修正殻理論の二層円筒殻への適用を試み，衝撃荷重を受けるときの動的挙動を固有関数展開法[4,5]により解析する方法を示す。

2. 基礎方程式

基礎方程式の誘導に当たって，以下の仮定を設ける。

①層間のすべりはない。　②各層は弾性係数が異なる等方性材料とし，等しいポアソン比を持つ。

経線，円周方向座標を(x, y)，法線方向座標zを垂直外向きに定める。座標(x, y, z)に対応する変位成分を(u, v, w)，(x, y)軸に垂直な断面の回転角成分を(β_x, β_y)とする。合応力および合モーメント成分を$(N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}, Q_x, Q_y)$および$(M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx})$で表示する。時間を$t$，ポアソン比を$\upsilon$，弾性係数$E$，厚さ$h$ および単位体積当りの質量ρをそれぞれ(E_1, E_2)，(h_1, h_2)および(ρ_1, ρ_2)と表す。ただし，添字1は内側の層，添字2は外側の層の諸量を表すものとする。さらに，円筒殻の半径および長さをそれぞれa, Lで表す。

上述の仮定②によれば，中央面ひずみと合モーメントあるいは曲率と面内合応力等を関係づける曲げ-伸びカップリング剛性を零になるように殻の参照面を定めることができ，図-1のdは次式で与えられる。

$$d=(E_1 h_1^2-E_2 h_2^2)/\{2(E_1 h_1+E_2 h_2)\} \quad (1)$$

Mirsky-Herrmannの円筒殻理論のひずみ－変位関係を採用すれば，二層円筒殻の合応力および合モーメントは次のように得られる。

$$N_x=Ku_{,x}+\upsilon K(v_{,y}+w/a)+D\beta_{x,x}/a \quad (2.1)$$
$$N_y=\upsilon Ku_{,x}+(K+D/a^2)(v_{,y}+w/a)-D\beta_{y,y}/a \quad (2.2)$$
$$N_{xy}=(1-\upsilon)(Kv_{,x}+D\beta_{y,x}/a+Ku_{,y})/2 \quad (2.3)$$
$$N_{yx}=(1-\upsilon)\{Kv_{,x}+(K+D/a^2)u_{,y}-D\beta_{x,y}/a\}/2 \quad (2.4)$$
$$Q_x=\kappa(1-\upsilon)K(w_{,x}+\beta_x) \quad (2.5)$$
$$Q_y=\kappa(1-\upsilon)(K+D/a^2)(w_{,y}-v/a+\beta_y) \quad (2.6)$$
$$M_x=D(\beta_{x,x}+\upsilon\beta_{y,y}+u_{,x}/a) \quad (2.7)$$
$$M_y=D(\upsilon\beta_{x,x}+\beta_{y,y}-v_{,y}/a-w/a^2) \quad (2.8)$$
$$M_{xy}=(1-\upsilon)D(v_{,x}/a+\beta_{y,x}+\beta_{x,y})/2 \quad (2.9)$$
$$M_{yx}=(1-\upsilon)D(\beta_{y,x}+\beta_{x,y}-u_{,y}/a)/2 \quad (2.10)$$

ここで，$y=a\theta$，コンマ(,)に続く添字は偏微分を表し，κはせん断補正係数である。KとDはそれぞれ等価伸び剛性，等価曲げ剛性を表し，次のようなもである。

$$K=(E_1h_1+E_2h_2)/(1-\nu^2) \tag{3.1}$$

$$D=[E_1h_1^3+E_2h_2^3-3(E_1h_1^2-E_2h_2^2)^2/\{4(E_1h_1+E_2h_2)\}]/\{3(1-\nu^2)\} \tag{3.2}$$

