

XFEMの汎用FEM解析コードへの実装と 実構造物の疲労き裂進展シミュレーション

Implementation of XFEM into a general-purpose FEM code and simulation of fatigue crack propagation in actual structure

柴沼一樹*・青井弘樹**・宇都宮智昭***・坂野昌弘****・夏秋義広*****

Kazuki SHIBANUMA, Hiroki AOI, Tomoaki UTSUNOMIYA, Masahiro SAKANO and Yoshihiro NATSUAKI

*学生員 京都大学大学院 工学研究科 社会基盤工学専攻・日本学術振興会 特別研究員-DC (〒615-8540 京都市西京区京都大学桂)

**学生員 京都大学大学院 工学研究科 社会基盤工学専攻 (〒615-8540 京都市西京区京都大学桂)

***正会員 京都大学大学院 工学研究科 社会基盤工学専攻 准教授 (〒615-8540 京都市西京区京都大学桂)

****正会員 関西大学 環境都市工学部 都市システム工学科 教授 (〒564-8680 大阪府吹田市山手町3-3-35)

*****正会員 日本橋梁建設協会 (〒550-0005 大阪市西区西本町1-8-2 三晃ビル5階)

In order to evaluate the behavior of a fatigue crack in the local part of complex and large-scale civil engineering structures such as orthotropic steel deck, we develop a fatigue crack simulation code by implementation of PU-XFEM into the general-purpose FEM analysis software. We have adopted the multiple-nodes to increase the nodal degrees of freedom. This makes possible to implement the PU-XFEM approximation to various software without any changes of the definitions in the convention rules. The performance of the developed code is evaluated through verification of the numerical accuracies of fracture mechanics parameters using basic models. Then, the developed code is applied to the numerical simulations of the fatigue crack propagation in the orthotropic steel deck specimen using bulb rib, as an example. It is concluded that the developed PU-XFEM analysis code is useful for the quantitative evaluation of fatigue propagation in actual structure.

Key Words: XFEM, PU-XFEM, implementation, fatigue, crack propagation, actual steel structure

1. はじめに

現在、経年した鋼橋の鋼床版において疲労き裂の発生が多数報告されている¹⁾。これに対し、実橋に発生した疲労き裂の進展挙動を数値解析により、容易かつ高精度にシミュレートすることが可能となれば、鋼橋における疲労き裂の発生・進展のメカニズム解明とその維持管理の合理化に対して非常に有効な手段となりうる。

しかし、構造解析に広く採用されている有限要素法 (FEM) は、本来、連続体を対象として構築されたものであるため、FEMをき裂解析に適用する場合には、メッシュ生成に関して以下の解決すべき課題が存在する。(1)き裂による不連続面のモデル化のために、き裂形状に要素境界を一致させる必要がある。(2)破壊力学パラメータを精度よく評価するために、き裂先端近傍において要素の細分化や特異要素²⁾の使用が必要となる。さらに、(3)き裂の進展過程を考えた場合、進展に伴い上記(1)、(2)の複雑なメッシュ処理を繰り返す必要がある。このため、既往の研究においてFEMを用いた疲労き裂の進展解析の実施が報告されているが^{3),4),5)}、鋼橋の鋼床版のような複雑かつ大規模な構造体に局所的に発生する疲労き裂の挙動を精度よく評価することは、高度な工夫とノウハウを要するため容易で

はない。

一方、近年提案された拡張有限要素法 (eXtended FEM; XFEM)⁶⁾は、FEMの枠組みを用いた数値解析手法であるにも関わらず、任意の局所的な領域内において、要素内部に不連続性や特異性を含む高度な近似 (エンリッチメント) を組み込むことが可能となる。これにより、このXFEMをき裂解析に適用した場合、通常のFEMとは異なりメッシュとは独立にき裂の不連続面をモデル化できるため、通常のFEMを用いたき裂進展解析に関するメッシュの生成に関する課題が解決され、容易にその進展挙動の評価が可能となる。しかし、この従来のXFEM近似において、節点単位で付加されるエンリッチメントが部分的に含む要素 (Blending Elements; BE) において、解析精度の低下が指摘された^{7),8)}。これに対して、著者らは、解析領域全体の近似精度を保証するPUFEMの近似法⁹⁾に基づいてXFEMの再定式化 (以下、PU-XFEMとする) を提案し、上記のBEにおける問題を解決した^{10),11)}。

ところで、近年では多くの汎用FEM解析ソフトウェアの機能が充実し、特にソフトウェアのプリ・ポストプロセッサでは有限要素モデルの作成や計算結果の処理が容易かつ効率的に実施可能となり、非常に有用なものとなっている。このため、それらを利用した複雑な大規模構造物の挙

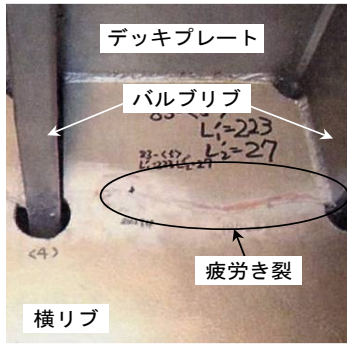


図-1 鋼床版においてバルブリーブと横リブの交差部より横リブに発生した板厚貫通き裂

動に関して解析的な検討が実施されつつある^{12),13)}。

そこで、この大規模構造物の解析に適した汎用FEM解析ソフトウェアに、き裂解析に適したPU-XFEM近似を組み込むことにより両者の利点を組み合わせることができれば、大規模かつ複雑な構造物に発生する疲労き裂の評価を行う上で、実用上有効なツールとなりうると考えられる。

ただし、このXFEMの汎用FEM解析ソフトウェアへの実装においては、XFEM近似の導入に必要な節点自由度の増加法が重要な課題となる。例えば、最近Ginerら¹⁴⁾は、2次元平面問題を対象とした従来のXFEMの汎用FEM解析ソフトウェアへの実装法を示し、ソフトウェアの規約において面外の回転や温度として定義された自由度を強制的に2次元平面問題の構造解析に用いる自由度として再定義した。しかし、このようにソフトウェアの規約で定められた本来の自由度の定義に反した方法を採用した場合、解析ソフトウェアのソースコードが公開されておらずブラックボックスとなっているため、その妥当性を断定することは一般的に困難である。さらに、規約で定められた許容可能な節点自由度数の制限により、自由度数の大幅な増加が必要となる3次元解析などの拡張性にも課題が残されている。したがって、このXFEMの汎用FEM解析ソフトウェアへの実装方法は、合理性に関して必ずしも適切な方法であるとはいえない。

以上の背景より、本研究では、汎用FEM解析ソフトウェア ABAQUS¹⁵⁾をベースとしてPU-XFEM近似を実装することで、シェル要素でモデル化可能な3次元構造体に発生した板厚方向貫通き裂を対象とした疲労き裂進展シミュレーションが可能となる解析コードの開発を行った。特に、節点自由度の増加法に関してはソフトウェアの規約によって定められた本来の自由度の定義を損なうことなく、ABAQUS以外のソフトウェアへも幅広く適用可能であり、将来的な拡張性を考慮した方法を示す。

なお、最近ABAQUSにおいてXFEMが実装され、それに基づくき裂解析が可能となった。しかし、これは(1)従来のXFEMの近似法に基づいており、XFEMの本質的な問

題であるBEの問題が解決されていない、(2)シェル要素によりモデル化可能な3次元構造物への適用ができない、などの制限があり、鋼床版など複雑かつ大規模な実構造物に発生した疲労き裂を評価するにあたり課題があるのが現状である。

