MPS 法による地震応答解析の安定限界となる時間刻みに関する検討

Study on stability limit time increment of earthquake response analysis by MPS

吉田郁政*，大庭啓輔**，中瀬仁***
Ikumasa Yoshida, Keisuke Ohba and Hitoshi Nakase

*博（工），東京都市大学教授，　工学部都市工学科（〒158-8557　東京都世田谷区玉堤 1-28-1）
**東京都市大学大学院学生，　工学部都市工学科（〒158-8557　東京都世田谷区玉堤 1-28-1）
***東電設計㈱　土木本部耐震技術部（〒110-0015 東京都台東区東上野 3-3-3）

MPS (Moving Particle Semi-implicit) method is one of prospective tools for earthquake response analysis when deformation of structure or ground is significantly large. Since large computation cost is one of the problem of the method, it is very important to determine the proper time increment, which controls the stability and efficiency of the calculation. Three kinds of algorithm for the time integration are compared with respect to time increments of stability limit. These are the Euler, Leap Frog and Verlet methods. It is shown that the efficiency of Verlet method is almost the same as with Leap Frog and better than Euler. Stability limit time increments are also examined for models with various particle radius, stiffness and damping ratio using binary search method. A regression equation is proposed to predict stability limit time increment as to particle radius, stiffness and damping ratio of the model.

Key Words: particle based method, MPS, stability limit, time increment, time integration, earthquake response analysis
キーワード:粒子法，MPS，安定限界，時間刻み，時間積分，地震応答解析

1. はじめに

現在，様々な検討，設計において有限要素法が用いられることが多い．有限要素法は大変優れた方法であり，非常に多くの実績があるが大変形挙動や破壊の解析には困難が伴う．また，対象とする空間の要素分割が必要であり複雑な形状になるとモデル作成に非常に大きな労力が必要となる．一方，各種構造物における安全性評価や耐震設計において性能設計が求められる方向にあり[1-3]，大変形や破壊挙動を予測できる手法に対するニーズが高まっている．そのため最近では大変形解析が可能で，要素分割を必要としない粒子法への期待も高まっている．粒子法には，DEM（Discrete Element Method)[4),5)]，SPH 法 (Smoothed Particle Hydrodynamics)[6),7)]，MPS 法 (Moving Particle Semi-implicit)[8),9)]などがある．DEM は大変形，不連続，再接触を扱うことのできる方法として大変有望な方法であるが，ばね値や粘性係数などの入力データと波動伝播速度やポアソン比など連続体の特性との関係が明確ではなく経験的に決めているという問題がある．これは現状の粒子間ばねだけでは連続体の挙動を再現できないためである[10)]．一方，MPS 法や SPH 法は DEM と同様に粒子に基づく方法であるものの，FEM と同様に支配方程式を数学的な手続きにより離散化する方法である．このため波動方程式を対象とする場合，波動伝播速度やポアソン比そのものを入力データとすることができ，細かく離散化することにより真値に収束する解が得られる．ただし，不連続面を伴う大変形問題を考えると再接触の扱いが重要となり，DEM 的な扱いをすることが必要と考えられる．弾性体を対象とした MPS 法は定式化が DEM に近く，波動方程式に基づきながらも DEM で培われた経験を活かすことができる．

本研究では斜面の地震時応答解析に MPS 法を用いることを最終的な目標としている．MPS 法を用いた土石流的な挙動に対する検討例[11)]，弾性波動に関する基本的検討[12)]やキャスクを対象とした検討[13)]は報告されているものの地震時の斜面応答解析を対象とした検討はまだ十分ではない．著者らは地盤や構造物の地震応答解析を目標として粘性境界やレイリー減衰を MPS 法に導入するための定式化を提案するとともに，いくつかのモデルに対する数値計算を行い提案法の検証，さらに 2 次元有限要素法との比較，検証を行い，その有効性を示した[14)]．

粒子法である MPS 法や DEM の欠点としては計算労力が大きいことが挙げられる．時間積分のための時間刻みは大変重要なパラメタであり，時間刻みを小さくすると

安定性は高まるが，計算時間は長くなるというトレードオフの関係にある．全体の計算時間は時間刻みに比例するため適切な時間刻みで計算することが効率的な計算には重要である．そこで，本論文では弾性波動伝播問題を対象として安定限界の時間刻み（以下，限界時間刻みと記す場合がある）について検討を行い，予測式の提案を行う．なお，弾性波動伝播解析のための MPS 法の定式化の概要については付録に示すが詳細については文献8)9)14)等を参照されたい．

2. 時間積分のためのアルゴリズム

流体を対象とした MPS 法では圧力項についてのみ陰解法で解く半陰解法(Semi-implicit)が採用されており，MPS 法の S に反映されている．しかし，弾性体についてはDEM や差分と同様に陽解法で解いていることから[8)]，最近ではMPS 法はMoving Particle Simulation の略とする場合もある．

式(1)に示す運動方程式を対象にして 3 種類の陽解法，Euler 法，Leapfrog 法，Verlet 法による解き方を示す．どの方法でも計算時間にはほとんど差はないので，それぞれの方法によって必要となる時間刻みによって全体の計算時間が決まる．

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{r}}_k+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}_k,\dot{\boldsymbol{r}}_k)=\boldsymbol{f}_k \tag{1}$$

ここで，$\boldsymbol{M}$ は各粒子の質量に関する対角行列，$\boldsymbol{g}$ は k ステップにおける復元力を表す関数ベクトル，$\boldsymbol{r}_k$ は位置ベクトル，$\dot{\boldsymbol{r}}_k$ は速度ベクトルである．下添え字記号の意味は $\boldsymbol{r}_{k+1}=\boldsymbol{r}(t_k+\Delta t)$，$\boldsymbol{r}_k=\boldsymbol{r}(t_k)$ ，$\boldsymbol{r}_{k-1/2}=\boldsymbol{r}(t_k-\Delta t/2)$ $\boldsymbol{r}_{k-1}=\boldsymbol{r}(t_k-\Delta t)$ とする． Δt は時間刻みを表す．Euler法では式(1)を以下のように解く．更新は以下の式の順番に行うこととする．

$$\boldsymbol{r}_k=\boldsymbol{r}_k+\dot{\boldsymbol{r}}_{k-1}\Delta t \tag{2}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_k=\dot{\boldsymbol{r}}_{k-1}+\boldsymbol{M}^{-1}\left(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}_{k-1},\dot{\boldsymbol{r}}_{k-1})-\boldsymbol{f}_{k-1}\right)\Delta t \tag{3}$$