等価厚さをh_0，等価弾性係数をE_0と記し，式(3)を次式

$$K=E_0h_0/(1-\nu^2) \tag{4.1}$$

$$D=E_0h_0^3/\{12(1-\nu^2)\} \tag{4.2}$$

で表せば，式(2)は次の等価厚さh_0と等価弾性係数E_0を有する単層円筒殻の合応力および合モーメントと等価である。

$$h_0=(12D/k)^{1/2} \tag{5.1}$$

$$E_0=(1-\nu^2)(K^3/12D)^{1/2} \tag{5.2}$$

二層円筒殻の基礎微分方程式は，ひずみエネルギー，運動エネルギーを用いて，Hamiltonの原理より次のように得られる。

$$N_{x,x}+N_{yx,x}=(M_1+M_2/a)u_{,tt}+(M_2+M_3/a)\beta_{x,tt} \tag{6.1}$$

$$N_{y,y}+N_{xy,x}+Q_y/a=(M_1+M_2/a)v_{,tt}+(M_2+M_3/a)\beta_{y,tt} \tag{6.2}$$

$$Q_{x,x}+Q_{y,y}-N_y/a=(M_1+M_2/a)w_{,tt}+p_z \tag{6.3}$$

$$M_{x,x}+M_{yx,y}-Q_x=(M_2+M_3/a)u_{,tt}+M_3\beta_{x,tt} \tag{6.4}$$

$$M_{y,y}+M_{xy,x}-Q_y=(M_2+M_3/a)v_{,tt}+M_3\beta_{y,tt} \tag{6.5}$$

ここでp_zは法線方向の作用荷重であり，M_1, M_2, M_3はそれぞれ並進慣性，並進－回転慣性および回転慣性を表し次式で与えられる。

$$M_1=\rho_1h_1+\rho_2h_2 \tag{7.1}$$

$$M_2=(\rho_1h_1+\rho_2h_2)d-(\rho_1h_1^2-\rho_2h_2^2)/2 \tag{7.2}$$

$$M_3=(\rho_1h_1+\rho_2h_2)d^2-(\rho_1h_1^2-\rho_2h_2^2)d+(\rho_1h_1^3+\rho_2h_2^3)/3 \tag{7.3}$$

式(2)を式(6)に代入すれば，基礎微分方程式は次のように変位成分で表示される。

$$L_{11}u+L_{12}v+L_{13}w+L_{14}\beta_x+L_{15}\beta_y=(a^2M_1/K)(I_1u_{,tt}+aI_2\beta_{x,tt}) \tag{8.1}$$

$$L_{21}u+L_{22}v+L_{23}w+L_{24}\beta_x+L_{25}\beta_y=(a^2M_1/K)(I_1v_{,tt}+aI_2\beta_{y,tt}) \tag{8.2}$$

$$L_{31}u+L_{32}v+L_{33}w+L_{34}\beta_x+L_{35}\beta_y=(a^2M_1/K)I_1w_{,tt}+(a^2/K)p_z \tag{8.3}$$

$$L_{41}u+L_{42}v+L_{43}w+L_{44}\beta_x+L_{45}\beta_y=(a^2M_1/K)(I_2u_{,tt}+aI_3\beta_{x,tt}) \tag{8.4}$$

$$L_{51}u+L_{52}v+L_{53}w+L_{54}\beta_x+L_{55}\beta_y=(a^2M_1/K)(I_2v_{,tt}+aI_3\beta_{y,tt}) \tag{8.5}$$

ここで微分演算子L_{11}～L_{55}は次のようなものである。例えば

$L_{11}=a^2()_{,xx}+a^2(1-\nu)(1+k)()_{,yy}/2$、　$L_{12}=L_{21}=(1+\nu)a^2()_{,xy}/2$

さらに

$k=(D/K)/a^2$,　　$I_1=1+d/a-(h_1/a)(\alpha_2/\alpha_1)/2$

$I_3=(d/a)^2-(d/a)(h_1/a)(\alpha_2/\alpha_1)+(h_1/a)^2(\alpha_3/\alpha_1)/3$

$I_2=1-I_1+I_3$

ここで

$\alpha_1=1+(\rho_2/\rho_1)(h_2/h_1)$,　　$\alpha_2=1-(\rho_2/\rho_1)(h_2/h_1)^2$

$\alpha_3=1+(\rho_2/\rho_1)(h_2/h_1)^3$

なお式(8)は，$h_1=h_2=h/2$, $E_1=E_2=E$および$\rho_1=\rho_2=\rho$とおけばMirsky-Herrmann の与えた基礎方程式に一致する。