2. PU-XFEMを用いたき裂解析のモデル化

任意のき裂先端近傍の変形は、モードI(開口型)・モードII(面内せん断型)・モードIII(面外せん断型)の3種類の変形様式の重ね合わせで表現される。

しかし、図-1に示す鋼橋のバルブリーブ鋼床版におけるバルブリーブと横リブの交差部より横リブに発生した板厚貫通き裂など、モードIおよびIIによる面内変形と比較して、モードIIIによる面外変形の寄与は小さい場合が多い。そこで本研究では、き裂近傍の変形がモードIおよびモードIIの重ね合わせで表現可能な面内変形により支配されているものと仮定でき、シェル要素でモデル化可能な3次元構造体を対象とする。以下では平面シェル要素の定式化において、著者らが再定式化したPU-XFEMに基づく近似を適用する面内変形のモデル化についてのみ述べるものとする。なお、PU-XFEMの定式化に関する詳細は既往の文献¹¹⁾を参照されたい。また、面内変形に関する応力-ひずみ関係を表す構成則は平面応力を仮定するものとする。

PU-XFEMに基づくき裂解析の面内変位場の近似 $\mathbf{u}_{ap}(\mathbf{x})$ は次式で定義される。

$$\mathbf{u}_{ap}(\mathbf{x}) = \varphi_0(\mathbf{x})\mathbf{v}_0^{ap}(\mathbf{x}) + \varphi_C(\mathbf{x})\mathbf{v}_C^{ap}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

ここで、 $\varphi_0(\mathbf{x})$ および $\varphi_C(\mathbf{x})$ は、 $\varphi_0(\mathbf{x}) + \varphi_C(\mathbf{x}) = 1$ を満足する次式の Partition of Unity (PU) である。

$$\begin{aligned} \varphi_C(\mathbf{x}) &= \sum_{I \in C} \phi_I(\mathbf{x}) \\ \varphi_0(\mathbf{x}) &= 1 - \varphi_C(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2)$$

また、 $\mathbf{v}_0^{ap}(\mathbf{x})$ および $\mathbf{v}_C^{ap}(\mathbf{x})$ は、それぞれ PU $\varphi_0(\mathbf{x})$ および $\varphi_C(\mathbf{x})$ のサポート上において次式で定義される通常の有限要素近似およびき裂先端近傍に付加されるエンリッチメントに対応した近似関数である。

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0^{ap}(\mathbf{x}) &= \sum_I \phi_I(\mathbf{x})\mathbf{u}_I + \sum_{I \in J} \phi_I(\mathbf{x})H(\mathbf{x})\mathbf{b}_I \\ \mathbf{v}_C^{ap}(\mathbf{x}) &= \sum_I \phi_I(\mathbf{x}) \left(\mathbf{u}_I + \sum_{k=1}^4 \gamma_k(\mathbf{x})\mathbf{c}_I^k \right) \end{aligned} \quad (3)$$

式(2)および(3)において、 \mathbf{u}_I 、 \mathbf{b}_I および \mathbf{c}_I^k ($k = 1, \dots, 4$) は節点自由度であり、 J はき裂不連続面近傍の節点集合、 C はき裂先端近傍の節点集合である。また、 $\phi_I(\mathbf{x})$ は標準の有限要素近似で用いる内挿関数であるが、本研究では4節点

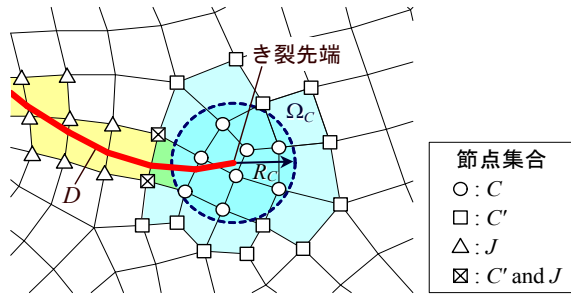


図-2 PU-XFEMに基づくき裂と節点集合のモデル化

要素を構成する双 1 次関数を用いる。関数 $H(\mathbf{x})$ および $\gamma_k(\mathbf{x})$ ($k = 1, \dots, 4$) は従来の XFEM で用いられるものと同一の次式で与えられるエンリッチ関数である。

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{on } \Omega_+ \\ -1 & \text{on } \Omega_- \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \gamma_1(\mathbf{x}) &= \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, & \gamma_2(\mathbf{x}) &= \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \\ \gamma_3(\mathbf{x}) &= \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta, & \gamma_4(\mathbf{x}) &= \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、式(4)のエンリッチ関数 $H(\mathbf{x})$ はき裂面における変位の不連続性を表す Heaviside 基底である¹⁶⁾。また、 Ω_+ および Ω_- は、それぞれエンリッチ関数 $H(\mathbf{x})$ が付加される節点 J のサポート Ω_J 上で定義される、き裂不連続面に対する上側および下側の部分領域である。また、式(5)のエンリッチ関数 $\gamma_k(\mathbf{x})$ ($k = 1, \dots, 4$) は、き裂先端近傍変位場の漸近解の基底であり、 r および θ はき裂先端を原点とした極座標系である¹⁷⁾。

以上の定式化より、PU-XFEM に基づく近似法において、き裂先端近傍に付加されるエンリッチメントは従来の XFEM のような節点単位の付加によってではなく、PU $\varphi_C(\mathbf{x})$ のサポート上の領域ベースで定義される。

本研究では、式(2)および式(3)で用いた節点集合 J および C を以下のように定義する。

$$J = \{I \in N \mid \Omega_I \cap D \neq \phi, I \notin C\} \quad (6)$$

$$C = \{I \in N \mid |\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_{\text{tip}}| \leq R_C\} \quad (7)$$

ここで、 \mathbf{x}_I および \mathbf{x}_{tip} はそれぞれ節点 I およびき裂先端の座標、 Ω_I は内挿関数 $\phi_I(\mathbf{x})$ のサポートであり、 D はき裂の不連続面である。なお、節点集合 C の定義半径 R_C は、入力値として扱う。

また、PU-XFEM に基づく定式化において、エンリッチ関数 $\gamma_k(\mathbf{x})$ ($k = 1, \dots, 4$) に対応する自由度 \mathbf{c}_I^k ($k = 1, \dots, 4$) は、PU $\varphi_C(\mathbf{x})$ のサポート Ω_C 上のすべての節点で付加する必要がある。そこで、次式により節点集合 C' を定義する。

$$C' = \{I \in N \mid \Omega_I \cap \Omega_C \neq \phi, I \notin C\} \quad (8)$$

以上の式(6) ~ (8)で定義された節点集合に関するモデル化の模式図を図-2 に示す。なお、節点集合 J および C' には、共通部分が存在することに注意されたい。

PU-XFEM における各節点で有効となる自由度は、式(6) ~ (8)で定義したそれぞれの節点集合に対応して定義することができる。すなわち、エンリッチ関数 $H(\mathbf{x})$ に対応する自由度 \mathbf{b}_I は節点集合 J に含まれる節点に付加され、エンリッチ関数 $\gamma_k(\mathbf{x})$ ($k = 1, \dots, 4$) に対応する自由度 \mathbf{c}_I^k ($k = 1, \dots, 4$) は節点集合 C あるいは C' に含まれる節点に付加される。なお、それぞれの節点集合に対応した具体的な節点自由度数に関しては、3章を参照されたい。

なお、ここで示した PU-XFEM 近似に関する定式化および事前の誤差解析の詳細や基本的な数値解析例は、既往の文献¹¹⁾を参照されたい。

3. 汎用FEM解析ソフトウェアABAQUSへの実装

本研究では、代表的な汎用の FEM 解析ソフトウェアのひとつである ABAQUS¹⁵⁾をベースとして、PU-XFEM 近似を実装し、3次元構造体に発生した板厚方向貫通き裂を対象とした疲労き裂の進展シミュレーションが実施可能となる解析コードの開発を行った。本解析コードは、ABAQUS に以下のプログラムを新たに追加することで構成される。

- PRE-PRO: 汎用 FEM 解析ソフトウェアに PU-XFEM 近似を実装するプログラム
- POST-PRO: 応力拡大係数の算出、疲労き裂進展方向・伝播速度の評価およびき裂形状の更新を行うプログラム
- XFEM3DS: 解析コード全体のフローを制御するプログラム