Leapfrog 法では先に $t-\Delta t/2$ における速度 $\dot{\boldsymbol{r}}_{k-1/2}$ を求め，次にその速度を基にして時刻 t おける座標 $\boldsymbol{r}_k$ を以下のように求める．

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{k-1/2}=\dot{\boldsymbol{r}}_{k-3/2}+\boldsymbol{M}^{-1}\left(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}_{k-1},\dot{\boldsymbol{r}}_{k-1})-\boldsymbol{f}_{k-1}\right)\Delta t \tag{4}$$

$$\boldsymbol{r}_k=\boldsymbol{r}_{k-1}+\dot{\boldsymbol{r}}_{k-1/2}\Delta t \tag{5}$$

次に Verlet 法[9)]による解法を示す．まず，加速度に関して次の差分近似をする．

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_k=\frac{\boldsymbol{r}_{k+1}-2\boldsymbol{r}_k+\boldsymbol{r}_{k-1}}{\Delta t^2} \tag{6}$$

これを式(1)に代入する．

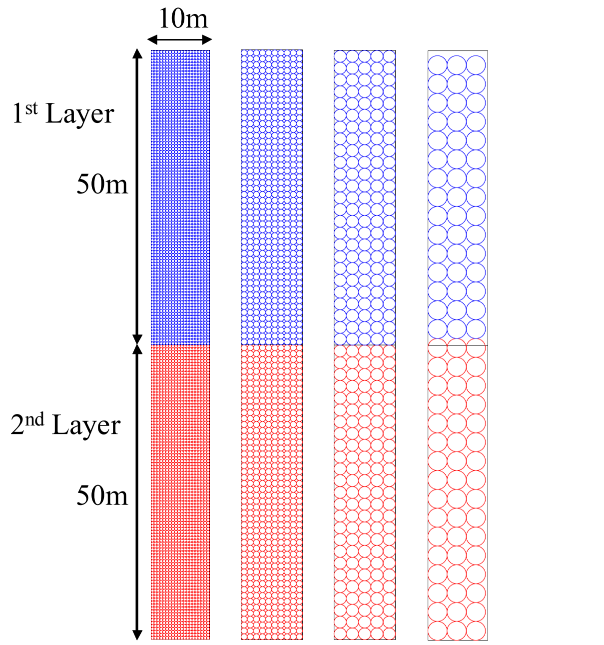


図-1 1次元波動伝播のためのモデル

$$\boldsymbol{M}\frac{\boldsymbol{r}_{k+1}-2\boldsymbol{r}_k+\boldsymbol{r}_{k-1}}{\Delta t^2}+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}_k,\dot{\boldsymbol{r}}_k)=\boldsymbol{f}_k \tag{7}$$

これを整理すると以下の式を得ることができる．

$$\boldsymbol{r}_{k+1}=\left(2\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{r}_{k-1}\right)+\Delta t^2\boldsymbol{M}^{-1}\left(\boldsymbol{f}_k-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}_k,\dot{\boldsymbol{r}}_k)\right) \tag{8}$$

粒子法では質量行列 $\boldsymbol{M}$ は対角行列となるので右辺第 2 項も単に各自由度の質量の逆数を乗じるだけになるので極めて簡単に計算することができる．

3. 限界時間刻み算定のための条件と方法

3.1 物性値と解析モデル

図-1 に検討に用いるモデルを示す. 粒子半径に関しては図に示した 4 種類, 0.25, 0.5, 1.0, 1.6m を設定した. 図では第 1 層，第 2 層に分かれているが基本的には同じ物性値を与え均質モデルとした．影響半径は粒子半径の 1.5 倍，その他の物性値，せん断波速度，減衰比については後述する様にパラメタスタディーの対象とする．単位体積重量については均質においてモデルの剛性を弾性波速度によって規定する場合，安定限界となる時間刻みに影響を与えないことから一定とし, 14.7 kN/m³ とした. 第 1 層，第 2 層で単位体積重量を変えた場合についても検討を行ったが，後述するように影響はほとんど見られなかった．

下端より変位規定条件（E+F 入力条件）でリッカーウェーブレット波を入力して波動伝播の計算を行った．リ

ッカーウェーブレット波は次式で与えられるパルス波であり，その中心振動数 f_c は4.0Hz，ピークの生起時間 t_p は0.25 秒とした.

$$e(t)=\left\{2\pi^2 f_c^2\left(t-t_p\right)^2-1\right\}\exp\left\{-\pi^2 f_c^2\left(t-t_p\right)^2\right\} \tag{9}$$

加振方向を水平方向，すなわち，せん断波動伝播の問題とする場合は境界にある粒子を水平ローラー条件（鉛直自由度固定），加振方向を鉛直方向，すなわち，疎密波の伝播では鉛直ローラー条件（水平自由度固定）とした.

3.2 回転成分除去の方法の影響

MPS 法では各粒子が回転自由度をもっており，その計算過程において変形量から回転成分の除去を行う．この除去の方法も限界時間刻みに影響を与える．回転成分除去のための 2 種類の式を以下に示す．各粒子について初期の位置ベクトル $\boldsymbol{r}^0$ と現在の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を用いて粒子 i から j への初期ベクトルと現在のベクトルを定義する.

$$\boldsymbol{r}_{ij}^0=\boldsymbol{r}_i^0-\boldsymbol{r}_j^0, \qquad \boldsymbol{r}_{ij}=\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j \tag{10}$$

粒子 i，j の回転 θ_i，θ_j より剛体変位を取り除いた変形ベクトル $\boldsymbol{u}_{ij}$ を求める．文献 8)では以下の式を用いている.

$$\boldsymbol{u}_{ij}=\boldsymbol{r}_{ij}-\boldsymbol{R}_{ij}\boldsymbol{r}_{ij}^0 \tag{11}$$

ここで，$\boldsymbol{R}_{ij}=\begin{bmatrix}\cos\theta_{ij} & -\sin\theta_{ij}\\ \sin\theta_{ij} & \cos\theta_{ij}\end{bmatrix}$，$\theta_{ij}=\dfrac{\theta_i+\theta_j}{2}$

これに対して文献 9)では,

$$\boldsymbol{u}_{ij}=\boldsymbol{r}_{ij}-\frac{1}{2}(\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{r}_{ij}^0+\boldsymbol{R}_j\boldsymbol{r}_{ij}^0) \tag{12}$$

ここで,

$$\boldsymbol{R}_i=\begin{bmatrix}\cos\theta_i & -\sin\theta_i\\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\end{bmatrix},\boldsymbol{R}_j=\begin{bmatrix}\cos\theta_j & -\sin\theta_j\\ \sin\theta_j & \cos\theta_j\end{bmatrix}$$

として変形ベクトル $\boldsymbol{u}_{ij}$ を算定する.

