

鋼トラス橋のリダンダンシー評価のための非線形解析法について

A static non-linear analysis method for redundancy evaluation of steel truss bridges

三好崇夫*, 西村宣男**, 立石優一***, 奈良 敬****
Takao Miyoshi, Nobuo Nishimura, Yuichi Tateishi and Satoshi Nara

*博(工), 大阪大学大学院助教, 工学研究科地球総合工学専攻 (〒565-0871 大阪府吹田市山田丘 2-1)

**工博, 大阪大学名誉教授 (〒565-0871 大阪府吹田市山田丘 2-1)

大阪大学大学院博士前期課程, 工学研究科地球総合工学専攻 (〒565-0871 大阪府吹田市山田丘 2-1)

****工博, 大阪大学大学院教授, 工学研究科地球総合工学専攻 (〒565-0871 大阪府吹田市山田丘 2-1)

This paper proposes a static non-linear analysis method for redundancy evaluation of steel truss bridges. Since many main members of the steel truss bridge consist of spatial frames with closed cross-sections, accurate evaluation of the torsional rigidity should be required in the elasto-plastic state. Especially, the implicit stress integration method and the evaluation method of the elasto-plastic stiffness are proposed in this study, in order to improve accuracy and efficiency. Validity and reliability of the proposed method are clarified through some numerical examples. As a result, it is shown that the proposed method has higher accuracy and more excellent efficiency than conventional ones. Finally, a numerical example for redundancy of a truss bridge is demonstrated.

Key Words : steel truss bridge, thin-walled closed cross-section, implicit stress integration, redundancy

キーワード: 鋼トラス橋, 薄肉閉断面部材, 陰的応力積分法, リダンダンシー

1. はじめに

2007年の米国ミネソタ州におけるI-35W橋の崩壊事故, および木曾川大橋, 本荘大橋におけるトラス橋斜材の破断事故以降, トラス橋の部材破断時のリダンダンシー評価を目的とした多くの研究^{1)~3)}が報告されている。それらの研究では, 床版, 床組やガセットプレートがリダンダンシーに及ぼす影響¹⁾, 断面力照査式を用いたリダンダンシー評価法²⁾, 部材破断時の衝撃の影響³⁾などが明らかにされている。トラス橋のリダンダンシー評価は, 疲労や腐食に伴う部材破断と橋梁の崩壊との関係を把握することによって, 重点的に点検すべき部材の優先順位付けが出来るなど, 維持管理の合理化につながる事が期待されている。

一般的に, トラス橋の弦材, 圧縮斜材等の主構部材には, 薄肉閉断面部材が多用されているため, 非線形解析によって部材破断時のリダンダンシーを評価するためには, 軸力や二次曲げによる直応力に

加えて, ねじりによるせん断応力の影響も考慮し, 二軸応力場として弾塑性問題を取り扱うのが安全側である。また, 部材破断後の断面力の再分配挙動や崩壊過程を追跡するためには, 部材破断による剛性低下と衝撃的に解放される断面力を考慮する必要がある。

直応力と, ねじりによるせん断応力との二軸応力状態を考慮して, 閉断面骨組部材の弾塑性問題が取り扱える解析法については, 既にいくつかの手法^{4)~8)}が提案されている。このうち, トラス橋の薄肉閉断面骨組部材に, 文献4), 5)の定式化に基づく骨組要素の適用を考えた場合, 弾塑性解析における応力増分の算定方法(以下では応力積分法と称する。)については, 文献7)で陽的な手法が提案されているものの, 変形後の降伏条件が満たされる陰的な手法は提案されていない。また, これまでに, 文献4), 5)の定式化に対して, 解析精度や効率を向上させるための手法も提案されていない。

そこで, 本論文では, 鋼トラス橋に部材破断が生

じた際の断面力の再分配挙動や、崩壊過程の把握に際して、鋼部材に文献 4), 5) の定式化に基づく骨組要素を用いた場合の精度や効率を改善するための弾塑性剛性の評価法と陰的応力積分法について提案する。また、部材破断後の挙動を厳密に把握するためには、衝撃の影響を動的解析によって考慮すべきであるが、本研究では、静的解析によって把握するための手法を示す。ただし、提案する薄肉閉断面骨組部材の弾塑性解析法の動的問題への拡張は容易である。そして、最後に、数値解析例を通して、提案手法の妥当性、精度や効率性について示す。

2. 弾塑性剛性の評価法と陰的応力積分法

本節では、文献 4), 5) の薄肉閉断面骨組要素に対して、弾塑性解析の解析精度や効率を改善するための弾塑性剛性の評価法と陰的応力積分法について提案する。なお、薄肉閉断面骨組要素の定式化の詳細については文献 4), 5) や 8) を参照されたい。

2. 1 弾塑性剛性の評価法

文献 4), 5) の定式化に基づけば、薄肉閉断面骨組要素の断面力増分と一般化ひずみ増分の関係は次式で表される。

$$\{\Delta f\} = ([S^e] + [S^p])\{\Delta e\} \quad (1)_1$$

$$\{\Delta f\} = \{\Delta N \quad \Delta M_z \quad \Delta M_y \quad \Delta M_x\}^T \quad (1)_2$$

$$\{\Delta e\} = \{\Delta \varepsilon_0 \quad \Delta \psi_z \quad \Delta \psi_y \quad \Delta \theta\}^T \quad (1)_3$$

$$[S^e] = \begin{bmatrix} EA_e & -ES_z & ES_y & 0 \\ & EI_z & -EI_{yz} & 0 \\ & & EI_y & 0 \\ sym. & & & GJ \end{bmatrix} \quad (1)_4$$

$$[S^p] = \begin{bmatrix} S_{11}^p & S_{12}^p & S_{13}^p & S_{14}^p \\ & S_{22}^p & S_{23}^p & S_{24}^p \\ & & S_{33}^p & S_{34}^p \\ sym. & & & S_{44}^p \end{bmatrix} \quad (1)_5$$

図-1 に示すように、薄肉一室閉断面骨組部材を離散化した要素 i 端のせん断中心 O を原点とする右

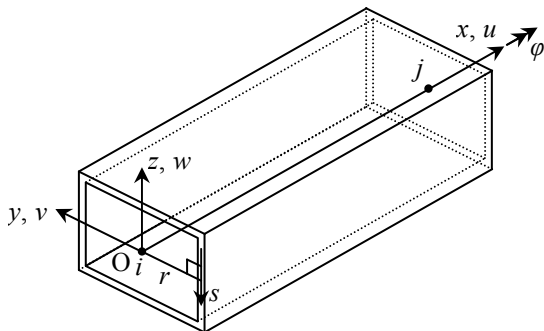


図-1 移動要素座標系と変位の定義

手直交直線座標系を移動要素座標系 ($x-y-z$ 座標系) とすると、式(1)の第 2 式において、 ΔN は軸力増分、 ΔM_z 、 ΔM_y はそれぞれ z 、 y 軸まわりの曲げモーメント増分、および ΔM_x はねじりモーメント増分である。また、式(1)の第 3 式の $\Delta \varepsilon_0$ は直ひずみ増分、 $\Delta \psi_z$ 、 $\Delta \psi_y$ は z 、 y 軸まわりの曲率増分、 $\Delta \theta$ はねじり率増分であり、要素内の変位増分は、 x 軸方向変位増分 Δu とねじり角増分 $\Delta \phi$ には 1 次式、 y 、 z 軸方向変位増分 Δv 、 Δw には 3 次式を用いて近似する。さらに、式(1)の第 4、5 式の $[S^e]$ は一般化弾塑性剛性マトリックス、 $[S^p]$ は一般化塑性剛性マトリックス、 E は弾性係数、 G はせん断弾性係数であり、その成分はそれぞれ以下のように表わせる。

$$\begin{aligned} A_e &= \int_e dA, \quad S_z = \int_e y^* dA, \quad S_y = \int_e z^* dA, \\ I_z &= \int_e y^{*2} dA, \quad I_y = \int_e z^{*2} dA, \quad I_{yz} = \int_e y^* z^* dA, \quad (2)_{1\sim7} \\ J &= 4A_s^2 / \oint (ds/t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{11}^p &= D_1 + \frac{C_3^2}{C_1 + C_2}, \quad S_{12}^p = -D_2 - \frac{C_3 C_4}{C_1 + C_2}, \\ S_{12}^p &= D_3 + \frac{C_3 C_5}{C_1 + C_2}, \quad S_{14}^p = -\frac{2C_3 A_s}{C_1 + C_2}, \\ S_{22}^p &= D_4 + \frac{C_4^2}{C_1 + C_2}, \quad S_{23}^p = -D_6 - \frac{C_3 C_5}{C_1 + C_2}, \quad (2)_{8\sim17} \end{aligned}$$

$$S_{24}^p = \frac{2C_4 A_s}{C_1 + C_2}, \quad S_{33}^p = D_5 + \frac{C_5^2}{C_1 + C_2},$$

$$S_{34}^p = -\frac{2C_5 A_s}{C_1 + C_2}, \quad S_{44}^p = -\frac{C_2 GJ}{C_1 + C_2}$$