本章では、まず、3.1 節において、解析全体のフローを示すとともに、それを制御するプログラム XFEM3DS に関して概説する。次に、3.2 節において、プログラム PRE-PRO、3.3 節において、プログラム POST-PRO に関して、それぞれの概説する。ここで特に、3.2 節では、XFEM の汎用 FEM 解析ソフトウェアへの実装において重要な課題である節点自由度の増加法に関して、ABAQUS の規約において定められた本来の自由度の定義を損なうことなく、かつ ABAQUS 以外のソフトウェアへも幅広く適用可能であり、将来的な拡張性を考慮した方法を示す。

なお、以下の記述において、ABAQUS で用いることが可能な各オプションの詳細は、ABAQUS User's Manual¹⁵⁾を参照されたい。

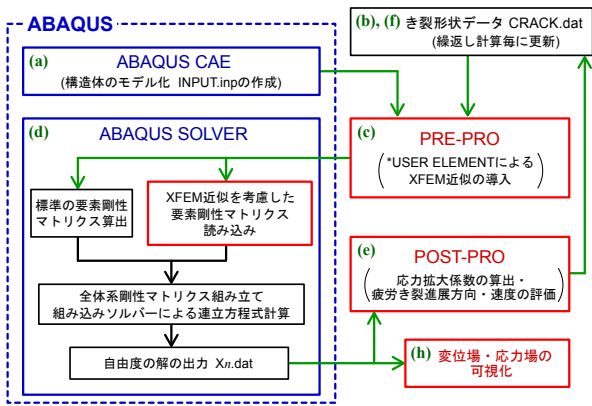


図-3 ABAQUSにPU-XFEM近似を実装することで開発した疲労き裂進展解析コードのフローチャート (解析全体はXFEM3DSにより制御される)

3.1 解析全体のフローとその制御

本解析コードは、図-3に示すように、既存の汎用FEM解析ソフトウェアABAQUSに、PRE-PRO (ABAQUSにPU-XFEM近似を導入するプログラム)およびPOST-PRO (応力拡大係数の算出、疲労き裂進展方向・伝播速度の評価とき裂形状の更新を行うプログラム)を追加し、XFEM3DSにより解析全体が制御される。本解析コードの具体的な手順を以下に示す。

- (a) ABAQUS CAEを利用して、き裂を含まない健全な構造体のFEM解析モデルを作成し、全体系剛性マトリクスの組み立ておよび連立方程式の計算を実行する汎用FEM解析ソフトウェアのソルバーへ直接ジョブとして投入可能な入力ファイル (INPUT.inp) への書き出しを行う。
- (b) (a)で作成された解析モデルに座標を整合させた初期き裂形状データ (Crack.dat) を定義する。
- (c) (b)または(f)で定義したき裂形状データ (Crack.dat) を参照し、(a)で作成された入力ファイル (INPUT.inp) の一部を、PU-XFEM近似を導入するために書き換え、新たな入力ファイル (Xn.inp, ただしnは解析ステップ数) の作成が可能なプログラム PRE-PRO を実行する。
- (d) (c)で作成された PU-XFEM 近似を導入した入力ファイル (Xn.inp) を用いて、汎用FEM解析ソフトウェアのソルバーへジョブの投入を行う。これにより、全体系剛性マトリクスの組み立ておよび連立方程式の計算が実行され、各節点自由度に関する数値解をデータとして含む出力ファイル (Xn.dat) が出力される。
- (e) (d)の計算により得られた出力ファイル (Xn.dat) を参照し、応力拡大係数の算出、疲労き裂進展方向・伝播速度の評価が可能なプログラム POST-PRO を実行する。

表-1 ABAQUSの規約¹⁵⁾で定義された節点自由度

自由度番号	定義
1-3	x, y, z -変位 (全体座標系)
4-6	x, y, z -軸まわりの回転 (全体座標系)
7	反りの大きさ (開断面はり要素に対して)
8	間隙圧, 静水圧流体の圧力, 音圧
9	電位
10	コネクタ材料流れ (長さの単位)
11	温度 (質量拡散解析では正規化濃度)
12	第2温度
13	第3温度
14	Etc.

- (f) (e)の疲労き裂進展方向の評価結果に基づき、き裂形状データ (Crack.dat) の更新を行う。
- (g) き裂長さや応力拡大係数等により指定した解析の終了条件を満足するまで、(c) ~ (f)の行程を繰り返し実行する。
- (h) 必要に応じて、可視化ソフトウェアTECPLOT¹⁸⁾にて読み込みが可能なき裂進展に伴う解析ステップ毎の変位場・応力場の出力ファイル (DSn.dat および STn.dat) を出力する。これにより、PU-XFEM近似を汎用FEM解析ソフトウェアABAQUSに導入でき、疲労き裂を容易にモデル化し、その進展挙動をシミュレートすることが可能となる。

3.2 汎用FEM解析ソフトウェアへのPU-XFEM近似の実装

ここでは、本解析コードで特に重要となる汎用FEM解析ソフトウェアへのPU-XFEM近似の実装に関して述べる。

汎用FEM解析ソフトウェアへのXFEM近似の導入は、ソフトウェアに実装された任意の要素を定義する機能を用いることで可能となる。例えば、本研究で用いたABAQUSの場合、その体系を維持するために定められた規約の範囲内で任意の要素を定義し、解析に組み込むことが可能なオプション*USER ELEMENTが用意されている。

ただし、汎用FEM解析ソフトウェアへXFEM近似を導入した要素を定義するためには、き裂近傍の各節点で自由度数の増加が必要となり、その実装方法が重要な課題となる。例えばABAQUSでは、その規約により節点単位で変位場を構成する自由度の番号が表-1のように規定されており、XFEM近似の導入に必要な変位場の構成に関わる節点自由度数を、単純には追加できないことが問題となる。

そこで以下では、まず(1)項において、本研究で用いる多重節点による節点自由度増加法を示す。次に(2)項において、具体的なPU-XFEM近似の汎用FEM解析ソフトウェアへ

表-2 XFEM 近似を導入する要素の追加節点および自由度

(a) 4 節点平板シェル要素における標準の有限要素近似に対応する節点数および自由度数

	節点数	自由度数
標準の有限要素近似	4	24 (4×6)

(b) 各節点集合に対応する追加節点数および自由度の増加

	追加節点数	追加自由度数
C-node	+4	+12 (4×3)
C'-node	+4	+12 (4×3)
J-node	+1	+3 (1×3)
(J + C')-node	+5	+15 (5×3)

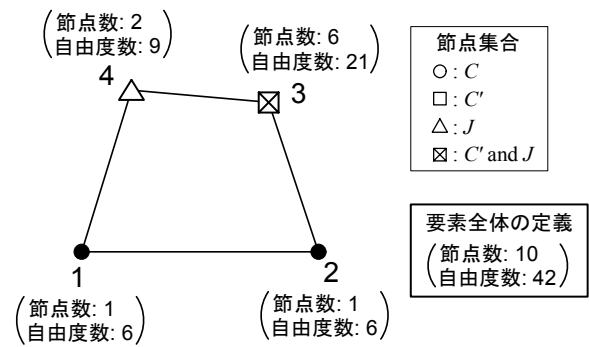


図-4 オプション*USER ELEMENT により XFEM 近似を導入する要素の一例

の実装法を示すために、ABAQUS に対応した入力ファイル作成プログラム PRE-PRO の概要を示す。

(1) 多重節点による節点自由度の増加法

節点自由度を増加させるにあたり、対象となる節点と同一の座標上に新たに複数の節点を設置することにより必要となる自由度数を確保することが可能となる。すなわち、同一の座標上に複数の節点を「多重節点」として定義することにより、結果的に1節点あたりの自由度を増加させることができる。本解析コードでは、ABAQUS に装備されたオプション*USER ELEMENT を用いて PU-XFEM 近似を実装するが、この方法を用いることで、ソフトウェアの規約における節点自由度の定義に反することなく節点自由度を増加させることが可能となる。

以下に、具体的な自由度の増加法を述べる。

本研究では、3次元問題を対象として用いられる節点あたり6自由度（並進3自由度、回転3自由度）を有し、合計24自由度で構成される4節点平板シェル要素を基準の要素として用いる。