図-1 に示した半径 0.5m, 1000 粒子のモデルについて，せん断波速度 100 m/s，疎密波速度 200 m/s（ポアソン比 0.333 に相当），時間刻みを 1.0×10^{-4} 秒として計算を行った場合の加速度応答波形を図-2 に示す．加振方向は水平方向，せん断波の伝播とし，時間積分には Verlet 法を用いる．波形がモデル下端 GL.-100m から地表面へ到達するのに要する時間は約 1 秒であり伝播速度の 100m/s とほぼ整合している．波形の乱れもほとんど見られず形を保持しながら伝播しており良好な結果となっている.

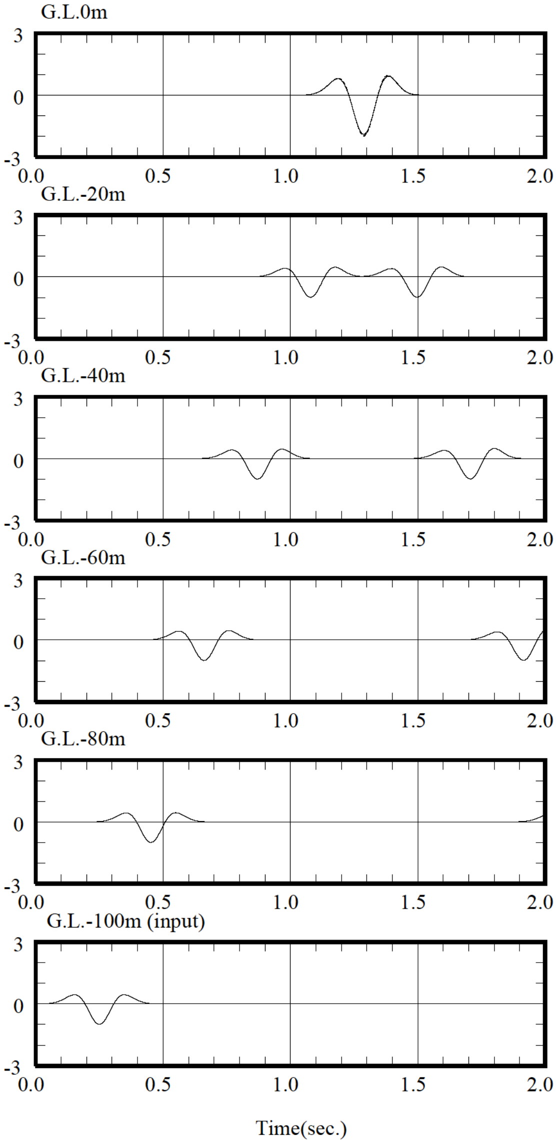


図-2 1次元波動伝播の様子

時間刻み10^{-4}秒，せん断波速度100m/s，減衰比0.0，半径0.5m

回転成分除去の方法として式(12)を用いた場合，時間刻みを徐々に大きくしていくと 4.1×10^{-3} 秒までは同じ結果が得られるが，4.2×10^{-3} 秒にすると最初の 0.3 秒程度で応答が非常に大きくなり計算不能，すなわち発散の状況となる．一方，式(11)を用いると 2.9×10^{-3} 秒までは同様の結果が得られるが，それよりも大きくすると発散の状況となる．すなわち，式(12)の方が 30%程度大きな時間刻みで計算できることを示している．以下の検討では式(12)を用いることとする.

3.3 二分法による限界時間刻みの算定

前節のように試行錯誤的に安定限界となる時間刻みを探索することも可能であるが，せん断波速度や減衰比などを変化させた多くのケースに対して限界時間刻み算定を行うため，二分法を用いることとした．概略アルゴリ

ズムは以下の通りである．

1) 限界時間刻みの上限，下限の初期値を決める．
2) 上下限の相乗平均の時間刻みを用いて計算する．
3) 安定であればそれを新たな下限，不安定であれば上限とする
4) 上下限の比がある一定値 a 以下になれば終了，そうでなければ 2)へ

以下の計算では精度 a は 1.2 とした．また，不安定（発散）の定義として任意の点での応答加速度が 1.0×10^{15}m/s² を超える場合とした．この定義値を 1.0×10^{3}, 1.0×10^{5} m/s² として，せん断波速度 100m/s，粒子半径 1.6m，減衰比 0.001 あるいは 0.1 としたケースで限界時間刻みを算定したところ，全く同じ値が得られた．表面の最大応答加速度の理論値は 2.0m/s² であるため，さらに厳しいケースとして不安定の定義を振幅が 10%だけ大きな 2.2 m/s² を超えた場合とし，精度 a を 1.01 として安定限界の時間刻みを算定したところ，1.0×10^{15}m/s² を超えた場合と定義した時と有効数字の 3 桁目が異なる程度でほとんど同じ数値が得られた．すなわち，限界時間刻みの算定結果は発散の定義値にはほとんど依存しないことがわかる．時間刻みの大きさに対して徐々に応答が大きくなるのではなく，ある一定値以下では正常な計算が行われ，ある一定値を超えると非常に急激に応答が大きくなることを示している．