$$C_1 = \frac{1}{G} \oint \frac{ds}{t}, \quad C_2 = \int_p \frac{9\tau^2}{H'\bar{\sigma}^2 + E\sigma^2} \frac{ds}{t},$$

$$C_3 = \int_p \frac{3E\sigma\tau}{H'\bar{\sigma}^2 + E\sigma^2} ds, \quad C_4 = \int_p \frac{3E\sigma\tau y^*}{H'\bar{\sigma}^2 + E\sigma^2} ds, \quad (2)_{18\sim23}$$

$$C_5 = \int_p \frac{3E\sigma\tau z^*}{H'\bar{\sigma}^2 + E\sigma^2} ds, \quad A_s = \frac{1}{2} \oint r_s ds$$

$$D_1 = \int_p \frac{EH'\bar{\sigma}^2}{H'\bar{\sigma}^2 + E\sigma^2} dA, \quad D_2 = \int_p \frac{EH'\bar{\sigma}^2 y^*}{H'\bar{\sigma}^2 + E\sigma^2} dA,$$

$$D_3 = \int_p \frac{EH'\bar{\sigma}^2 z^*}{H'\bar{\sigma}^2 + E\sigma^2} dA, \quad D_4 = \int_p \frac{EH'\bar{\sigma}^2 y^{*2}}{H'\bar{\sigma}^2 + E\sigma^2} dA, \quad (2)_{24\sim29}$$

$$D_5 = \int_p \frac{EH'\bar{\sigma}^2 z^{*2}}{H'\bar{\sigma}^2 + E\sigma^2} dA, \quad D_6 = \int_p \frac{EH'\bar{\sigma}^2 y^* z^*}{H'\bar{\sigma}^2 + E\sigma^2} dA$$

式(2)において、右肩符号*は、肉厚中心線上の点の y 、 z 座標、 $\int_e (\bullet) ds$ 、 $\int_p (\bullet) ds$ はそれぞれ \bullet の弾性領域、塑性領域に対する積分を意味するものとし、図-1 に示すように、 r_s はせん断中心から肉厚中心線に下ろした垂線の長さ、 s は肉厚中心線に沿った座標、 t は板厚、 σ は直応力、 τ はせん断応力、 H' はひずみ硬化係数、および $\bar{\sigma}$ は相当応力を示す。

増分解析において、既知の平衡状態である増分ステップ n の断面力ベクトル $\{^{(n)}f\}$ を次式で表す。

$$\{^{(n)}f\} = \{^{(n)}N \quad ^{(n)}M_z \quad ^{(n)}M_y \quad ^{(n)}M_x\}^T \quad (3)$$

また、増分ステップ n から次の平衡状態である増分ステップ $n+1$ に至る過程の増分節点変位ベクトルを $\{\Delta u\}$ 、増分断面力ベクトルを $\{\Delta f\}$ とすると、増分ステップ n の仮想仕事式は、次式で表される⁸⁾。

$$\int_0^l \{\delta \Delta e\}^T (\{f\} + \{\Delta f\}) dx = \{\delta \Delta u\}^T \{p\} \quad (4)$$

ここに、 l : 要素長、 δ : 変分演算子、 $\{p\}$ は増分ステップ $n+1$ における外力ベクトルであり、式(4)の $\{\Delta u\}$ は次式で表される。

$$\{\Delta u\} = \left\{ \begin{array}{cccccc} \Delta u_i & \Delta v_i & \Delta w_i & \Delta \phi_i & \Delta \theta_{yi} & \Delta \theta_{zi} \\ \Delta u_j & \Delta v_j & \Delta w_j & \Delta \phi_j & \Delta \theta_{yj} & \Delta \theta_{zj} \end{array} \right\}^T \quad (5)$$

式(5)において、 $\Delta u_i, \Delta u_j, \Delta v_i, \Delta v_j, \Delta w_i, \Delta w_j$: それぞれ要素両端節点 i, j での x, y, z 軸方向の並進変位増分、 $\Delta \phi_i, \Delta \phi_j, \Delta \theta_{yi}, \Delta \theta_{yj}, \Delta \theta_{zi}, \Delta \theta_{zj}$: それぞれ x, y, z 軸まわりの回転変位増分である。

式(4)の増分断面力ベクトル $\{\Delta f\}$ は、式(1)から、 $[S^e]$ 、 $[S^p]$ と $\{\Delta e\}$ を用いて表される。 $[S^e]$ 、 $[S^p]$ の成分には、文献 4)、5) では、それぞれ要素両端の $[S^e]$ と $[S^p]$ の平均が用いられているが、要素両端の塑性化状況が異なる場合には、弾塑性解析時の収束性が悪化する。また、文献 8) では、要素内に 2 点の Gauss 積分点を設け、数値積分によって剛性が算定されている。この方法では、塑性化後の軸方向への剛性の変化は考慮されるものの、要素内部の積分点位置で断面力を評価するため、塑性ヒンジも要素内部に形成されることになる。したがって、このような骨組要素を弾塑性有限変位解析に適用する場合には、理論上節点位置に形成される塑性ヒンジを近似的に表現するため、塑性ヒンジの形成が予想される節点の近傍では、細かい要素分割が必要となる。そこで、本研究では、要素両端での塑性ヒンジの形成を可能とするため、要素両端で断面力を評価し、収束性を改善するため、次式のように、要素内の軸方向に $[S^e]$ と $[S^p]$ を線形変化させた $[D^e]$ と $[D^p]$ を用いる。

$$[D^e] = [S_i^e] + ([S_j^e] - [S_i^e])x/l = [S_i^e] + [\Delta S^e]x/l \quad (6)_1$$

$$[D^p] = [S_i^p] + ([S_j^p] - [S_i^p])x/l = [S_i^p] + [\Delta S^p]x/l \quad (6)_2$$

ここに、 $[S_i^e]$ 、 $[S_j^e]$ 、 $[S_i^p]$ 、 $[S_j^p]$: それぞれ要素 i, j 端断面の一般化弾性剛性マトリックス、一般化塑性剛性マトリックスである。

したがって、式(4)の $\{\Delta f\}$ は次式で表される。

$$\{\Delta f\} = ([D^e] + [D^p])\{\Delta e\} \quad (7)$$

詳細は省略するが、式(7)を式(4)に代入し、要素内の軸方向に、軸力とねじりモーメントは一定、曲げモーメントは線形変化するものと仮定し、変位に関する非線形項を省略して線形化すると、最終的に薄肉閉断面材の要素剛性方程式が導かれる。

2. 2 降伏・除荷判定と応力積分法

本解析法では、図-2 に示すように、要素両端の断面内をセグメントと称する微小要素に離散化し、各セグメント内ではひずみ分布は一様と仮定して、セグメントの図心点でひずみや応力を算定する。この場合、ねじりの作用する薄肉一室閉断面骨組において、常に満たされなければならない、せん断流一定条件は、離散的に次式で表される。

$$q_s = \tau_1 t_1 = \dots = \tau_N t_N \quad (8)$$

ここに、 q_s : 断面のせん断流、 τ_k : 各セグメントのせん断応力、 t_k : 図-2 に示すように、各セグメントの板厚、および N : 離散化したセグメントの総数である。

式(8)を増分表示すると、次のようになる。

$$\Delta q_s = \Delta \tau_1 t_1 = \dots = \Delta \tau_N t_N \quad (9)$$

また、薄肉一室閉断面材に対しては、ねじりによるせん断ひずみ増分 $\Delta \gamma$ とねじり率増分 $\Delta \theta$ の関係は、離散的に次式で表される、

$$\sum \Delta \gamma_k s_k = 2A_s \Delta \theta \quad (10)$$

ここに、 $\Delta \gamma_k$: 各セグメントのせん断ひずみ増分、および s_k : 図-2 に示すように、各セグメントの肉厚中心線に沿った長さである。

通常の有限要素法やマトリックス変位法による弾塑性解析では、全てのひずみ増分は変位増分から一意に決定できる。ところが、文献 4)、5) の定式化では、変位増分から決定できるのは、各セグメントの直ひずみ増分 $\Delta \varepsilon_k$ と断面のねじり率増分 $\Delta \theta$ のみであり、各セグメントのせん断ひずみ増分 $\Delta \gamma_k$ は、式(10)より $\Delta \theta$ との関係があるため、一意に決定できない。また、式(9)より、各セグメントのせん断応力増分 $\Delta \tau_k$ は、せん断流増分一定条件を満たすように算定する必要がある。したがって、応力評価点の全てのひずみ増分に基づいて応力を算定するリターン・マッピング法^{9)、10)}等の通常の陰的応力積分法^{11)、12)}は直接的に適用できない。

そこで、本研究では、塑性化したセグメントの変形後の降伏条件、せん断流一定条件と式(10)の関係を同時に満たす、各セグメントの相当塑性ひずみ増分 $\Delta \bar{\varepsilon}_k^p$ とせん断流増分 Δq_s を未知数とする、陰的応