ここで、2章で述べたように、本研究の範囲では PU-XFEM 近似の実装に関して面外変形を考慮しない。このため、回転自由度を省略し、並進に関する3自由度のみを有する節点を自由度増加のための追加節点として用いる。これにより、表-2に示すように、PU-XFEM 近似の導入にあたり自由度の増加が必要な節点は、式(6)~(8)で定義した節点集合(図-2参照)に対応する数の節点を多重節点として追加することで、自由度を増加することができる。

例えば、図-4に示す要素を考えた場合、要素を構成する節点のうち、節点3は節点集合Jおよび節点集合C'に含まれるため6重節点としてモデル化し、節点4が節点集合Jに含まれることから2重節点としてモデル化する。このため、この要素を定義するのに必要な節点数および自由度数はそれぞれ、節点数: 1+1+6+2=10、自由度数: 6+6+21+9=42となる。

本解析コードで用いた節点自由度の増加法は、以下に示

す特徴を有する。

- ・汎用 FEM 解析ソフトウェアの規約によって定められた本来の自由度の定義を損なうことがないため、プログラムの実装において比較的容易に XFEM 近似のソフトウェアへの実装が可能となる。
- ・汎用 FEM 解析ソフトウェアの多くの機能を維持し利用することができる。
- ・任意の節点に任意の自由度を追加可能であることから、ソフトウェアの規約に制限されることなく、3次元問題への拡張などに必要となる自由度の大幅な増加を、容易に達成することができる。
- ・ABAQUS という個別のソフトウェアにのみ対応したのではなく、他の汎用 FEM 解析ソフトウェアへの応用も可能な一般的な考え方を与えるものである。

(2) PU-XFEM 近似の実装の手順

疲労き裂は、微小変形を仮定した弾性学の範囲内でその挙動を評価できると考えられる。

このため、任意の要素の定義において、直接的に要素剛性マトリクスを導入可能である場合、容易に XFEM 近似の実装が可能となる。例えば、ABAQUS においては、オプション*USER ELEMENT においてオプション*MATRIX を用いることで直接的に要素剛性マトリクスを導入することができる。

そこで、(1)項で示した多重節点による節点自由度の増加法を踏まえ、ABAQUS に PU-XFEM 近似を導入するプログラム PRE-PRO による処理の実行手順を以下に示す。

- ABAQUS CAE を用いて作成した、き裂を含まない FEM 解析モデルの入力ファイル (INPUT.inp) から、すべての節点座標および節点-要素関係を読み込む。また、き裂形状データ (CRACK.dat) から、き裂の座標データを読み込む。
- き裂座標および各要素を構成する節点座標を比較し、節点集合 C, C' および J をそれぞれ定義し、それに対応して表-2(b)に示す追加節点を多重節

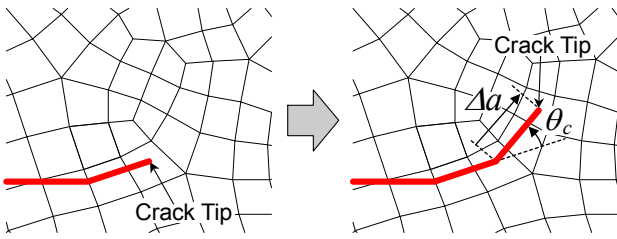


図-5 き裂進展のモデル化

点として定義する。

- (iii) 要素を構成する節点の一部が、節点集合 C 、 C' および J に含まれる場合、エンリッチ関数を考慮した要素剛性マトリクスの算出を行う。なお、要素内部にき裂の不連続面を含む場合、積分領域を分割し、別々に計算を実行する。
- (iv) ABAQUS CAE を用いて書き出された入力ファイル (INPUT.inp) において、(iii) で要素剛性マトリクスを算出した要素に関して、オプション *USER ELEMENT および *MATRIX を用いて要素剛性マトリクスを直接導入し、その定義を書き換えることで、新たな入力ファイル (Xn.inp) を作成する。ここで作成された、XFEM 近似を導入した入力ファイル (Xn.inp) は、そのみで ABAQUS のソルバーにジョブとして投入し、各節点自由度に対応する数値解を得ることができる。

3.3 応力拡大係数の算出と疲労き裂進展方向・速度の評価

疲労き裂の進展解析には、応力拡大係数の評価およびそれに基づく疲労き裂の進展挙動のモデル化が必要となる。そのため、本解析コードでは、それらを実行可能なプログラム POST-PRO の追加を行う。以下では、POST-PRO で用いられる応力拡大係数の評価法と疲労き裂の進展基準に関する概要を示す。

応力拡大係数の評価は、XFEM を用いた 2 次元き裂解析において最も一般的に用いられている M 積分法 (相互積分法)¹⁹⁾ により行う。 M 積分の被積分関数に含まれる応力・ひずみ場は、節点自由度に対応した数値解を用いて再構成する。なお、本解析コードでは、屈折または曲線き裂への適用に有効な修正 M 積分法^{19),20)} を用いる。

なお、PU-XFEM を用いた場合、節点集合 C の定義半径 R_C および M 積分評価領域の定義半径 R_F を、ともにき裂先端を含む要素に対して最小限の範囲でモデル化することが可能となる¹¹⁾。このため、 R_C および R_F を次式で示すように、 $1.0h$ あるいはき裂先端を含む要素を構成する各節点とき裂先端との距離いづれかの最大値で定義する。

$$R_C = R_F = \max \left\{ 1.0h, \max \{ |x_I - x_{tip}| \} \right\} \quad (9)$$

ここで、式(9)の l および h は、それぞれき裂先端が位置する要素を構成する節点および要素辺の平均長さである。

き裂の進展方向および伝播速度によりモデル化される疲労き裂の進展挙動は、 M 積分法により算出した応力拡大係数に基づく経験則を用いてモデル化可能であることが知られている。

まず、き裂の進展方向の判断基準として、北川らにより提案されたき裂先端の接線応力の振れ幅 $\Delta\sigma_\theta$ が最大となる方向 θ_c にき裂が進展すると仮定した次式の最大接線応力範囲基準²¹⁾に従うものとする。

$$\theta_c = 2 \tan^{-1} \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta K_I}{\Delta K_{II}} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta K_I}{\Delta K_{II}} \right)^2 + 8} \right) \right\} \quad (10)$$

この最大接線応力範囲基準に関する実験的な妥当性の検証は、大路らにより高張力鋼の残留応力場における疲労き裂を対象に実施されている²²⁾。

また、モード I・II 混合モードにおける等価応力拡大係数範囲 ΔK を次式で定義する²³⁾。

$$\Delta K = \Delta K_I \cos^3 \left(\frac{\theta_c}{2} \right) - 3 \Delta K_{II} \cos^2 \left(\frac{\theta_c}{2} \right) \sin \left(\frac{\theta_c}{2} \right) \quad (11)$$

この等価応力拡大係数 ΔK を用いて、疲労き裂の伝播速度は、次式の応力拡大係数範囲の下限界 ΔK_{th} を考慮したパリソ則に従うものと仮定する。

$$\frac{da}{dN} = C \{ \Delta K^m - (\Delta K_{th})^m \} \quad (12)$$

ここで C および m は材料定数である。本研究では日本鋼構造協会、鋼構造物の疲労設計指針・同解説の平均設計曲線に基づき、それぞれの定数を $C = 1.50 \times 10^{-11}$ 、 $m = 2.75$ 、 $\Delta K_{th} = 2.9 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ とし²⁴⁾、疲労き裂開口現象の影響は考慮しないものとする。

本解析コードでは、図-5 に示すように各計算ステップにおいて、あらかじめ指定したき裂の進展長さ Δa により、き裂形状データを更新する。また、応力拡大係数範囲 ΔK の進展前後の数値解を線形補間により近似することで、式(12)より载荷回数 N を逆算する。

式(10)および式(12)に示す進展則は、すべて応力拡大係数範囲 ΔK_I および ΔK_{II} に基づき規定しており、構造体に生じる残留応力や死荷重などの平均応力の影響を考慮していないが、これにより解析条件が単純化され、容易に進展挙動のモデル化が可能となる。