$x=0$と$x=L$における境界条件は(u, N_x), (v, N_{xy}), (w, Q_x), (β_x, M_x)および(β_y, M_{xy})の適当な組合せで規定され，本報告で取り上げる両端支持条件に対しては次式となる。

$$w=v=\beta_y=N_x=M_x=0 \tag{11}$$

3. 自由振動問題

式(11)の条件を満足する変位関数として次式を採用する。

$$u(x,y,t)=\Sigma aU^0_{mn}\cos(\alpha x)\cos(ny/a)T_{mn}(t)=\Sigma aU_{mn}T_{mn}(t) \quad (10.1)$$

$$v(x,y,t)=\Sigma aV^0_{mn}\sin(\alpha x)\sin(ny/a)T_{mn}(t)=\Sigma aV_{mn}T_{mn}(t) \quad (10.2)$$

$$w(x,y,t)=\Sigma aW^0_{mn}\sin(\alpha x)\cos(ny/a)T_{mn}(t)=\Sigma aW_{mn}T_{mn}(t) \quad (10.3)$$

$$\beta_x(x,y,t)=\Sigma X^0_{mn}\cos(\alpha x)\cos(ny/a)T_{mn}(t)=\Sigma X_{mn}T_{mn}(t) \quad (10.4)$$

$$\beta_y(x,y,t)=\Sigma Y^0_{mn}\sin(\alpha x)\sin(ny/a)T_{mn}(t)=\Sigma Y_{mn}T_{mn}(t) \quad (10.5)$$

ここでU^0_{mn}～Y^0_{mn} は固有振動モードの係数，$T_{mn}(t)$は一般化座標，$\alpha=m\pi/L$である。

さて式(8)で$p_z=0$，式(10)で$T_{mn}(t)=\exp(i\omega t)$，［$\omega$=固有円振動数］と表し，式(12)を式(8)代入すれば，次の振動数方程式が得られる。

$$[\,[K]-\Omega_{mn}^2\,[M]\,]\ \{\Delta\}=\{0\} \quad (11)$$

ただし　$\{\Delta\}$ と無次元化固有振動数Ω_{mn}^2 は次のようなものである。

$$\{\Delta\}^T=\{U^0_{mn}\ V^0_{mn}\ W^0_{mn}\ X^0_{mn}\ Y^0_{mn}\},\quad \Omega_{mn}^2=a^2(\rho_1h_1+\rho_2h_2)/K \quad (12)$$

マトリックス［K］と［M］の非零成分は以下となる。

$K_{11}=\lambda^2+(1+k)n^2\gamma_1$,　$K_{12}=k_{21}=-\lambda n\gamma_2$,　$K_{13}=K_{31}=-\upsilon\lambda$,　$K_{14}=K_{41}=k(\lambda^2-n^2\gamma_1)$

$K_{22}=\gamma_1\lambda^2+(1+k)(n^2+\kappa\gamma_1)$,　$K_{23}=K_{32}=(1+k)(1+\kappa\gamma_1)n$

$K_{25}=K_{52}=\gamma_1\kappa\lambda^2-kn^2-(1+k)\kappa\gamma_1$,　$K_{33}=\gamma_1\kappa\lambda^2+(1+k)(1+\kappa\gamma_1n^2)$

$K_{34}=K_{43}=\gamma_1\kappa\lambda$,　$K_{35}=K_{53}=-\{k+(1+k)\kappa\gamma_1\}n$,　$K_{44}=k\lambda^2+(\kappa+kn^2)\gamma_1$

$K_{45}=K_{54}=-\lambda nk\gamma_2$,　$K_{55}=\gamma_1k\lambda^2+kn^2+(1+k)\kappa\gamma_1$

$M_{11}=M_{22}=M_{33}=I_1$,　$M_{14}=M_{25}=M_{41}=M_{52}=I_2$,　$M_{44}=M_{55}=I_3$

ここで

$\lambda=m\pi a/L$,　$\gamma_1=(1-\upsilon)/2$,　$\gamma_2=(1+\upsilon)/2$

4. 衝撃応答解析

作用荷重を次式で表す。

$$p_z(x,y,t)=\Sigma q_{mn}\sin(\alpha x)\cos(ny/a)F_{mn}(t) \quad (13)$$

ここにq_{mn} はフーリエ係数である。

固有モードの直交性を利用すれば，ノルムJ_{mn}は次のように得られる。

$$J_{mn}=\int_0^L\int_0^{2\pi a}[I_1(U_{mn}^2+V_{mn}^2+W_{mn}^2)+2I_2(X_{mn}U_{mn}+Y_{mn}V_{mn})+I_3(X_{mn}^2+Y_{mn}^2)]\,dxdy \quad (14)$$