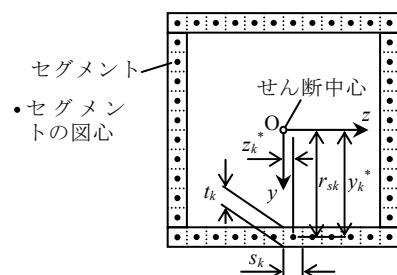


図-2 断面内のセグメント分割

力積分法について提案する．ここでは，まず，各セグメントの $\Delta\gamma_k$ と Δq_s および $\Delta\bar{\varepsilon}_k^p$ との関係を導く．また， $\Delta\bar{\varepsilon}_k^p$ と Δq_s を求めるため，式(8)～(10)の関係を Δq_s ， $\Delta\bar{\varepsilon}_k^p$ と $\Delta\theta$ を含む関係式として表すとともに，塑性化したセグメントの変形後の降伏条件式も $\Delta\varepsilon_k$ ， Δq_s と $\Delta\bar{\varepsilon}_k^p$ を含む条件式として表す．さらに，各セグメントの降伏・除荷判定について述べた後に，断面内のセグメントが 1 つでも塑性化している場合の $\Delta\bar{\varepsilon}_k^p$ と Δq_s の算定方法について述べる．

(1) せん断ひずみ増分

各セグメントの弾性直ひずみ増分 $\Delta\varepsilon_k^e$ と弾性せん断ひずみ増分 $\Delta\gamma_k^e$ は，直応力増分 $\Delta\sigma_k$ ，弾性係数 E_k ，せん断応力増分 $\Delta\tau_k$ ，およびせん断弾性係数 G_k を用いて，それぞれ次のように表される．

$$\Delta\varepsilon_k^e = \Delta\sigma_k / E_k, \quad \Delta\gamma_k^e = \Delta\tau_k / G_k \quad (11)_{1,2}$$

直応力とせん断応力との二軸応力場に対する，塑性化を生じたセグメントの変形後の von Mises の降伏関数 f_{yk}^2 は次式で表される．

$$f_{yk}^2 = {}^{(n+1)}\bar{\sigma}_k^2 = {}^{(n+1)}\sigma_k^2 + 3{}^{(n+1)}\tau_k^2 \quad (12)$$

ここに， ${}^{(n+1)}\sigma_k$ ， ${}^{(n+1)}\tau_k$ および ${}^{(n+1)}\bar{\sigma}_k$: それぞれ変形後 (増分ステップ $n+1$) の各セグメントの直応力，せん断応力，および相当応力である．

連合流れ則，式(12)の von Mises の降伏関数，および単軸応力場と二軸応力場での塑性仕事増分の等価性から，各セグメントの塑性直ひずみ増分 $\Delta\varepsilon_k^p$ と塑性せん断ひずみ増分 $\Delta\gamma_k^p$ は，それぞれ次式で表される．

$$\Delta\varepsilon_k^p = \Delta\bar{\varepsilon}_k^p {}^{(n+1)}\sigma_k / {}^{(n+1)}\bar{\sigma}_k, \quad \Delta\gamma_k^p = 3\Delta\bar{\varepsilon}_k^p {}^{(n+1)}\tau_k / {}^{(n+1)}\bar{\sigma}_k \quad (13)_{1,2}$$

ひずみの加算分解則に従えば，各セグメントの直ひずみ増分 $\Delta\varepsilon_k$ とせん断ひずみ増分 $\Delta\gamma_k$ は，式(11)，(13)から，次のように表される．

$$\Delta\varepsilon_k = \frac{\Delta\sigma_k}{E_k} + \frac{\Delta\bar{\varepsilon}_k^p}{{}^{(n+1)}\bar{\sigma}_k} {}^{(n+1)}\sigma_k, \quad \Delta\gamma_k = \frac{\Delta\tau_k}{G_k} + 3\frac{\Delta\bar{\varepsilon}_k^p}{{}^{(n+1)}\bar{\sigma}_k} {}^{(n+1)}\tau_k \quad (14)_{1,2}$$

変形後の各セグメントの直応力 ${}^{(n+1)}\sigma_k$ とせん断応力 ${}^{(n+1)}\tau_k$ は，次のように表される．

$${}^{(n+1)}\sigma_k = {}^{(n)}\sigma_k + \Delta\sigma_k, \quad {}^{(n+1)}\tau_k = {}^{(n)}\tau_k + \Delta\tau_k \quad (15)_{1,2}$$

ここに， ${}^{(n)}\sigma_k$ ， ${}^{(n)}\tau_k$: それぞれ，各セグメントの前平衡状態の直応力，せん断応力である．

式(15)の第 2 式を式(14)の第 2 式に代入し，式(8)，(9)のせん断流一定条件を用いると次式を得る．

$$\Delta\gamma_k = \frac{\Delta q_s}{G_k t_k} + 3\frac{\Delta\bar{\varepsilon}_k^p}{{}^{(n+1)}\bar{\sigma}_k} \frac{{}^{(n)}q_s + \Delta q_s}{t_k} \quad (16)$$

式(16)において， ${}^{(n)}q_s$ は前平衡状態のせん断流， ${}^{(n+1)}\bar{\sigma}_k$ は変形後の相当応力であり，単軸応力状態の構成式をバイリニア型で仮定すれば，塑性状態にあ

るセグメントの ${}^{(n+1)}\bar{\sigma}_k$ は次式で表される．

$${}^{(n+1)}\bar{\sigma}_k = {}^{(n+1)}\sigma_{Yk} = \sigma_{Y0k} + H'_k ({}^{(n)}\bar{\varepsilon}_k^p + \Delta\bar{\varepsilon}_k^p) \quad (17)$$

ここに， ${}^{(n+1)}\sigma_{Yk}$ ， σ_{Y0k} ， H'_k と ${}^{(n)}\bar{\varepsilon}_k^p$: それぞれ，各セグメントの変形後の降伏応力，初期降伏応力，硬化係数，および前平衡状態の相当塑性ひずみである．

よって， $\Delta\gamma_k$ と Δq_s および塑性状態にあるセグメントの $\Delta\bar{\varepsilon}_k^p$ の関係は，式(16)，(17)で表される．

(2) せん断流増分とねじり率増分の関係

式(16)を式(10)に代入して， Δq_s について解けば次式を得る．

$$\Delta q_s = \frac{2A_s \Delta\theta - 3{}^{(n)}q_s \sum_p \frac{\Delta\bar{\varepsilon}_k^p}{{}^{(n+1)}\bar{\sigma}_k} \cdot \frac{S_k}{t_k}}{\sum_p \frac{S_k}{G_k t_k} + 3 \sum_p \frac{\Delta\bar{\varepsilon}_k^p}{{}^{(n+1)}\bar{\sigma}_k} \cdot \frac{S_k}{t_k}} \quad (18)$$

式(18)において，総和記号の下付き記号 p は塑性状態にあるセグメントに関する総和を表す．

ここで，要素内のねじりモーメント M_x と q_s の関係， i, j 端断面のねじりモーメント M_{xi} ， M_{yj} とせん断流 q_{si} ， q_{sj} の関係は，それぞれ次式で表される．

$$M_x = 2A_s q_s, \quad M_{xi} = 2A_s q_{si}, \quad M_{yj} = 2A_s q_{sj} \quad (19)_{1-3}$$

本解析法では， M_{xi} ， M_{yj} の平均を M_x とするため，式(19)より， q_s と Δq_s に対して次式が成立する．

$$q_s = (q_{si} + q_{sj}) / 2, \quad \Delta q_s = (\Delta q_{si} + \Delta q_{sj}) / 2 \quad (20)_{1,2}$$

式(20)の第 2 式に式(19)を代入して，前平衡状態のせん断流には ${}^{(n)}q_{si} = {}^{(n)}q_{sj} = {}^{(n)}q_s$ の関係が成立することを考慮すると， Δq_s と $\Delta\theta$ の関係式として，塑性状態にある要素 i, j 端断面内のセグメントの相当塑性ひずみ増分 $\Delta\bar{\varepsilon}_{ik}^p$ ， $\Delta\bar{\varepsilon}_{jk}^p$ と， Δq_s を未知数とする次式を得る．ただし，以下では，要素両端断面で値の異なる諸量には，右下負号 i, j を付して区別している． $G = 0 =$

$$2\Delta q_s \left(\sum_p \frac{S_k}{G_k t_k} + 3 \sum_p \frac{\Delta\bar{\varepsilon}_{ik}^p S_k}{{}^{(n+1)}\bar{\sigma}_{ik} t_k} \right) \left(\sum_p \frac{S_k}{G_k t_k} + 3 \sum_p \frac{\Delta\bar{\varepsilon}_{jk}^p S_k}{{}^{(n+1)}\bar{\sigma}_{jk} t_k} \right) - \left(2A_s \Delta\theta_i - 3{}^{(n)}q_s \sum_p \frac{\Delta\bar{\varepsilon}_{ik}^p S_k}{{}^{(n+1)}\bar{\sigma}_{ik} t_k} \right) \left(\sum_p \frac{S_k}{G_k t_k} + 3 \sum_p \frac{\Delta\bar{\varepsilon}_{jk}^p S_k}{{}^{(n+1)}\bar{\sigma}_{jk} t_k} \right) + \left(2A_s \Delta\theta_j - 3{}^{(n)}q_s \sum_p \frac{\Delta\bar{\varepsilon}_{jk}^p S_k}{{}^{(n+1)}\bar{\sigma}_{jk} t_k} \right) \left(\sum_p \frac{S_k}{G_k t_k} + 3 \sum_p \frac{\Delta\bar{\varepsilon}_{ik}^p S_k}{{}^{(n+1)}\bar{\sigma}_{ik} t_k} \right) \quad (21)$$