4. 解析コードの検証

1章に述べたように、本研究は実構造への適用を目的として PU-XFEM の汎用 FEM 解析コードへの実装を示すも

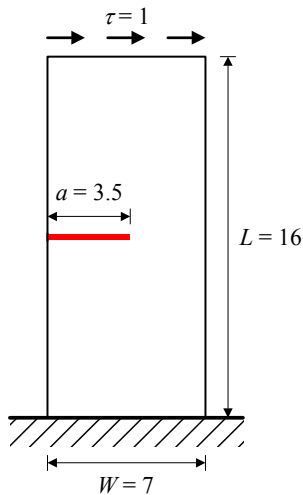


図-6 縁き裂を有する有限の帯板モデル (Model-1)

のである。これに対し、既往の研究成果^{10),11)}ではPU-XFEMを用いた場合の実構造物への適用前に必要となる有限板を対象とした破壊力学パラメータの解析精度に関する十分な評価が示されていない。そこで本章では、実構造物に発生した疲労き裂の進展シミュレーションを実施する前に、単純な有限板モデルを対象としてPU-XFEM近似を実装した解析コードに関する基本的な解析精度の評価を行う。

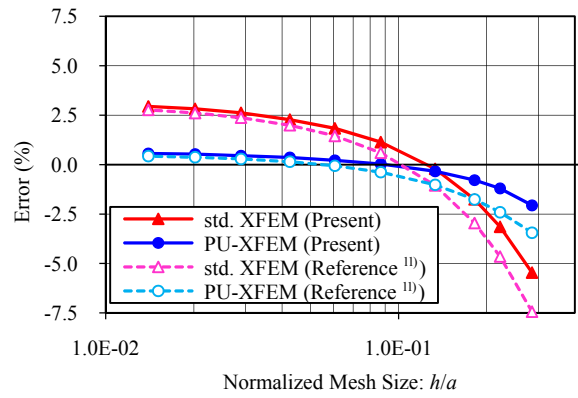
具体的には、4.1節において混合破壊モードIおよびIIの応力拡大係数の解析解が既知であるモデル、4.2節においてき裂進展過程の応力拡大係数の解析解が既知であるモデルをそれぞれ対象として、代表的な汎用FEM解析ソフトウェアのひとつであるABAQUSをベースとして開発した解析コードによる破壊力学パラメータの数値解の解析精度を、解析解および著者らの前報¹¹⁾で用いた解析コードの数値解と比較することで検証する。

なお、3章で実装方法を示した解析コードはシェル要素でモデル化可能な3次元構造物における板厚貫通き裂の進展解析を実施可能なものであるが、本章で実施する検証は平面ひずみを仮定した2次元問題を扱う。

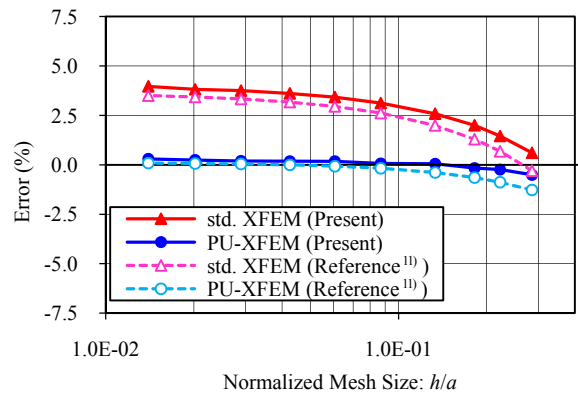
4.1 混合破壊モードの破壊力学パラメータ解析精度

ここでは、図-6に示す混合モードIおよびIIの応力拡大係数の解析解が既知なき裂のある帯板のせん断モデル (Model-1) を対象として、破壊力学パラメータの数値解の精度評価を行う。

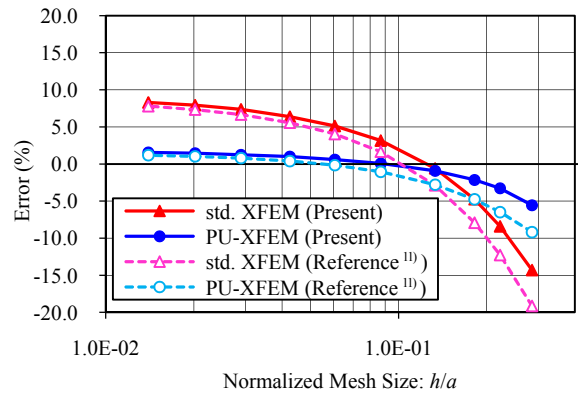
指標として用いる破壊力学パラメータは、応力拡大係数 K_I および K_{II} と、式(12)に示した伝播速度 da/dN を扱う。ただし、伝播速度 da/dN の評価においては、モデルの上端に負荷するせん断応力 τ をせん断応力範囲 $\Delta\tau$ に置き換えるものとし、応力拡大係数範囲の下限界 ΔK_{th} を十分に小さいものとして考慮しない。



(a) 応力拡大係数 K_I



(b) 応力拡大係数 K_{II}



(c) 疲労き裂伝播速度 da/dN

図-7 破壊力学パラメータの解析精度 (Model-1)

数値解の誤差評価に用いる応力拡大係数 K_I および K_{II} の解析解を以下に示す¹⁹⁾。

$$\begin{aligned} K_I &= 34.0 \\ K_{II} &= 4.55 \end{aligned} \quad (13)$$

解析モデルは有限の寸法を有するため、解析精度の評価はき裂長さ a を基準として正規化した要素サイズ h (以下、 h/a とする) をパラメータとして行う。節点集合 C の定義半径 R_C および M 積分評価領域の定義半径 R_F は、式(9)の定義に従うものとする。なお、本検証では、従来のXFEM¹⁶⁾

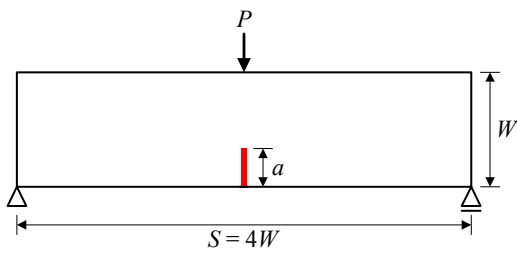


図-8 き裂のある3点曲げモデル (Model-2)

を用いた場合との解析精度の比較も示す。

以上の条件に基づいた解析結果を図-7に示す。

まず、図-7(a)に示す応力拡大係数 K_I に関する解析結果より、PU-XFEM を実装した本解析コードによる数値解は、 h/a が十分に小さい場合で解析解との誤差+0.5%程度となり、 h/a が大きい0.3程度の場合で解析解との誤差-2.0%となった。著者らの前報¹¹⁾で用いた解析コードとの比較では、両者の数値解の差異は h/a が大きい0.3程度の場合で1.0%程度となったが、 h/a が十分に小さい場合においてほぼ一致し、両者は同様の傾向を示した。なお、 h/a が大きい場合における両者の1.0%程度の差異の原因としては、節点自由度の増加が不要な要素の近似法において、汎用FEM解析ソフトウェアでは単純な四辺形双一次要素ではなく、非適合要素などの高性能有限要素²⁵⁾が組み込まれているためであると考えられる。なお、従来のXFEMを用いた場合では、 h/a が大きい場合に数値解は大きく過小評価となり、特に h/a が0.3程度の場合に誤差は-5.5%となった。また、 h/a が十分に小さい場合では数値解は+3.0%以上の過大評価となり、数値解が正解に収束しない結果となった。これにより、従来のXFEMと比較した場合のPU-XFEMの有効性が示された。

図-7(b)に示す応力拡大係数 K_{II} に関する解析結果では、PU-XFEM を実装した本解析コードによる数値解は、本検証の範囲内で解析解との誤差は±0.5%以内の精度であり、著者らの前報¹¹⁾で用いた解析コードの数値解と同様の傾向を示した。また、従来のXFEMを用いた場合、数値解は常に過大評価となり、特に h/a が十分に小さい場合で数値解は+4.0%以上の誤差を有する結果となった。