4．時間積分アルゴリズムの比較

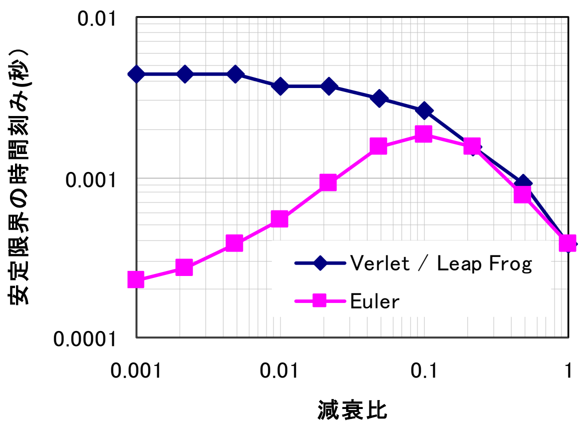
せん断波の伝播を対象として，半径を0.5mあるいは1.6m，せん断波速度を100 m/sとしたモデルについて，減衰比を表-1に示した0.001から1.0まで10種類設定して限界時間刻みの算定を行った．単位体積重量等その他の条件はこれまでと同様とする．時間積分のアルゴリズムは2章で述べた3種類のアルゴリズム，Euler法，Leapfrog法，Verlet法によってそれぞれ計算した．その結果得られた減衰比と限界時間刻みの関係を図-3に示す．Leapfrog法とVerlet法では同じ限界時間刻みの値が得られたため，以下，Verlet法とEuler法の比較として述べる．Euler法では半径0.5mのケースでは減衰比0.1付近，半径1.6mのケースでは減衰比0.4付近で限界時間刻みが極大となっている．つまり，ある程度減衰比を大きくした方が安定するが，大きくしすぎるとまた不安定になることを示している．それに対してVerlet法では減衰比が小さい領域では限界時間刻みが一定であり，ある値以上の減衰比になると徐々に限界時間刻みも小さくなっていることがわかる．すなわち，Verlet法では減衰比は小さい方が数値安定上有利であることを示している．

Verlet法は減衰比が小さな領域ではEuler法に比べて10倍程度の時間刻みでも計算できるが，減衰比が大きな領域ではその差は徐々に小さくなり減衰比1.0では同じ限界時間刻みとなっている．両者は同じ時間刻みでは計算時間がほとんど変わらないため，トータルの計算時間は単純に時間刻みの逆数に比例する．つまり減衰比が0付近であればVerlet法はEuler法に比較して1/10程度の時間で計算できることを示している．

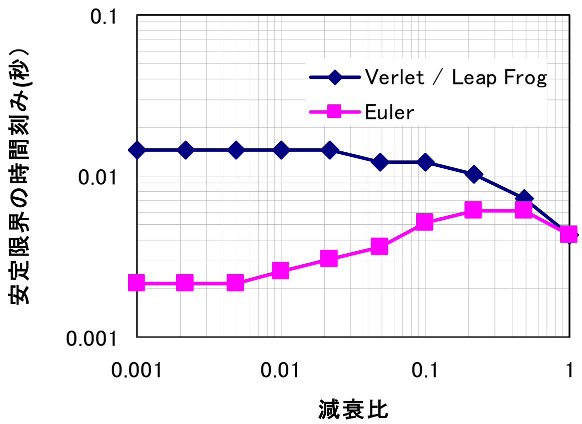
表-1　パラメタスタディーのための各条件

弾性波速度（m/s）	100,200,400,800
減衰比　h	0.001, 0.0022, 0.0048, 0.01, 0.022, 0.048, 0.1, 0.22, 0.48, 1.0
粒子半径　R　（m）	0.25, 0.5, 1.0, 1.6
合計	4×10×4=160ケース

参考：ポアソン比　0.33



(1) 粒子半径　0.5m



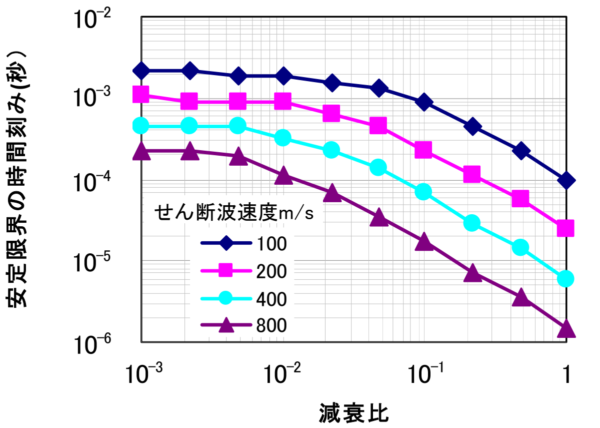
(2)　粒子半径　1.6m

図-3　積分アルゴリズムの比較
せん断波速度100m/sの場合

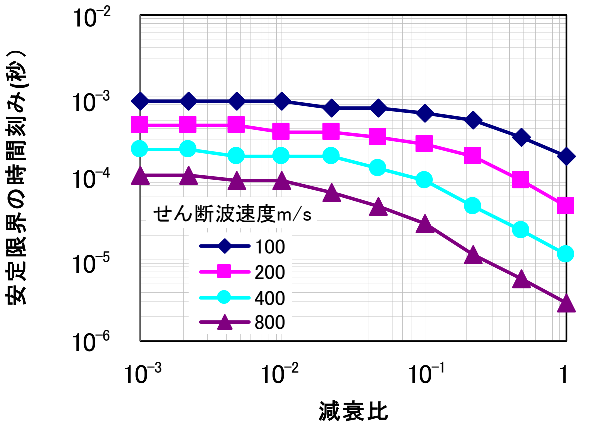
次に粒子半径を 0.5m と 1.6m としたケースを比較すると，全体的傾向は変わらないものの，Euler 法において限界時間刻みが極大となる，あるいは Verlet 法において限界時間刻みが小さくなり始める減衰比が大きくなっている．また，半径 0.5m の場合に比較して 1.6m のケースでは全体的に限界時間刻みが一桁弱大きいこともわかる．