(3) セグメントの変形後の降伏条件式

式(11)とひずみの加算分解則より，要素 i 端のセグメント k の直応力増分 $\Delta\sigma_{ik}$ は次のように表される．

$$\Delta\sigma_{ik} = E_k (\Delta\varepsilon_{ik} - \Delta\varepsilon_{ik}^p) \quad (22)$$

式(22)を式(15)の第 1 式に代入すると次式を得る．

$${}^{(n+1)}\sigma_{ik} = \sigma_{ik}^{(r)} - E_k \Delta \varepsilon_{ik}^p \quad (23)_1$$

$$\sigma_{ik}^{(r)} = {}^{(n)}\sigma_{ik} + E_k \Delta \varepsilon_{ik} \quad (23)_2$$

以降では、式(23)の第2式の $\sigma_{ik}^{(r)}$ は、弾性試行直応力と称する。

式(23)の第1式に式(13)の第1式を代入して、変形後の要素*i*端のセグメント*k*の直応力 ${}^{(n+1)}\sigma_{ik}$ について解けば次式を得る。

$${}^{(n+1)}\sigma_{ik} = \sigma_{ik}^{(r)} / (1 + E_k \Delta \varepsilon_{ik}^p / {}^{(n+1)}\bar{\sigma}_{ik}) \quad (24)$$

また、変形後の要素*i*端のセグメント*k*のせん断応力 ${}^{(n+1)}\tau_{ik}$ は、式(8)のせん断流一定条件に ${}^{(n)}q_s$ と Δq_s を用いて次のように表される。

$${}^{(n+1)}\tau_{ik} = ({}^{(n)}q_s + \Delta q_s) / t_k \quad (25)$$

von Mises の降伏条件式(12)に、式(24)と(25)を代入すると、塑性状態にある要素*i*端のセグメント*k*の変形後の降伏条件式は、 $\Delta \varepsilon_{ik}^p$ と Δq_s の関数として、次のように表される。

$$F_{ik} = \frac{\sigma_{ik}^{(r)2}}{(1 + E_k \Delta \varepsilon_{ik}^p / {}^{(n+1)}\bar{\sigma}_{ik})^2} + 3 \frac{({}^{(n)}q_s + \Delta q_s)^2}{t_k^2} - {}^{(n+1)}\bar{\sigma}_{ik}^2 = 0 \quad (26)_1$$

同様に、要素*j*端のセグメント*k*についても、変形後の降伏条件式として次式を得る。

$$F_{jk} = \frac{\sigma_{jk}^{(r)2}}{(1 + E_k \Delta \varepsilon_{jk}^p / {}^{(n+1)}\bar{\sigma}_{jk})^2} + 3 \frac{({}^{(n)}q_s + \Delta q_s)^2}{t_k^2} - {}^{(n+1)}\bar{\sigma}_{jk}^2 = 0 \quad (26)_2$$

(4) 各セグメントの降伏・除荷判定

弾性予測子法¹³⁾による、各セグメントの降伏・除荷判定では、まず、以下の式によって、要素*i*, *j*端のセグメント*k*の弾性試行相当応力 $\bar{\sigma}_{ik}^{(r)}$, $\bar{\sigma}_{jk}^{(r)}$ を算定する。

$$\bar{\sigma}_{ik}^{(r)} = \sqrt{\sigma_{ik}^{(r)2} + 3\tau_{ik}^{(r)2}}, \quad \bar{\sigma}_{jk}^{(r)} = \sqrt{\sigma_{jk}^{(r)2} + 3\tau_{jk}^{(r)2}} \quad (27)_{1,2}$$

$$\tau_{ik}^{(r)} = {}^{(n)}\tau_{ik} + G_k \Delta \gamma_{ik}, \quad \tau_{jk}^{(r)} = {}^{(n)}\tau_{jk} + G_k \Delta \gamma_{jk} \quad (27)_{1,2}$$

$$\Delta \gamma_{ik} = \frac{\Delta q_s}{G_k t_k} + 3 \frac{\Delta \varepsilon_{ik}^p}{{}^{(n+1)}\bar{\sigma}_{ik}} \frac{{}^{(n)}q_s + \Delta q_s}{t_k}, \quad (27)_{1,2}$$

$$\Delta \gamma_{jk} = \frac{\Delta q_s}{G_k t_k} + 3 \frac{\Delta \varepsilon_{jk}^p}{{}^{(n+1)}\bar{\sigma}_{jk}} \frac{{}^{(n)}q_s + \Delta q_s}{t_k}$$

式(27)の Δq_s は式(18)から算定できる。また、式(27)の $\bar{\sigma}_{ik}^{(r)}$, $\bar{\sigma}_{jk}^{(r)}$ と、前平衡状態(増分ステップ*n*)での応力状態、および降伏応力 ${}^{(n)}\sigma_{yik}$, ${}^{(n)}\sigma_{yjk}$ との大小関係の比較により、降伏・除荷が判定できる。

断面内の全セグメントに対して上記の判定を実施し、降伏や塑性変形を継続するセグメントが一つでもある場合には、以下の応力積分が必要になる。

(5) 相当塑性ひずみ増分とねじり率増分の算定

$\Delta \varepsilon_{ik}^p$, $\Delta \varepsilon_{jk}^p$ と Δq_s は、式(21)および塑性状態にあるセグメントの変形後の降伏条件式(26)からなる連立非線形方程式を満たさなければならない。そこで、 $\Delta \varepsilon_{ik}^p$, $\Delta \varepsilon_{jk}^p$ と Δq_s の算定に Newton-Raphson 法の適用を考えると、 $\Delta \varepsilon_{ik}^p$, $\Delta \varepsilon_{jk}^p$ の補正值 $\Delta \varepsilon_{ik}^{\prime p}$, $\Delta \varepsilon_{jk}^{\prime p}$ と、 Δq_s の補正值 $\Delta q_s'$ は次式で表される。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_{i1}}{\partial \Delta \varepsilon_{i1}^p} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial F_{i1}}{\partial \Delta q_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{\partial F_{iN}}{\partial \Delta \varepsilon_{iN}^p} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial F_{iN}}{\partial \Delta q_s} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial F_{j1}}{\partial \Delta \varepsilon_{j1}^p} & \cdots & 0 & \frac{\partial F_{j1}}{\partial \Delta q_s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \frac{\partial F_{jN}}{\partial \Delta \varepsilon_{jN}^p} & \frac{\partial F_{jN}}{\partial \Delta q_s} \\ \frac{\partial G}{\partial \Delta \varepsilon_{i1}^p} & \cdots & \frac{\partial G}{\partial \Delta \varepsilon_{iN}^p} & \frac{\partial G}{\partial \Delta \varepsilon_{j1}^p} & \cdots & \frac{\partial G}{\partial \Delta \varepsilon_{jN}^p} & \frac{\partial G}{\partial \Delta q_s} \end{bmatrix} \cdot \left\{ \Delta \varepsilon_{i1}^{\prime p} \cdots \Delta \varepsilon_{iN}^{\prime p} \Delta \varepsilon_{j1}^{\prime p} \cdots \Delta \varepsilon_{jN}^{\prime p} \Delta q_s' \right\}^T = \left\{ -F_{i1} \cdots -F_{iN} \quad -F_{j1} \cdots -F_{jN} \quad -G \right\}^T \quad (28)_1$$