さらに、図-7(c)に示す疲労き裂の伝播速度に関する解析結果では、応力拡大係数 K_I に関する解析結果と同様の傾向が示された。具体的には、PU-XFEM を実装した本解析コードによる数値解は、解析解との誤差が-5.5%~+1.5%となり、著者らの前報¹¹⁾で用いた解析コードによる数値解と同様の傾向を示した。また、解析解との誤差が-14.3%~+8.3%となり解析精度が h/a に大きく依存する従来のXFEMと比べ、PU-XFEMを用いた場合では、解析精度の安定性に大きな利点があることが示された。

以上の破壊力学パラメータの解析精度に関する評価よ

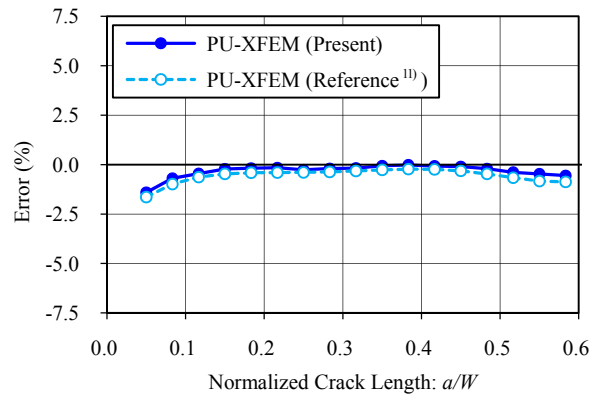


図-9 き裂進展に伴う応力拡大係数 K_I の解析精度 (Model-2)

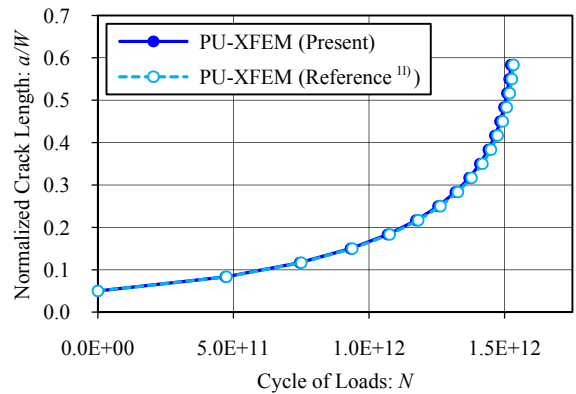


図-10 载荷回数とき裂長さの関係 (Model-2)

り、PU-XFEM 近似を実装した解析コードの有効性が確認をされた。

なお、最近ABAQUSに実装されたXFEMは本章の検証で用いた従来のXFEMと同様の定式化に基づくものと考えられる。しかし、本章の解析結果がABAQUSに実装されたXFEMの解析精度を厳密に保証するものではないことに注意されたい。

4.2 疲労き裂進展過程の解析精度

ここでは、図-8に示すき裂のある帯板の3点曲げモデル (Model-2) を対象として、疲労き裂の進展過程における破壊力学パラメータおよびそれに基づく疲労き裂伝播速度の数値解に関する解析精度の検証を行う。

疲労き裂伝播速度の評価においては、前節と同様、モデルに負荷する荷重 P を ΔP に置き換えたものとし、応力拡大係数範囲の下限界 ΔK_{th} を十分に小さいものとして考慮しない。

応力拡大係数 K_I の解析解を次式に示す²⁶⁾。

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a} F(a/W) \quad (14)$$

$$F(\xi) = 1.090 - 1.735\xi + 8.20\xi^2 - 14.18\xi^3 + 14.57\xi^4$$

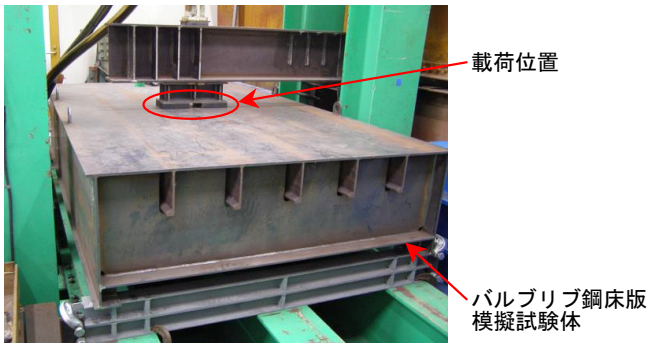


図-11 バルブリップ鋼床版の実スケール模擬試験体

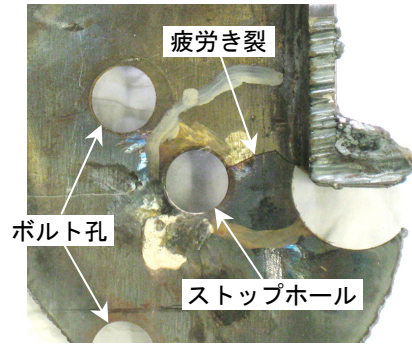
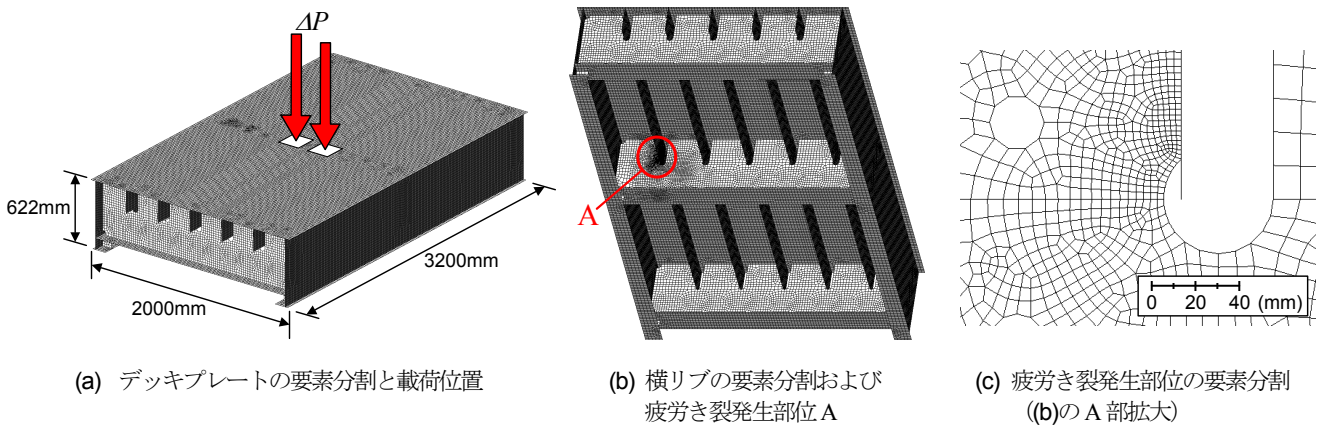


図-12 疲労試験によるき裂進展経路



(a) デッキプレートの要素分割と载荷位置

(b) 横リップの要素分割および疲労き裂発生部位A

(c) 疲労き裂発生部位の要素分割 (b)のA部拡大

図-13 バルブリップ鋼床版模擬試験体の有限要素解析モデル

ここで、 $\xi = a/W$ 、 $\sigma_0 = 3SP/2W^2$ であり、この解析解は $a/W \leq 0.6$ に対し正解からの誤差0.2%以下とされる。

解析モデルは節点数 3720、要素数 3570 とし、初期き裂長さは $a_0 = 0.05W$ とした。また、節点集合 C の定義半径 R_C および M 積分評価領域の定義半径 R_F は、4.1 節と同様式(9)の定義に従うものとする。