5．160 ケースに対する限界時間刻みの算定

時間積分のためのアルゴリズムとしては Verlet 法を用い，弾性波速度や粒子半径，減衰比を変化させた場合

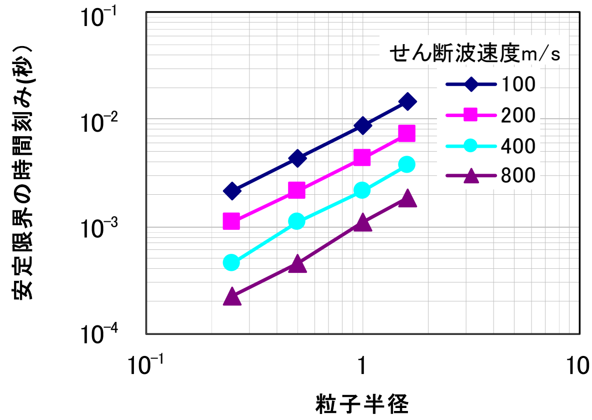


(1)　半径　0.25m

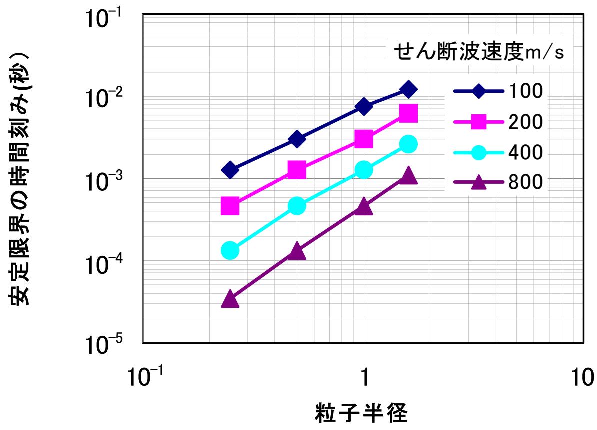


(2)　半径　1.0m

図-4　せん断波速度別の減衰比と限界時間刻みの関係



(1)　減衰比　0.001



(2)　減衰比　0.048

図-5　せん断波速度別の粒子半径と限界時間刻みの関係

の安定限界時間刻みについて検討を行う．変化させたパラメタをまとめて表-1 に示す．これらパラメタについての全ての組み合わせ 160 ケースについて安定限界となる時間刻みを二分法により算定した．

限界時間刻みと減衰比の関係についてせん断波速度別に図-4 に示す．粒子半径は 0.25，1.0m の 2 ケースだけを示した．せん断波速度が大きい方が小さな限界時間刻みを必要としているが，曲線の形はほぼ同じになっている．また，減衰比が大きい方がせん断波速度による差が大きくなっている．半径が変わってもこうした傾向は変わらないが，半径が大きい方が限界時間刻みが全体的に大きくなっている．図-5 に粒子半径と限界時間刻みの関係を示す．減衰比は 0.001 と 0.048 の場合について示した．対数軸の図においては粒子半径に対してほぼ直線的に限界時間刻みが並んでいることがわかる．また，減衰比が 0.001 の場合はせん断波ごとの図がほぼ平行であるのに対して，減衰比が 0.048 の場合にはせん断波が大きい方がその傾きが大きくなっている．

次に横軸について粒子半径をせん断波速度で除した値として，限界時間刻みとの関係を図-6 に示す．減衰比は 0.001，0.048，1.0 のケースについて示した．粒子半径はせん断波速度によって基準化できほぼ右上がりの直線になっていることがわかる．減衰比が大きい程，その傾きも大きくなっている．また，（粒子半径／弾性波速度）が大きい場合は減衰比による差は小さいこともわかる．

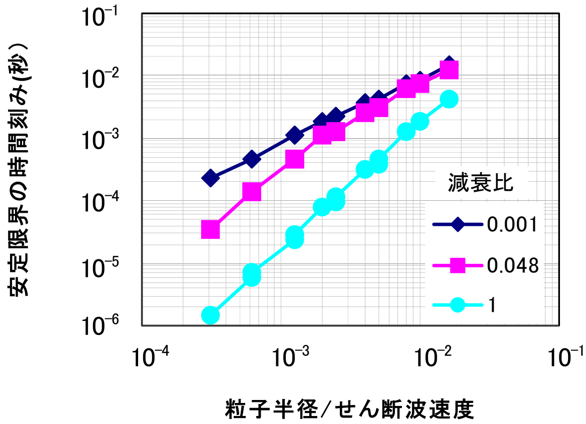


図-6　減衰比別の(粒子半径/せん断波速度)と限界時間刻みの関係

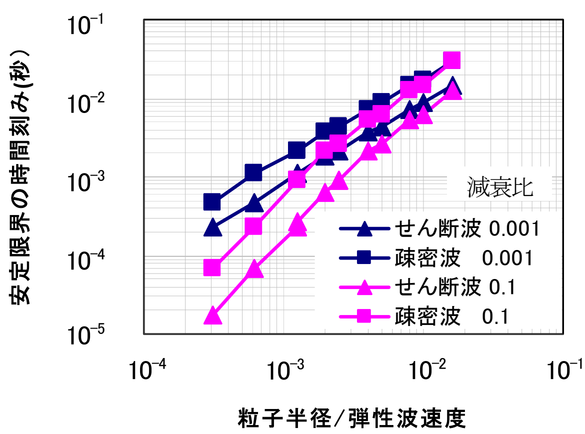


図-7 せん断波と疎密波の限界時間刻みの比較

以上の検討では均質モデルを用いたが，波動の透過，反射が起こる場合を想定し，単位体積重量を第１層と第2 層で変えた場合も計算を行った．しかし，その影響は大変小さく，非現実的ではあるが単位体積重量について10 倍の差を与えた場合でもその影響は小さかった．また，ポアソン比を第１層と第２層で変化させたケースについても検討を行ったが，影響はほとんど見られなかった．

疎密波に対しても同様に表-1 に示した 160 ケースに対して限界時間刻みの算定を行った．計算方法やモデル条件はせん断波の場合と同様である．図-7 に減衰比 0.001, 0.1 の場合についてせん断波と疎密波に対する限界時間刻みの比較を示す．同じ減衰比の場合はせん断波，疎密波で同じような曲線の形となっており全体的な傾向は類似していることがわかる．ただし，同じ弾性波速度に対しては疎密波の方が常に限界時間刻みが大きい，すなわち安定的である．

６．限界時間刻みの推定式

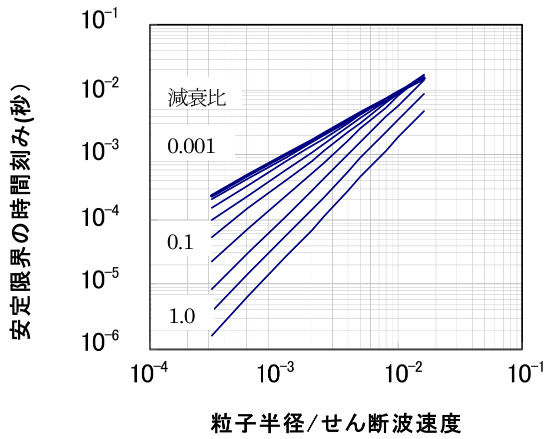
MPS 法を用いた弾性波動解析で必要となる限界時間刻みについて宋ら[12)]は以下の式を用いて議論している．