式(28)の第1式の係数マトリックス成分は、式(21)と(26)をそれぞれ $\Delta \varepsilon_{ik}^p$, $\Delta \varepsilon_{jk}^p$, Δq_s で偏微分することによって、次のように表される。

$$\frac{\partial G}{\partial \Delta q_s} = 2 \left[\left(\sum \frac{s_k}{G_k t_k} \right)^2 + 9 \left(\sum_p \frac{\Delta \varepsilon_{ik}^p s_k}{{}^{(n+1)}\bar{\sigma}_{ik} t_k} \right) \left(\sum_p \frac{\Delta \varepsilon_{jk}^p s_k}{{}^{(n+1)}\bar{\sigma}_{jk} t_k} \right) + 3 \left(\sum \frac{s_k}{G_k t_k} \right) \left\{ \left(\sum_p \frac{\Delta \varepsilon_{jk}^p s_k}{{}^{(n+1)}\bar{\sigma}_{jk} t_k} \right) + \left(\sum_p \frac{\Delta \varepsilon_{ik}^p s_k}{{}^{(n+1)}\bar{\sigma}_{ik} t_k} \right) \right\} \right] \quad (28)_2$$

$$\frac{\partial G}{\partial \Delta \varepsilon_{ik}^p} = \begin{cases} \frac{s_k}{t_k} \left(\frac{1}{{}^{(n+1)}\bar{\sigma}_{ik}} - \frac{\Delta \varepsilon_{ik}^p H'_k}{{}^{(n+1)}\bar{\sigma}_{ik}^2} \right) \cdot \left[6\Delta q_s \left\{ \left(\sum \frac{s_k}{G_k t_k} \right) + 3 \left(\sum_p \frac{\Delta \varepsilon_{jk}^p s_k}{{}^{(n+1)}\bar{\sigma}_{jk} t_k} \right) \right\} \right. \\ \left. + 3 {}^{(n)}q_s \left\{ \left(\sum \frac{s_k}{G_k t_k} \right) + 6 \left(\sum_p \frac{\Delta \varepsilon_{jk}^p s_k}{{}^{(n+1)}\bar{\sigma}_{jk} t_k} \right) \right\} \right. \\ \left. - 6A_s \Delta \theta_j \right] \quad (for \Delta \varepsilon_{ik}^p > 0) \\ 0 \quad (for \Delta \varepsilon_{ik}^p = 0) \end{cases} \quad (28)_3$$

$$\frac{\partial G}{\partial \Delta \varepsilon_{jk}^p} = \begin{cases} \frac{s_k}{t_k} \left(\frac{1}{{}^{(n+1)}\bar{\sigma}_{jk}} - \frac{\Delta \varepsilon_{jk}^p H'_k}{{}^{(n+1)}\bar{\sigma}_{jk}^2} \right) \cdot \left[6\Delta q_s \left\{ \left(\sum \frac{s_k}{G_k t_k} \right) + 3 \left(\sum_p \frac{\Delta \varepsilon_{ik}^p s_k}{{}^{(n+1)}\bar{\sigma}_{ik} t_k} \right) \right\} \right. \\ \left. + 3 {}^{(n)}q_s \left\{ \left(\sum \frac{s_k}{G_k t_k} \right) + 6 \left(\sum_p \frac{\Delta \varepsilon_{ik}^p s_k}{{}^{(n+1)}\bar{\sigma}_{ik} t_k} \right) \right\} \right. \\ \left. - 6A_s \Delta \theta_j \right] \quad (for \Delta \varepsilon_{jk}^p > 0) \\ 0 \quad (for \Delta \varepsilon_{jk}^p = 0) \end{cases} \quad (28)_{4,5}$$

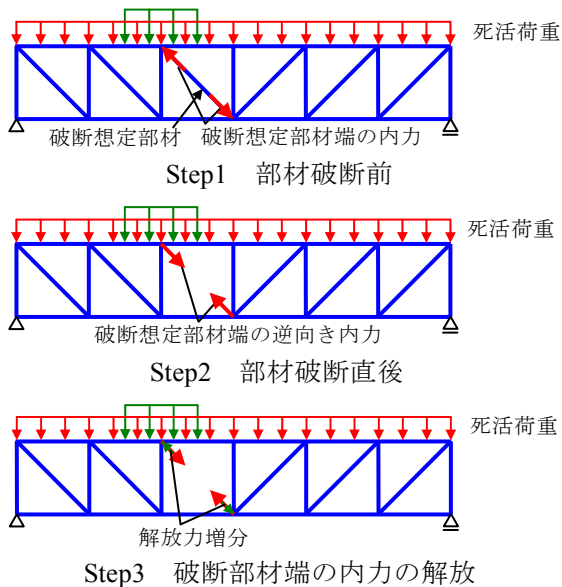


図-4 部材破断の取り扱い

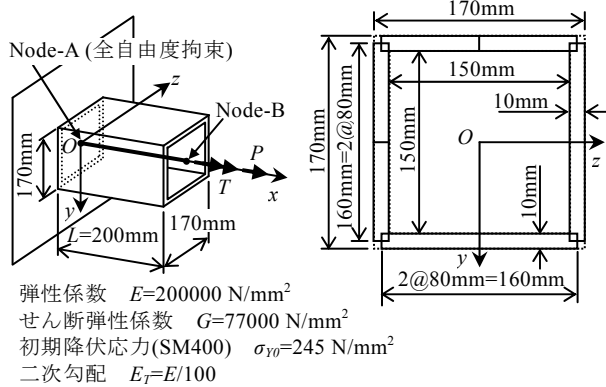


図-5 箱形断面部材の寸法と機械的特性

部材破断のモデル化としては、予め破断想定箇所に二重節点を定義し、両者間に多点拘束条件を課して死活荷重を載荷した後に、多点拘束条件を解除して部材破断を表現する方法、破断部材そのものを除去する方法など、様々な手法が考えられる。このうち、本研究では、後者の手法を採用することにする。この手法は、吊橋など長大橋の架設時の応力照査等で既に実績のある、解体計算と同様である。しかしながら、設計段階では、トラス橋の部材破断後に、破断部材の負担していた断面力を残りの部材で負担することは想定外であるため、残りの部材に生ずる塑性化を考慮する必要がある。塑性問題は経路に依存するため、通常の実体計算とは異なり、破断部材の負担していた断面力は、徐々に解放する必要がある。以下では、図-4に示すような二次元トラス構造を例に、解析法の概略を説明する。

まず、Step1では、部材破断前の平衡状態での破断想定部材端の内力 $\{Q_{jm}\}$ を算定する。Step2では、破断想定部材を構成する要素を消去し、破断部材の負担していた断面力を徐々に解放するため、次の平

衡方程式を満たすように、Step1で算定した内力を逆向きに載荷する。

$$[{}^{(n)}K]\{\Delta U\} = \{P\} - \{Q\} - \{Q_{jm}\} = \{0\} \quad (30)$$

ここに、 $[{}^{(n)}K]$ ：部材破断前の平衡状態（増分ステップ n ）での破断部材を除いた構造全体の剛性マトリックス、 $\{\Delta U\}$ ：構造全体の増分変位ベクトル、 $\{P\}$ ：部材破断前の構造全体の外力ベクトル、および $\{Q\}$ ：部材破断前の平衡状態での破断部材を除く構造全体の内力ベクトルである。

その後、Step3では、破断部材の負担していた断面力、即ちStep1で算定した破断部材端の内力を増分分解して徐々に解放し、次式を満足する平衡解を反復計算によって求めればよい。

$$[{}^{(n+1)}K^{(r)}]\{\Delta U^{(r)}\} = \{P\} + \lambda_p^{(r)}i\{Q_{jm}\} - \{Q^{(r)}\} - \{Q_{jm}\} \quad (31)$$

式(31)において、左肩符号は次の平衡状態（増分ステップ $n+1$ ）、右肩符号 (r) は反復計算回数を表しており、 i は部材破断に対する衝撃係数で、衝撃の影響を無視する場合は1を代入する。また、 $\lambda_p^{(r)}$ は荷重パラメータであり、荷重増分法を用いる場合には既知数として適当な値を代入し、孤長増分法を用いる場合には、未知数として孤長の拘束方程式とともに連立して解かれる。ただし、 $0 \leq \lambda_p^{(r)} \leq 1$ である。

4. 数値計算例

本節では、数値計算例を通じて、2節で提案した手法の精度や効率、3節で示した手法の妥当性を検証し、最後に、死活荷重作用下でのトラス橋の部材破断時の挙動を追跡し、提案手法の有効性を示す。

4.1 妥当性の検証

ここでは、本研究で提案した薄肉閉断面部材の弾塑性解析法、および部材破断後の挙動の追跡法について妥当性を検証する。

(1) 軸力とねじりを受ける箱形断面部材

図-5に示すように、自由端に引張力 P とねじりモーメント T の作用する箱形断面部材を例にとり、提案手法を用いた弾塑性有限変位解析を実施した。箱形断面部材は初期降伏応力 σ_{y0} 、ひずみ硬化係数 H の線形硬化体とし、 P と T の荷重経路は、 P を直応力 σ 、 T をせん断応力 τ に換算した応力比 σ/τ を一定値 $\sqrt{3}$ とする比例荷重 Path-1 と、 $\sigma/\sigma_{y0}=1.2$ まで荷重した後に、 σ を一定に保持してせん断応力を $\tau=1.2\sigma_{y0}/\sqrt{3}$ まで漸増荷重する Path-2 を設定した。

微小変位理論によれば、Path-1 に対する σ と直ひずみ ε の関係、および τ とせん断ひずみ γ の関係は、それぞれ次式で与えられる。

$$\varepsilon = \begin{cases} \frac{\sigma}{E} & \left(\text{for } 0 \leq \sigma < \frac{\sigma_{y0}}{\sqrt{2}} \right) \\ \frac{\sigma}{E} + \frac{1}{H'} \left(\sigma - \frac{\sigma_{y0}}{\sqrt{2}} \right) & \left(\text{for } \frac{\sigma_{y0}}{\sqrt{2}} \leq \sigma \right) \end{cases} \quad (32)_{1,2}$$

$$\gamma = \begin{cases} \frac{\tau}{G} & \left(\text{for } 0 \leq \tau < \frac{\sigma_{y0}}{\sqrt{6}} \right) \\ \frac{\tau}{G} + \frac{3}{H'} \left(\tau - \frac{\sigma_{y0}}{\sqrt{6}} \right) & \left(\text{for } \frac{\sigma_{y0}}{\sqrt{6}} \leq \tau \right) \end{cases} \quad (32)_{3,4}$$