以上の条件に基づく、き裂進展に伴う応力拡大係数 K_I の解析精度を図-9 に、载荷回数とき裂長さの関係を図-10 に示す。

これらの解析結果より、本研究で開発した解析コードおよび著者らの前報¹¹⁾で用いた解析コードに関して、それぞれの数値解は非常に良い一致を示した。

また、図-9 に示す応力拡大係数 K_I に関して、 $a/W \leq 0.6$ の範囲における解析解と本研究で開発した解析コードの数値解の比較より、進展序盤の $a/W = 0.05$ の場合で誤差 1.6% となり、 $a/W \geq 0.1$ の広い範囲で誤差 0.9% 以下となった。

以上の評価より、本研究で開発した解析コードのき裂進展過程における解析精度が明らかとなった。また、著者らの前報¹¹⁾で用いた解析コードによる数値解との比較により、本研究における PU-XFEM 近似の実装方法を含め、開発した解析コードの有効性が確認された。

5. 疲労き裂進展シミュレーションの適用例²⁷⁾

近年、鋼床版橋梁のバルブリップと横リップの交差部で多数の疲労き裂の発生が報告されている。それらのき裂のうち、特に横リップのスリット下部の溶接部下端から横リップ内部へと進展するものが全損傷数の大部分を占めている(図-1参照)²⁸⁾。しかし、この種の疲労き裂の進展挙動の推定は一般に容易ではない。

そこで本章では、開発した解析コードの適用例として、図-11 に示すバルブリップ鋼床版の実スケール模擬試験体を用いた疲労試験²⁸⁾を対象に疲労き裂の進展シミュレーションを行い実験結果との比較結果を示す。

試験体は横リップ3本およびバルブリップ5本を配置しており、中央の横リップと左端のバルブリップの交差部(図-13(b)および(c)参照)において図-12 に示す進展経路の疲労き裂が確認された。疲労試験における最終的なき裂長さは $a = 33.05\text{mm}$ であった。なお、図-12 の写真は疲労き裂の発生部位近傍を試験後に切り出したものであり、ストップホールは疲労試験後に施されたものである。また、ストップホールの近傍の孔は、疲労試験においてストップホール施工後に当て板補強を実施するためのボルト穴である。

解析モデルは、Young 率 200GPa、Poisson 比 0.3 の線形

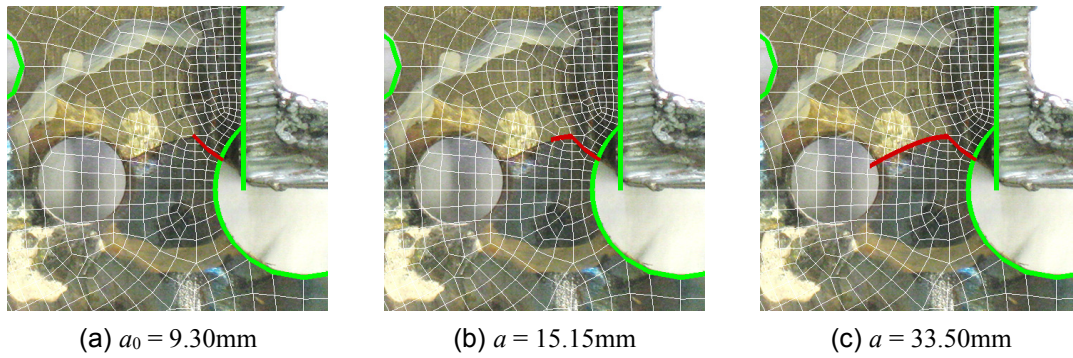


図-14 疲労試験ととき裂進展経路の比較

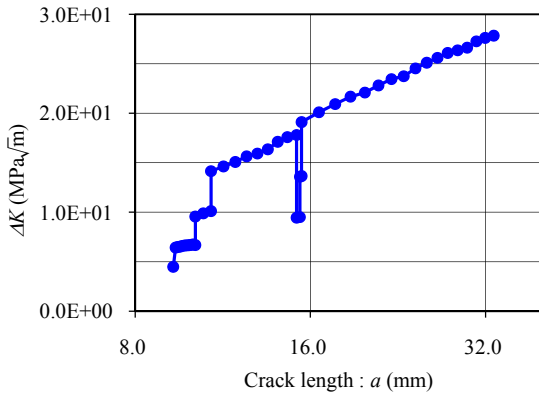


図-15 等価応力拡大係数範囲 ΔK の推移

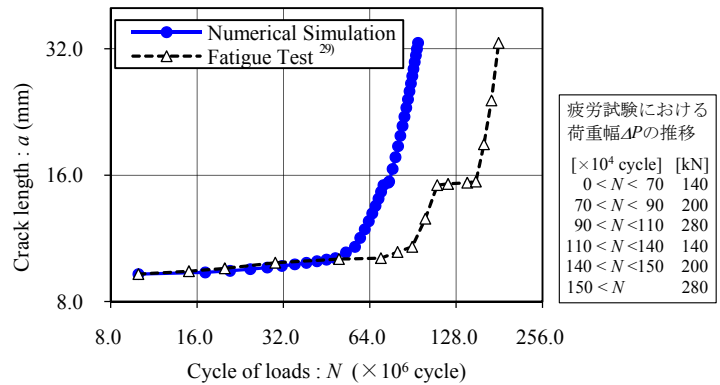


図-16 载荷回数とき裂長さの関係
(疲労試験における荷重幅の推移を併記)

弾性体としてモデル化する。ABAQUS CAEにより作成した解析モデルを図-13に示す。基本の要素サイズは $h = 20\text{mm}$ 程度とした。ただし、疲労試験にてき裂の発生が確認された中央の横リブと左端のバルブリブの交差部近傍(図-13(b)のA部)においては、図-13(c)に示すように、疲労試験で確認された最終的なき裂全長の10分の1である $h = 3\text{mm}$ 程度を要素サイズの最小値に設定し要素分割を行った。なお、以上のようなき裂形状を要素の境界と独立にモデル化可能であるXFEMの特徴を生かしたき裂近傍における要素分割は、通常FEMのき裂解析で用いられるき裂近傍の微細な要素分割と大きく異なる点に注意されたい。

また、本試験の载荷位置を図-13(a)に併記する。疲労試験では、最終的な载荷回数である 1.80×10^6 cycleに至るまで、き裂の進展に伴い荷重を変化させているが(図-16参照)、解析によるシミュレーションでは荷重を疲労試験で得られたき裂長さに対応させるものとする。

シミュレーションの実行前に定義が必要なき裂形状データCRACK.inpの初期値としては、疲労試験序盤の载荷回数 $N = 1.0 \times 10^5$ cycleで確認されたき裂長さ $a_0 = 9.30\text{mm}$ を仮定した(図-14(a)参照)。

以上の条件のもと、バルブリブ鋼床版模擬試験体に対する疲労き裂進展シミュレーションを実施した。

疲労き裂の進展経路に関する解析および疲労試験の結果を比較するため、それぞれの進展経路を重ね合わせて図-14に示す。これにより、バルブリブ鋼床版の実スケール模擬試験体という複雑な3次元構造体において、局所的な領域に発生した疲労き裂を対象としているにも関わらず、解析コードを用いた疲労き裂の進展経路に関する解析結果は、疲労試験の実験結果と非常に良い一致を示した。

また、解析による応力拡大係数範囲の推移を図-15に示し、これにより得られた疲労き裂の伝播速度に関する疲労試験との比較結果を図-16に示す。これより、疲労試験を実施した範囲において2倍程度安全側に評価された。ここで、用いたき裂伝播速度式が溶接部の高い残留応力の作用下で求められたものであることを考慮すれば²⁴⁾、この程度の安全側の評価は妥当なものと考えられる。このため、本研究で開発した解析コードは伝播速度の評価に関しても十分な実用性を有していると考えられる。

なお、き裂のない場合と比較して、XFEMによりき裂を解析モデルに導入した場合、解析モデル全体での自由度数は、初期き裂長さ $a_0 = 9.30\text{mm}$ の場合0.07%程度増加した。これに対し、本検証の範囲ではABAQUSによって出力されたCPU時間はき裂の有無による差異が小さく、同一条件におけるCPU時間のばらつきの範囲内に含まれるため、き裂の有無のみによるCPU時間への影響を定量的に評価