$$dt < \frac{l_0}{V} C \tag{13}$$

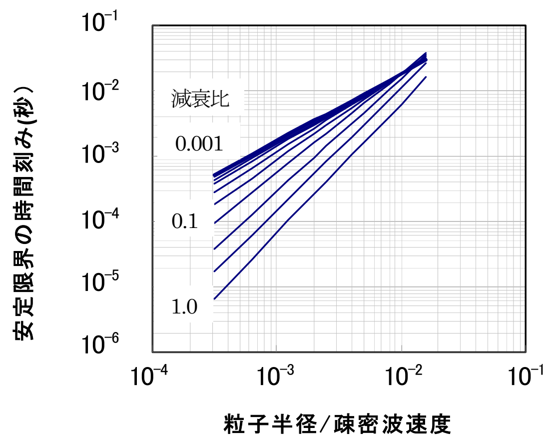
ここで，dt は時間刻み，l_0 は隣接粒子間距離，V は弾性波動速度，C は係数（Courant 数）である．宋らの検討では疎密波を対象として数ケースの事例を示し，式(13)で限界時間刻みが予測できることを述べている．しかし，せん断波の検討や減衰比を考慮した検討は行っていない．そこで，本研究では前述の 160 ケースの限界時間刻みを基に弾性波速度や粒子半径，減衰比を用いた回帰式を作成した．回帰式の形としては図-6 の特徴を勘案し式(13)を拡張した次式を用いた．

$$dt = a_1 \left(\frac{R}{V} \right)^{a_2} \tag{14}$$

ここで，R は粒子半径，a_1，a_2 は回帰係数である．まず，



(1) せん断波

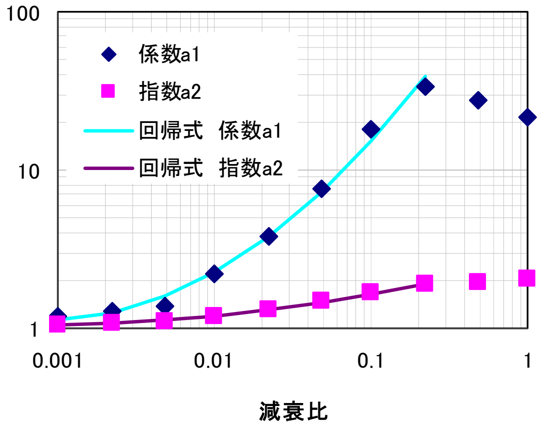


(2) 疎密波

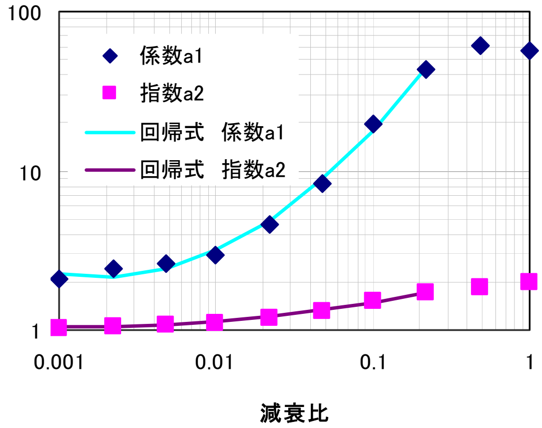
図-8 弾性波に関する減衰比別の限界時間刻み回帰式

減衰比別に係数 a_1，a_2 を最小二乗法により算定した．なお，dt 及び R/V の対数に対して計算したので線形最小二乗法の問題となる．求めた回帰直線を図-8 に示す．せん断波，疎密波別に回帰直線を示したが，全体的に疎密波の方が大きいものの，図の上から減衰比が小さい順に並んでいる，減衰比が大きい方が勾配も大きいなど，傾向はほとんど同じである．減衰比ごとに得られた係数 a_1，a_2 を図-9 に示す．指数部分である係数 a_2 はせん断波，疎密波でよく似た曲線となっているが，係数 a_1 は疎密波の方が大きい．両者とも係数 a_2 は減衰比が小さい領域ではほぼ 1.0 となり，式(13)と同じ形となっている．減衰比が大きくなるにつれて係数 a_2 も大きくなり 2.0 に漸近している様子がわかる．係数 a_1 も減衰比に応じて大きくなっており，減衰比は小さい方が計算時間上有利であることがわかる．

宋らの検討[12)]では減衰なしの疎密波の場合について検討しており，式(13)の係数 C（Courant 数）を 0.145 としている．本検討では減衰比が小さい場合には a_2 はほぼ 1.0 となること，式(13)では隣接間距離であることに対して式(14)では粒子半径としていることに注意すると，減衰比が小さい場合の係数 a_1 が宋らの係数 C の２倍に相



(1) せん断波



(2) 疎密波

図-9 弾性波に関する回帰係数と減衰比の関係

当する．減衰比が小さい場合の a_1 の値は図-9 よりわかるように約 2 強であり，宋らの結果と比較して約一桁大きくなっている．宋らは時間積分に Euler 法を用いており，図-3 の関係より Verlet 法とは約一桁異なることを考慮するとほぼ整合した結果となっている．

次に係数 a_1，a_2 について減衰比に対する回帰式を作成した．通常の問題では減衰比 0.2 以上を用いることは非常にまれであるため，0.22 以下の範囲のデータを用いて算定した．回帰式の形は対象範囲の図の形から減衰比の対数に対する 2 次式とした．係数 a_1，a_2 に対して以下の同じ形の式でそれぞれ回帰式を求めた．

$$a_1 = 10^{\left\{b_{11}(\log(h))^2 + b_{12}\log(h) + b_{13}\right\}} \tag{15}$$

$$a_2 = 10^{\left\{b_{21}(\log(h))^2 + b_{22}\log(h) + b_{23}\right\}} \tag{16}$$

せん断波，疎密波に対して得られた回帰式の係数をまとめて表-2 に示す．表には多めの桁数の数値を示しているが，有効数字 3 桁程度の数値でもほぼ同様の結果が得られることを確認している．図-9 には回帰式による線も示してある．ほぼ良好な回帰となっている．式(14)から

表-2 せん断波および疎密波に関する回帰式の係数

せん断波		疎密波	
b_{11}	0.264375	b_{11}	0.304301
b_{12}	1.621563	b_{12}	1.666102
b_{13}	2.540176	b_{13}	2.614558
b_{21}	0.04089	b_{21}	0.046261
b_{22}	0.262491	b_{22}	0.263985
b_{23}	0.438239	b_{23}	0.392512