同様に、Path-2 に対する σ と ε 、および τ と γ の関係は、それぞれ次式で与えられる。

$$\varepsilon = \begin{cases} \frac{\sigma}{E} & \left(\text{for } 0 \leq \sigma < \sigma_{y0} \right) \\ \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma - \sigma_{y0}}{H'} & \left(\text{for } \sigma_{y0} \leq \sigma < 1.2\sigma_{y0} \right) \\ \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma_{y0}}{5H'} \left\{ 1 + 3 \ln \left(1 + \frac{3\tau^2}{1.44\sigma_{y0}^2} \right) \right\} & \left(\text{for } 1.2\sigma_{y0} = \sigma \right) \\ & \left(0 \leq \tau \right) \end{cases} \quad (33)_{1-3}$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G} + \frac{3\tau}{H'} - 1.2\sqrt{3} \frac{\sigma_{y0}}{H'} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}\tau}{1.2\sigma_{y0}} \right) \quad \left(\text{for } 0 < \tau \right) \quad (33)_4$$

荷重は、Path-1 では、引張力 $P=1181.6kN$ とねじりモーメント $T=86.9kN \cdot m$ を同時に 100 等分割の荷重制御、Path-2 では、まず $P=1181.6kN$ を 50 等分割の荷重制御で荷重した後に、 P を一定に保持して $T=86.9kN \cdot m$ を 50 等分割の荷重制御で荷重した。箱形断面部材は、図-5 に示すように、軸方向に 1 要素、断面内は 8 つのセグメントに分割してモデル化した。力の釣り合いに関する反復計算は、式(34)が満たされるまで繰り返した。

$$\varepsilon_c = \frac{\{\Delta U^{(r)}\}^T \{B^{(r)}\}}{\{\Delta U^{(1)}\}^T \{B^{(1)}\}} \leq \varepsilon_{\text{tol}} = 1.0 \times 10^{-10} \quad (34)$$

ここに、 $\{\Delta U^{(r)}\}$ 、 $\{B^{(r)}\}$: それぞれ反復計算 r 回目の増分変位ベクトル、不平衡力ベクトルである。

解析結果として、Path-1 と 2 の無次元化した塑性せん断ひずみ $(\gamma^p/\sqrt{3})/(\sigma_{y0}/H')$ と塑性直ひずみ $\varepsilon^p/(\sigma_{y0}/H')$ の関係について、式(32)、(33)による理論解とともに図-6 に示す。これより、解析結果は理論解と良好に一致していることが分かる。

(2) 残留応力を有する箱形断面短柱

既往の溶接製作箱形断面短柱を用いた、圧縮力とねじりモーメントの組み合わせ負荷試験⁴⁾を対象に、提案した手法による弾塑性有限変位解析を実施した。試験体の形状寸法と機械的特性値は図-7 に示すようであり、試験では、圧縮力 P による直応力 σ とねじりモーメント T によるせん断応力 τ の応力比 $\tau=0.43\sigma$ (文献 4)での試験体名 SB-4) が一定の比例荷重が行われている。また、この試験では、試

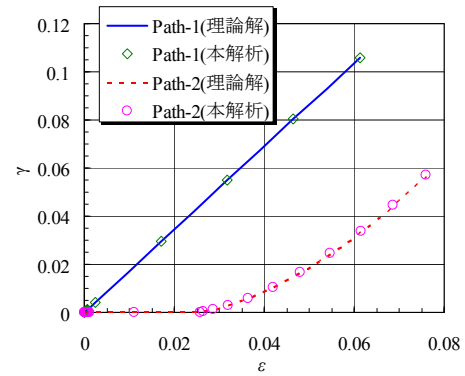


図-6 せん断ひずみと直ひずみの関係

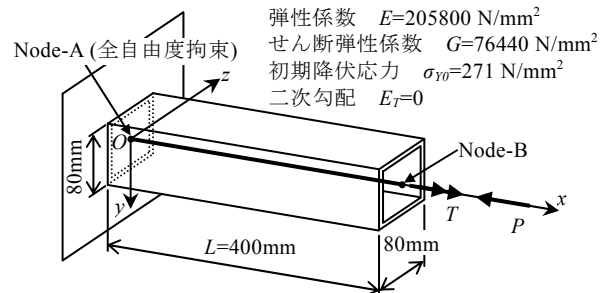


図-7 箱形断面短柱の寸法と機械的特性

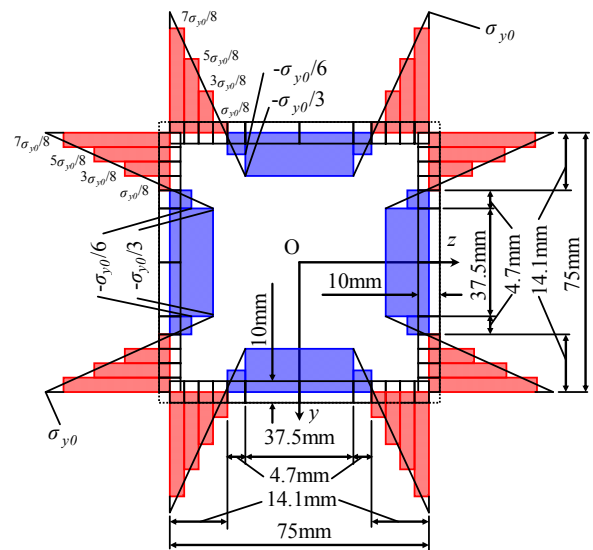


図-8 断面内の残留応力分布とセグメント分割

験体の残留応力計測結果に基づいて、図-8 に示すように、残留応力分布がモデル化されている。

試験体は、図-8 に示すように、断面内を 24 個のセグメントに分割し、軸方向には 1 要素でモデル化した。荷重条件は、圧縮力 $P=326.6kN$ とねじりモーメント $T=5.3kN \cdot m$ を同時に 20 等分割の荷重制御で荷重し、各増分計算では、式(34)が満たされるまで反復計算を繰り返した。

解析結果として、降伏ねじりモーメントで無次元化したねじりモーメント T/T_y と、降伏ねじり角で無次元化したねじり角 θ/θ_y の関係について、試験結果とともに図-9 に示す。これより、解析結果は試験

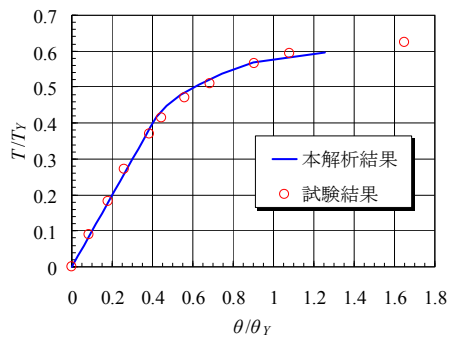


図-9 ねじりモーメントとねじり角の関係

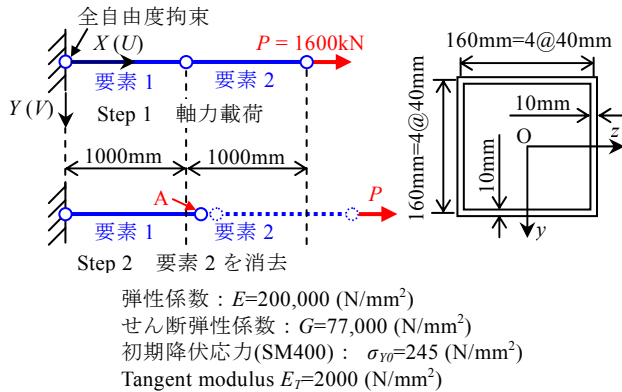


図-10 軸力を受ける棒部材の破断解析モデル

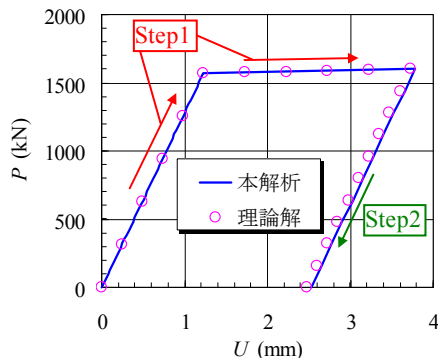


図-11 点 A における軸力と軸方向変位の関係

結果と良好に一致しており、本研究で提案した陰的応力積分法の妥当性が示された。

(3) 軸力を受ける棒部材の破断

図-10 に示すように、塑性域まで棒部材に引張軸力を載荷した状態で、部材を消去する弾塑性有限変位解析を実施した。棒部材の機械的性質は図-10 のように設定し、薄肉閉断面はり要素を部材軸方向に 2 等分割で適用した。この解析では、図-10 の Step1 で示すように引張軸力 $P = 1600\text{kN}$ を 100 等分割の荷重制御で載荷した状態から、Step2 で示すように載荷点側の要素を消去した。