固有関数展開法(ノーマルモード法)によれば，一般化座標$T_{mn}(t)$に対する次の2階の微分方程式が得られる。

$$d^2T_{mn}(t)/dt^2+\Omega_{mn}^2T_{mn}(t)=F_{mn}(t)/J_{mn} \quad (15)$$

ここで

$$F_{mn}(t)=(a/K)\int_0^L\int_0^{2\pi a}W_{mn}p_z(x,y,t)dxdy \quad (16)$$

変位と速度が零の同次初期条件に対する式(15)の解は，次のように得られる。

$$T_{mn}(t)=(1/J_{mn})\int_0^t F_{mn}(t)h_{mn}(t-\tau)d\tau \quad (17)$$

従って衝撃荷重を受ける円筒殻の変位，応力などは，式(17),式(10)および式(2)用いて求められる。

5. 数値計算例

数値計算に用いた殻諸元は以下のものである。

$h_1/h_2=30$,　$L/a=3$,　$E_2/E_1=0.07$,　$\rho_2/\rho_1=0.7$,　$h_1/a=0.01$

$h_2/a=0.3$,　$\upsilon=0.3$,　$\kappa=\pi^2/12$

図-2に自由振動問題に対する解析結果(Ω$_{mn}$-n曲線)を示す。図でm, nはそれぞれ経線方向，円周方向の波数を表す。衝撃荷重に対する解析例は発表当日に示す。

6. まとめ

本研究は，衝撃荷重を受け各層のポアソン比が等しく，弾性係数の異なる等方性材料からなる二層円筒殻に対して，せん断変形と回転慣性の影響を考慮したMirsky-Herrmannの修正殻理論と固有関数展開法（ノーマルモード法）を用いて解析する方法を述べたものである。

参考文献

1)Bushnell, D. : Dynamic responce of two-layered cylindrical shells to time-dependent loads, AIAA J, pp.1698-1703, 1965.

2)Weingarten, I. : Free vibrations of multilayered cylindrical shells, Experimental Mechanics pp.200-205, 1964.

3)Mirsky, I. and Herrmann, G. : Nonaxially symmetric motions of cylindrical shells, J.Acoust.Soc.Am., pp.1116-1123, 1957.

4)Magrab, E.B. : Vibrations of Elastic Structual Members, Sijthoff & Noordhoff, 1979.

5)Reismann, H. and Medige, J. : Forced motion of cylindrical shells, Proc. ASCE, EM5, pp.1169-1182, 1968.

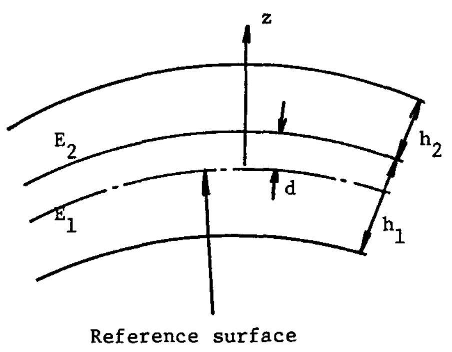

図-1 二層円筒殻

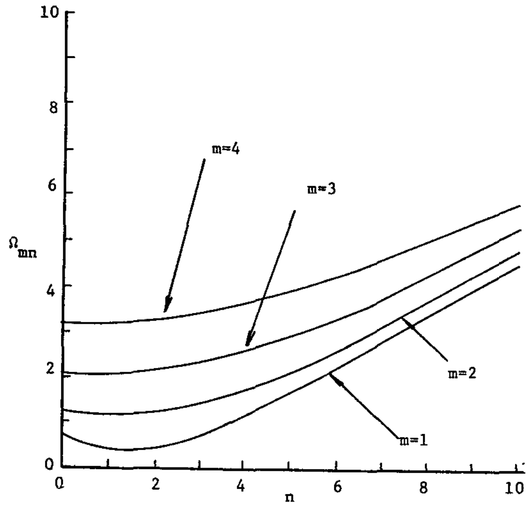

図-2 Ω$_{mn}$-n 曲線