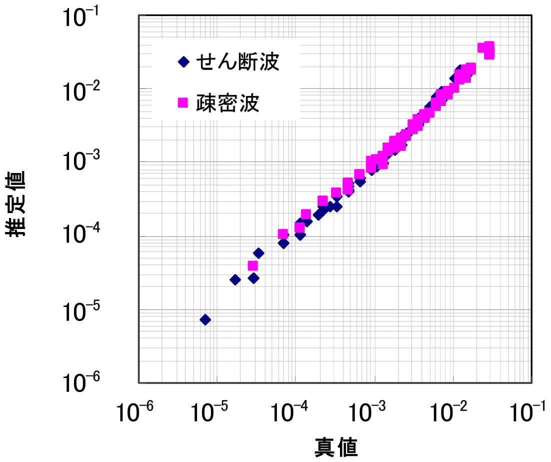


図-10 せん断波および疎密波に関する安定限界となる時間刻みの推定精度

(16)を用いることでモデルの弾性波速度，粒子半径，減衰比から必要となる限界時間刻みを推定することができる．これら推定式により求めた限界時間刻みと二分法で求めた限界時間刻みの比較を図-10 に示す．大変良い対応となっており，せん断波，疎密波ともに限界時間刻みをほぼ正確に推定できることがわかる．

図-7 や 9 からわかるように同じ弾性波に対しては疎密波の方がせん断波に比較して常に限界時間刻みが大きいが，せん断波速度と疎密波速度の関係は対象となる材料によって異なるため一概にどちらで決まるとは言えない．両方について弾性波速度から限界時間刻みを算定して小さい方の限界時間刻みを用いて計算することが必要であろう．

7．結論

本論文では MPS 法を用いた波動伝播の解析を行い，安定限界となる時間積分のための時間刻みについて検討を行った．主な結論は次のようにまとめることができる．

1) ３つの時間積分アルゴリズム，Euler 法，Leapfrog 法, Verlet 法について安定限界の時間刻みについて比較を行い，Leapfrog 法と Verlet 法では同じ程度の計算効率，Euler 法は他の２つに比べ計算効率が悪いことを示した．特に減衰比が小さい領域でその

差が大きい．

2) Verlet 法を用いて様々な計算条件で限界時間刻みを算定したところ，粒子半径とは比例関係，減衰比や弾性波速度とは反比例の関係にあることを示した．また，限界時間刻みとの関係において粒子半径はせん断波速度で基準化できることを示した．
3) ３つのパラメタ粒子半径，減衰比，弾性波速度から限界時間刻みを推定する式を提案し，その一致度が良好であることを示した．

本論文では弾性波動伝播の問題に対する時間刻みと安定性について検討した．まだ，MPS 法には解決すべき課題も多いが非常に高い可能性を持った方法であり，今後は破壊挙動を中心に検討を継続していく予定である．

付　録

以下にMPSによる弾性解析の基本式を示す[14)]．

(1) MPS法における応力とひずみ

本文の式(11)あるいは式(12)を用いて回転成分を取り除いた変形ベクトル$\boldsymbol{u}_{ij}$を現在の2点間ベクトル$\boldsymbol{r}_{ij}$の方向$\boldsymbol{u}_{ij}^{n}$と直交方向$\boldsymbol{u}_{ij}^{s}$へ分解する．

$$\boldsymbol{u}_{ij}^{n}=\frac{\boldsymbol{u}_{ij}\cdot\boldsymbol{r}_{ij}}{\left|\boldsymbol{r}_{ij}\right|}\frac{\boldsymbol{r}_{ij}}{\left|\boldsymbol{r}_{ij}\right|} \tag{A1}$$

$$\boldsymbol{u}_{ij}^{s}=\boldsymbol{u}_{ij}-\boldsymbol{u}_{ij}^{n} \tag{A2}$$

ラメの定数μに関係する垂直応力（2点間のベクトル方向）とひずみの関係を考えると次式が得られる．

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}^{n}=2\frac{(\mu_i+\mu_j)}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{n}=(\mu_i+\mu_j)\frac{c_{ij}^{n}}{\left|\boldsymbol{r}_{ij}^{0}\right|\left|\boldsymbol{r}_{ij}\right|}\boldsymbol{r}_{ij} \tag{A3}$$

ここで，$c_{ij}^{n}=\dfrac{\boldsymbol{u}_{ij}\cdot\boldsymbol{r}_{ij}}{\left|\boldsymbol{r}_{ij}\right|}$

同様に，ラメの定数μに関係するせん断応力とひずみの関係を考えると次式が得られる．

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}^{s}=2\frac{(\mu_i+\mu_j)}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{s}=(\mu_i+\mu_j)\frac{\boldsymbol{u}_{ij}-\boldsymbol{u}_{ij}^{n}}{\left|\boldsymbol{r}_{ij}^{0}\right|} \tag{A4}$$

(2) 力の釣り合い

粒子の加速度項を垂直応力項（下添え字n），せん断応力項（下添え字s），圧力項（下添え字p）に分けて計算する．

$$\rho_i\left[\frac{\partial\boldsymbol{v}_i}{\partial t}\right]=\rho_i\left[\frac{\partial\boldsymbol{v}_i}{\partial t}\right]_n+\rho_i\left[\frac{\partial\boldsymbol{v}_i}{\partial t}\right]_s+\rho_i\left[\frac{\partial\boldsymbol{v}_i}{\partial t}\right]_p \tag{A5}$$

ここで，$\boldsymbol{v}_i=\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}$であり各粒子の速度を，$\rho$は質量密度を表す．垂直応力項（下添え字$n$），せん断応力項（下添え字$s$）はそれぞれ以下の式で与えられる．

$$\begin{aligned}\rho_i\left[\frac{\partial\boldsymbol{v}_i}{\partial t}\right]_n&=\frac{d}{n_i^0}\sum_{j\neq i}\frac{2\boldsymbol{\sigma}_{ij}^{n}}{\left|\boldsymbol{r}_{ij}^{0}\right|}w(\left|\boldsymbol{r}_{ij}^{0}\right|)\\&=\frac{4d}{n_i^0}\sum_{j\neq i}\frac{(\mu_i+\mu_j)}{2}w(\left|\boldsymbol{r}_{ij}^{0}\right|)c_{ij}^{n}\frac{\boldsymbol{r}_{ij}}{\left|\boldsymbol{r}_{ij}\right|\left|\boldsymbol{r}_{ij}^{0}\right|^{2}}\end{aligned} \tag{A6}$$

$$\rho_i\left[\frac{\partial\boldsymbol{v}_i}{\partial t}\right]_s=\frac{d}{n_i^0}\sum_{j\neq i}\frac{2\boldsymbol{\sigma}_{ij}^{s}}{\left|\boldsymbol{r}_{ij}^{0}\right|}w(\left|\boldsymbol{r}_{ij}^{0}\right|)=\frac{4d}{n_i^0}\sum_{j\neq i}\boldsymbol{b}_{ij}^{s} \tag{A7}$$