解析結果として、図-10 に示した点 A における軸力 P と軸方向変位 U の関係を、理論解とともに図-11 に示す。これより、微小変位理論に基づく理論解との比較のため、解析結果と理論解には若干

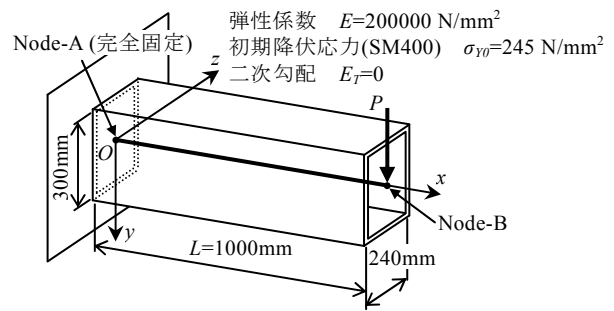


図-12 自由端に集中荷重を受ける片持ちばり

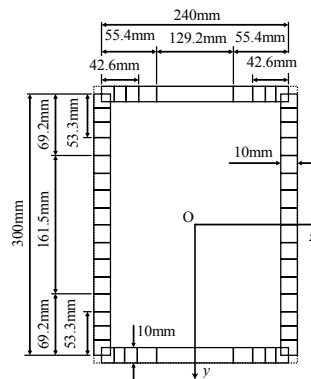


図-13 片持ちばり断面内のセグメント分割

の差異が認められるものの両者は殆ど一致している。よって、部材破断後の挙動の追跡法に対する妥当性が示された。

4. 2 解析精度と効率性

ここでは、提案した弾塑性剛性の評価法および陰的応力積分法の解析精度と効率性について示す。

(1) 自由端に集中荷重を受ける片持ちばり

図-12 に示すように、自由端に集中荷重の作用する片持ちばりを対象として、本研究で提案した弾塑性剛性の評価法が解析精度や効率性に及ぼす影響について、要素内の弾塑性剛性を一定とする手法^{3), 4)} (ここでは、解析 A と称する)、要素を二等分した領域内で剛性と断面力を一定とする手法¹⁴⁾ (ここでは、解析 B と称する) と、全塑性荷重の理論解とを比較することによって示す。

片持ちばりの寸法諸元と機械的特性は、図-12 に示す通りであり、自由端の集中荷重は 8mm の強制変位を 100 等分割で載荷し、各増分ステップでは、式(34)が満たされるまで反復計算を実施した。また、いずれの解析においても、はり断面は、図-13 に示すように 50 個のセグメントに分割し、はりの軸方向の要素分割は 5 等分割とした。

各解析結果として、自由端の集中荷重と変位の関係を図-14 に示す。なお、図中には、微小変位理論による自由端の荷重-変位関係の線形解、全塑性荷重と降伏荷重も併せて示す。

図-14 より、本解析および解析 A では、最終的

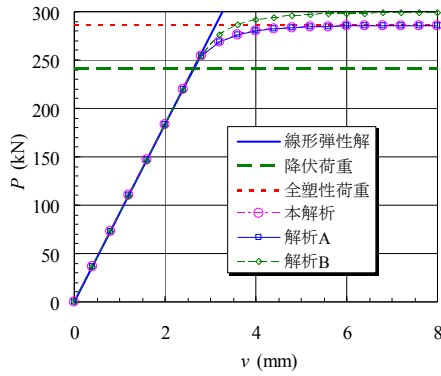


図-14 集中荷重と載荷点変位の関係

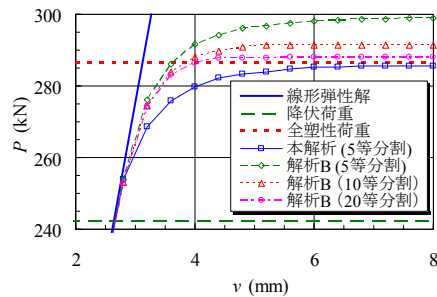


図-15 要素分割数の影響

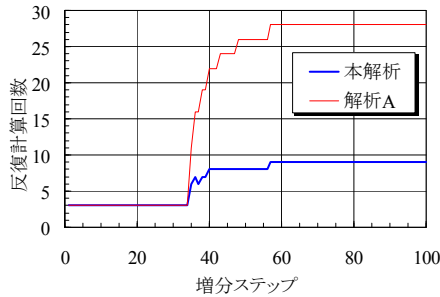


図-16 各増分ステップの反復計算回数

に全塑性荷重に漸近するものの、解析 B では全塑性荷重を 4%超過する荷重に漸近することが分かる。これは、5 等分の要素分割数に対しても、本解析および解析 A では、節点に塑性ヒンジを形成できるのに対して、解析 B では節点における塑性ヒンジの形成を適切に評価できないためであると考えられる。そこで、本解析で要素分割数を 5 等分割、解析 B で要素分割数を 5、10 および 20 等分割した際の集中荷重と変位の関係を図-15 に示す。ただし、载荷初期に有意差はないため、図-15 では、240kN 以降の荷重と変位の関係を示している。これより、解析 B では、20 等分割の要素数で全塑性荷重にほぼ収束することから、本研究で提案した弾塑性剛性の評価法によれば、少ない要素数でも十分な精度が得られることがわかる。また、図-16 は、ともに要素分割数を 5 等分割とした、本解析と解析 A について、各増分ステップでの反復計算回数を示したものであるが、解析 A では、塑性化後に、本解析に比べて各増分ステップの反復計算回数が急増し

表-1 増分ステップ数と反復計算の総数の関係

増分ステップ数	50	100	300	500	600
本解析	621	856	1723	2653	3136
解析C	発散	発散	発散	5539	5375

表-2 増分ステップ数と CPU タイム(sec.)の関係

増分ステップ数	50	100	300	500	600
本解析	0.1274	0.2165	0.5444	0.8880	1.0690
解析C	発散	発散	発散	1.5336	1.7341

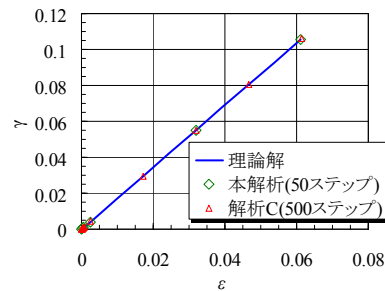


図-17 応力積分法の相違による比較

ていることから、本研究で提案した弾塑性剛性の評価法の優れた効率性が示された。

(2) 引張とねじりを受ける箱形断面材

図-5 に示した、引張力とねじりモーメントとの比例負荷 (4.1(1)の Path-1) を受ける箱形断面材を対象として、本研究で提案した陰的応力積分法が効率性や精度に及ぼす影響について、文献 7)の陽的応力積分法による解析 (ここでは、解析 C と称する。) と比較して示す。ただし、一般的な骨組構造物の弾塑性有限変位解析では、力の釣り合いに関する収束計算が実施されるため、以下の陽的応力積分法を用いた解析においても、式(34)が満たされるまで反復計算を実施した。

表-1, 2 は、同時に载荷する引張力とねじりモーメントに対する等増分ステップ数を 50, 100, 300, 500 および 600 と変化させた場合について、力の釣り合いに関する反復計算回数の総数、および CPU タイム (wall time) をそれぞれ示している。なお、数値計算にはいずれも、メモリ 2GB, AMD 社製 CPU Opteron (クロック周波数 1.6GHz), PGI Fortran コンパイラ Ver6.1 を搭載したワークステーションを用いている。

表-1 より、本解析法によれば、50 ステップでの解析が可能であるのに対して、解析 C では 300 ステップの解析も不可能であり、本解析法の優れた効率性が示された。また、解析 C の増分ステップ数 500 および 600 に対する反復計算回数の総数が、本解析の約 2 倍になっている原因としては、解析 C の応力積分法が陽的で、変形後の降伏条件を満たさないことが、変形後の力の釣り合い条件にも影響を

及ぼしているためであると考えられる。

本解析法では、図-3に示すように、応力積分過程でも反復計算が必要であるにもかかわらず、表-2より、本解析法のCPUタイムは、500ステップで解析Cの約58%、600ステップでは約62%と、CPUタイムからも本解析法の効率性が示された。一方、図-17は、50ステップの本解析法、および500ステップの解析Cによるせん断ひずみ γ と直ひずみ ϵ の関係について、式(33)の理論解とともに示している。同図より、本解析は50ステップであっても、理論解と良好に一致することから、本研究で提案した陰的応力積分法の優れた精度が示された。

5. トラス橋のリダンダンシー解析への適用例

本節では、2、3節で述べた非線形解析法を導入した弾塑性有限変位解析プログラムを用いて、図-18に示すような単純支持上路式鋼トラス橋について、支間中央部の下弦材の破断を想定してリダンダンシー解析を実施し、同一の解析条件下での応力積分法の相違による影響を比較した。詳細は省略するが、本橋は、1997年に設計された支間長160.4m、幅員12m、支間中央の主構高さ約14mのトラス橋である。