することは困難であった。すなわち、本研究で行った XFEM の汎用 FEM ソフトウェアへの実装方法は、過剰な計算時間の増加を生じることはなく、計算時間の観点からもその有効性が示唆された。

6. 結論

本研究では、代表的な汎用 FEM 解析ソフトウェアのひとつである ABAQUS をベースとして、以下のプログラムを追加することにより、シェル要素でモデル化できる実構造物の疲労き裂進展シミュレーションが可能となる解析コードの開発を行った。

- (1) ソフトウェアに PU-XFEM 近似を導入するプログラム
- (2) 応力拡大係数の算出、疲労き裂進展方向・伝播速度の評価およびき裂形状の更新を行うプログラム
- (3) 解析コード全体のフローを制御するプログラム

ここで、特に多重節点を定義することで ABAQUS の規約によって定められた本来の自由度の定義を損なうことなく、XFEM 近似の実装において重要な課題となるき裂近傍の各節点における自由度の増加を可能とした。また、この方法は ABAQUS という個別のソフトウェアにのみ対応したのではなく、他の汎用 FEM 解析ソフトウェアへの応用も可能な一般的な考え方を与えるものである。

PU-XFEM 近似を実装した解析コードに関して、その基本的な解析精度の評価を行うために、応力拡大係数の解析解が既知である基本的なモデルを対象とした破壊力学パラメータの数値解の精度評価を行った。また、その際、著者らの前報¹¹⁾で用いた解析コードによる解析結果との比較も同時に行った。その結果、本研究で示した汎用 FEM 解析ソフトウェアへの PU-XFEM 近似の実装法を含め、解析コードの有効性が確認された。

開発した解析コードの適用例として、着目部位に関して実スケールのバルブブリブ鋼床版模擬試験体の疲労試験を対象とした疲労き裂進展シミュレーションを実施し、疲労試験による実験結果との比較を行った。その結果、複雑な 3次元構造体において、局所的な領域に発生した疲労き裂を対象としているにも関わらず、その進展経路を精度良く再現することができ、伝播速度の評価に関しても十分な実用性を有していることが示された。

以上より、本研究において PU-XFEM を汎用 FEM 解析ソフトウェアへ実装することで開発した解析コードの疲労き裂の進展シミュレーションツールとしての有効性が示された。

謝辞：本研究は、新都市社会技術融合創造研究会でのプロジェクト「鋼橋の疲労亀裂進展シミュレーション手法の開発とその維持管理への応用に関する研究」の一環として行われた。また、阪神高速道路株式会社の崎谷浄氏、関西大学大学院の山岡大輔氏をはじめ関係者各位には、鋼床版模擬試験体の疲労試験に関する資料を提供していただいた。ここに記して感謝の意を表する。

参考文献

- 1) 日本道路協会：鋼道路橋の疲労設計指針, 2002.
- 2) Barsoum, R. S. : On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.10, pp.25-37, 1976.
- 3) Taniguchi, T. : Crack propagation analysis in civil engineering structures. *Computers and Structures*, Vol.41, pp.1293-1303, 1991.
- 4) 市毛滋之, 宇都宮智昭 : 板厚貫通切欠材の疲労亀裂進展解析への有限要素法の適用性について, 土木学会第 61 回年次学術講演会, 第 I 部門, pp.1175-1176, 2006.
- 5) 館石和雄, 谷利晃, 判治剛 : 鋼プレートガーター橋のき裂進展シミュレーション, 鋼構造年次論文報告集, Vol.16, pp.453-458, 2008.
- 6) Belytschko, T. and Black, T. : Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.45, pp.602-620, 1999.
- 7) Chessa, J., Wang, H. and Belytschko, T. : On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.57, pp.1015-1038, 2003.
- 8) 柴沼一樹, 宇都宮智昭 : XFEM における Blending Element のき裂解析への影響評価と解析精度改善の提案, 土木学会論文集 A, Vol.64, No.4, pp. 970-981, 2008.
- 9) Melenk, J. M. and Babuska, I. : The partition of unity finite element method: basic theory and applications, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.39, pp.289-314, 1996.
- 10) 柴沼一樹, 宇都宮智昭 : PUFEM に基づき Blending Elements での問題を回避した XFEM の定式化, 土木学会論文集 A Vol.65, No.1., pp. 228-242, 2009.
- 11) Shibanuma, K. and Utsunomiya, T. : Reformulation of XFEM based on PUFEM for solving problem caused by blending elements, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol.45, No.11, pp.806-816, 2009.
- 12) Hanganu, D. A., Oñate, E. and Barbat, A. H. : A finite element methodology for local/global damage evaluation in civil engineering structures. *Computers and Structures*, Vol.80, pp.1667-1687, 2002.
- 13) 三木千壽, 菅沼久忠, 富澤雅幸, 町田文孝 : 鋼床版箱桁橋のデッキプレート近傍に発生した疲労損傷の原因, 土木学会論文集, No.780/I-70, pp.57-69, 2005.

- 14) Giner, E., Sukumar, N., Tarancón, J. E. and Fuenmayor, F. J. : An Abaqus implementation of the extended finite element method, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.76, 347-368, 2009.
- 15) Dassault Systemes Simulia Corp. : Abaqus Analysis User's Manual Version 6.7.
- 16) Moës, N., Dolbow, J. and Belytschko, T. : A finite element method for crack growth without remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.46, pp.131-150, 1999.
- 17) Fleming, M., Chu, Y. A., Moran, B. and Belytschko, T. : Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.40, pp. 1483-1504, 1997.
- 18) Tecplot, Inc. : Tecplot 360 User's Manual, 2008.
- 19) Yau, J. F., Wang, S. S. and Corten, H. T. : A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.47, pp.335-341, 1980.
- 20) 柴沼一樹, 宇都宮智昭 : 写像による経路独立 M 積分の近似法の提案と X-FEM を用いた屈折または曲線き裂の解析, 土木学会論文集 A, Vol.64, No.2, pp.303-316, 2008.
- 21) 北川英夫, 結城良治, 東郷敬一郎 : K_I と K_{II} の混合モードき裂からの疲労き裂成長挙動, 機械学会論文集 A, Vol.47, No.424, pp.1283-1292, 1981.
- 22) 大路清嗣, 辻昌宏, 久保司郎, 小野嘉雄, 八幡篤, 梅井健司 : 高張力鋼の残留応力場における疲労き裂の伝ば方向および伝ば寿命の予測, 機械学会論文集 A, Vol.59, No.562, pp.1429-1436, 1993.
- 23) 田中啓介, 秋庭義明, 加藤拓也, 高橋弘樹 : 繰返しねじり・引張複合荷重下での予き裂からの疲労き裂進展経路の予測, 機械学会論文集 A, Vol.71, No.704, pp.607-614, 2005.
- 24) 日本鋼構造協会 : 鋼構造物の疲労設計指針・同解説, 技報堂出版
- 25) 山田貴博 : 高性能有限要素法 (計算力学レクチャーシリーズ 9) , 丸善, 2007.
- 26) 岡村弘之 : 線形破壊力学入門 (破壊力学と材料強度講座 1) , 倍風館, 1976.
- 27) 柴沼一樹, 青井弘樹, 宇都宮智昭, 坂野昌弘, 夏秋義広 : XFEM による 3 次元構造体の板厚貫通疲労き裂進展挙動の評価, 鋼構造年次論文報告集, Vol.17, pp.267-274, 2009.
- 28) 田畑晶子, 山村清, 濱田信彦, 迫田治行, 酒井優二, 坂野昌弘 : 鋼床版バルブリップと横リブ交差部の疲労損傷対策に関する実験的検討, 土木学会第 62 回年次学術講演会, 第 1 部門, pp.5-6, 2007.
- 29) 崎谷淨, 杉山裕樹, 田畑晶子, 迫田治行, 坂野昌弘 : バルブリップ鋼床版の疲労損傷対策に関する実働応力計測と疲労試験, 鋼構造年次論文報告集, Vol.17, pp.337-344, 2009.

(2010 年 3 月 9 日 受付)