本橋の薄肉閉断面骨組部材、薄肉開断面骨組以外は、RC床版を8節点シェル要素、ゴム支承をバネ要素、スラブアンカーと骨組中心線のずれをオフセット要素でモデル化した。また、薄肉開断面部材については、そりねじりの影響は小さいものと判断し、St. Venantねじり理論に従う骨組要素でモデル化した。ただし、この要素では、ねじりによるせん断応力が塑性化に及ぼす影響は無視でき、断面に塑性化が生じて、弾性ねじり剛性を有するものと仮定した。さらに、骨組の格点部は剛結合を仮定した。

荷重条件は、死荷重と活荷重を載荷した状態で、支間中央部の下弦材を消去し、衝撃の影響を無視して破断部材の断面力を解放した。活荷重については、破断部材の軸力が最も不利となるように、道路橋示方書¹⁵⁾のL荷重と群集荷重を載荷した。

解析結果として、図-18に示す格点AにおけるZ軸方向の解放力と変位の関係について、陰的応力積分法を用いて孤長増分0.15で断面力を解放した結果、100等分割の荷重制御法によって断面力を解放した結果、および陽的応力積分法を用いて100等分割の荷重制御法によって断面力を解放した結果をあわせて図-19に示す。

図-19の孤長制御法を用いた解析結果より、本橋は、Z軸方向の解放力が凡そ14MNに至った時点でピーク点が現れ、その後、スナップバック型の除荷挙動を呈することが分かる。ピーク状態の破断想定部材近傍の変形図を図-20に示すが、破断部側

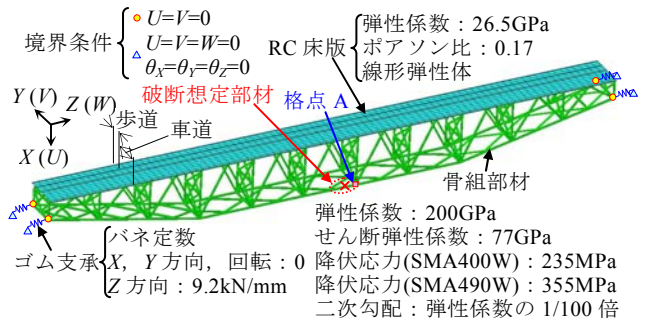


図-18 トラス橋の解析モデル

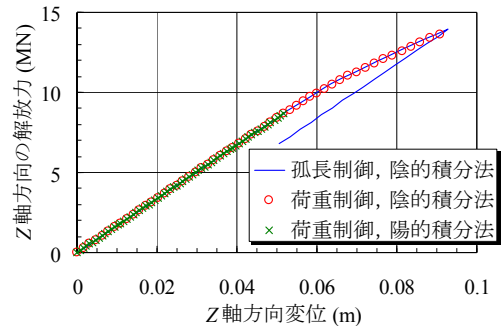


図-19 格点Aでの解放力と変位の関係

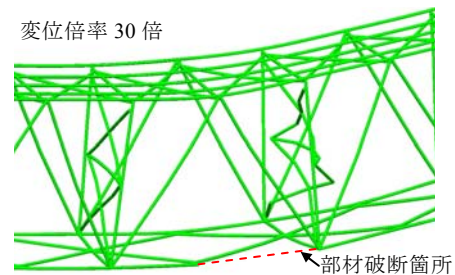


図-20 ピーク状態における変形状況

近の対傾構に面外変位を生じており、対傾構の斜材が終局状態に至ることにより、破断部材が負担していた断面力の伝達経路が断たれ、ピーク状態に到達したものと考えられる。即ち、木曾川大橋、本荘大橋の斜材破断事故では、橋梁全体の崩壊は免れたものの、本橋では、静的解析範囲の検討ではあるが、部材破断によって破断部近傍の部材に塑性化が生じて、橋梁全体の崩壊に至る可能性が示された。次に、陰的応力積分法、陽的応力積分法を用いて荷重制御法により破断部材の断面力を解放した結果について比較すると、前者ではピーク状態までの挙動が追跡できているのに対し、後者では約8.6MNの解放力で解析が破綻していることが分かる。これは、この解放力以降では、破断部近傍の横繫ぎ材に急激に塑性化が進行するため、4.2の(2)と同様に、大きな荷重増分によって平衡条件が満たされなくなったことによるものと考えられる。

6. 結論

本論文では、直応力とねじりによるせん断応力と

の連成を考慮した薄肉一室閉断面はり要素の弾塑性解析法について、解析精度と解析効率を向上させるための弾塑性剛性の評価方法、および陰的応力積分法を提案した。また、部材破断後の弾塑性有限変位挙動を静的に追跡するための手法についても示した。そして、数値解析例を通して、提案した手法の妥当性、精度や効率性について示した。さらに、提案手法を導入した弾塑性有限変位解析を用いて、単純支持上路式鋼トラス橋のリダンダンシー解析を実施し、使用する応力積分法の影響を比較した。その結果、以下の知見が得られた。

- (1) 薄肉閉断面骨組要素の節点位置で断面力を評価する手法は、節点位置での塑性ヒンジの形成が可能となるため、一般的な弾塑性骨組解析法に比べて、少ない要素分割数でも解析精度が確保できる。
- (2) 薄肉閉断面骨組要素内で弾塑性剛性を線形変化させる手法によれば、要素内で弾塑性剛性を一定とする手法に比べて力の釣り合いに関する反復計算回数が少なく、効率的である。
- (3) 同じ荷重増分ステップ数で比較すると、本研究で提案した薄肉閉断面骨組要素に対する陰的応力積分法は、陽的応力積分法を用いた解析に比べて、応力増分の算定過程で反復計算が必要であるにもかかわらず、力の釣り合いに関する反復計算回数が少なく、結果的に CPU タイムが減少するため、効率的である。
- (4) 陰的応力積分法による解析によれば、大きな荷重増分に対しても、小さな荷重増分を用いた解析と同等の精度が得られる。
- (5) 陽的応力積分法では、増分ステップが大きいと、急激な塑性化の進行によって解析が破綻する可能性があるのに対して、陰的応力積分法では、安定的に解を得ることができる。

参考文献

- 1) 高橋岳太：鋼トラス橋の冗長性に関する数値的検討，東北大学大学院工学研究科土木工学専攻修士論文梗概集，pp.1-4，2009.
- 2) 永谷秀樹，明石直光，松田岳憲，安田昌宏，石井博典，宮森雅之，小幡泰弘，平山 博，奥井義昭：我国の鋼トラス橋を対象としたリダンダンシー解析の検討，土木学会論文集 A，Vol.65，No.2，pp.410-425，2009.
- 3) 本多一成，後藤芳顕，川西直樹：リダンダンシー解析における鋼トラス部材破断時の衝撃係数に関する一考察，土木学会第 64 回年次学術講演会概要集，I-113，pp.225-226，2009.

- 4) Komastu S. and Sakimoto T. : Elasto-plastic behavior of thin-walled steel tubes under combined forces, Proc. of JSCE, No.235, pp.125-136, 1975.
- 5) Komastu S. and Sakimoto T. : Nonlinear analysis of spatial frames consisting of members with closed cross-sections, Proc. of JSCE, No.252, pp.143-157, 1976.
- 6) Li, X. S. and Goto Y. : A three-dimensional nonlinear seismic analysis of frames considering panel zone deformations, Journal of Structural Mechanics and Earthquake Engineering, No.605/I-45, JSCE, pp.1-13, 1998.
- 7) 倉西 茂，矢吹哲哉：鋼アーチ橋の極限強度に及ぼす横構剛性の影響について，土木学会論文報告集，第 305 号，pp.47-58，1981.
- 8) 関西道路橋研究会・道路橋調査研究委員会編：コンピュータによる鋼橋の終局強度解析と座屈設計，共立出版，1998.
- 9) Simo, J. C. and Taylor, R. L. : A Return Mapping Algorithm for Plane Stress Elastoplasticity , International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.22, pp.649-670, 1986.
- 10) Simo, J. C. and Govindjee, S. : Exact Closed-form Solution of the Return Mapping Algorithm in Plane Stress Elasto-Visco Plasticity, Engineering Computation, Vol.5, pp.254-258, 1988.
- 11) Krieg, R. D. and Krieg, D. B. : Accuracies of Numerical Solution Methods for the Elastic-Perfectly Plastic Model , Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions, ASME, pp.510-515, 1977.
- 12) Schreyer, H. L. Kulak, R. F. and Kramer, J. M. : Accurate Numerical Solutions for Elasto-Plastic Models, Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions., ASME, Vol.1.101, pp.226-234, 1979.
- 13) M, Kojic and K, J, Bathe : Inelastic Analysis of Solids and Structures, Springer, 2005.
- 14) 後藤芳顕，川西直樹：腐食や補修の影響を考慮した長期間の力学性能評価のための構造解析法の開発，土木学会論文集，No.689/I-57，pp.85-100，2000.
- 15) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説 I 共通編 II 鋼橋編，丸善，2002.

(2010年3月9日受付)