ここで，$\boldsymbol{b}_{ij}^{s}=\dfrac{(\mu_i+\mu_j)}{2}w(\left|\boldsymbol{r}_{ij}^{0}\right|)\dfrac{\boldsymbol{u}_{ij}^{s}}{\left|\boldsymbol{r}_{ij}^{0}\right|^{2}}$

dは次元に依存したパラメタで2次元では2である．重み関数wを導入し，近傍粒子との相互作用をモデル化する．MPS法では重み関数として次の式が採用されている．

$$w(\left|\boldsymbol{r}_{ij}^{0}\right|)=\begin{cases}\dfrac{r_e}{\left|\boldsymbol{r}_{ij}^{0}\right|}-1 & (0<\left|\boldsymbol{r}_{ij}^{0}\right|<r_e)\\ 0 & (r_e\leq\left|\boldsymbol{r}_{ij}^{0}\right|)\end{cases} \tag{A8}$$

r_eは影響半径と呼ばれており，粒子間相互作用を考慮する範囲を表す．n_i^0は粒子密度数であり次式で求めることができる．

$$n_i^0=\sum_{i\neq j}w(\left|\boldsymbol{r}_{ij}^{0}\right|) \tag{A9}$$

MPS法では場所によらない一定の値を使うことを提案している．次に圧力項について示す．

$$\rho_i\left[\frac{\partial\boldsymbol{v}_i}{\partial t}\right]_p=-\frac{d}{n_i^0}\sum_{j\neq i}\frac{2p_{ij}\boldsymbol{r}_{ij}}{\left|\boldsymbol{r}_{ij}^{0}\right|\left|\boldsymbol{r}_{ij}\right|}w(\left|\boldsymbol{r}_{ij}^{0}\right|) \tag{A10}$$

ここで，$p_{ij}=\dfrac{p_i+p_j}{2}$であり，各粒子における圧力$p_i$は以下の式で求める．

$$\begin{aligned}p_i&=-\lambda_i(\varepsilon_{rr})_i=-\lambda_i(div\boldsymbol{u})_i\\&=-\lambda_i\frac{d}{n_i^0}\sum_{j\neq i}\frac{\boldsymbol{u}_{ij}\cdot\boldsymbol{r}_{ij}}{\left|\boldsymbol{r}_{ij}^{0}\right|\left|\boldsymbol{r}_{ij}\right|}w(\left|\boldsymbol{r}_{ij}^{0}\right|)=-\lambda_i\frac{d}{n_i^0}\sum_{j\neq i}\frac{c_{ij}^{n}}{\left|\boldsymbol{r}_{ij}^{0}\right|}w(\left|\boldsymbol{r}_{ij}^{0}\right|)\end{aligned} \tag{A11}$$

ここで，λはラメの定数である．

(3) 角運動量の保存

微分方程式上は角運動量が保存されるが離散化により成立しなくなることから，せん断応力によって生じるトルクを打ち消すようにトルクを与え角運動量を保存させる．粒子 ij 間のせん断応力によって生じる力は粒子 i の質量を m_i（$=\rho_i D^2$，D は粒子の直径），粒子 ij 間のせん断応力項によって生じる加速度を$\partial\boldsymbol{v}_{ij}/\partial t$ とすると，

$$\boldsymbol{F}_{ij} = m_i\left[\frac{\partial \boldsymbol{v}_{ij}}{\partial t}\right]_s = \frac{m_i 2d\boldsymbol{\sigma}_{ij}^s}{\rho_i n_i^0 \left|\boldsymbol{r}_{ij}^0\right|} w\left(\left|\boldsymbol{r}_{ij}^0\right|\right)$$
$$= \frac{4m_i d}{\rho_i n_i^0}\frac{\left(\mu_i+\mu_j\right)}{2} w\left(\left|\boldsymbol{r}_{ij}^0\right|\right)\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^s}{\left|\boldsymbol{r}_{ij}^0\right|} \tag{A12}$$
$$= \frac{4m_i d}{\rho_i n_i^0}\frac{\left(\mu_i+\mu_j\right)}{2} w\left(\left|\boldsymbol{r}_{ij}^0\right|\right)\frac{\boldsymbol{u}_{ij}^s}{\left|\boldsymbol{r}_{ij}^0\right|^2} = \frac{4m_i d}{\rho_i n_i^0}\boldsymbol{b}_{ij}^s$$

となる．一方，粒子 j には同じ大きさで逆向きの力が作用する．この偶力により発生するトルクは外積を用いて次式で表される．

$$\boldsymbol{T}_{ij} = -\boldsymbol{r}_{ij}\times\boldsymbol{F}_{ij} \tag{A13}$$

これを打ち消すように粒子 i と j に半分ずつトルクを与える．この操作を以下の式のように影響範囲内にある全ての粒子に対して行う．

$$I_i\left[\frac{\partial \omega_i}{\partial t}\right]_s = \sum_{i\neq j}\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{T}_{ij}\right]$$
$$= 2d\sum_{i\neq j}\left[\frac{m_i}{\rho_i n_i^0}+\frac{m_j}{\rho_j n_j^0}\right]\left(\boldsymbol{r}_{ij}\times\boldsymbol{b}_{ij}^s\right) \tag{A14}$$

ここで，$\omega_i (=\partial\theta_i/\partial t)$ は角速度，I_i は一辺Dの正方形の回転慣性より$I_i = \rho_i D^4/6$とする．

(4) 減衰比の導入

地震応答解析では地盤調査で得られる減衰比を反映した解析が必要である．DEMでは粘性係数が入力パラメタとなり，減衰比との同等性については明確ではなく試行錯誤的に決めることが多い．時刻歴で時間積分を行う有限要素法（FEM）では要素型レイリー減衰を用いることが多く，直接減衰比を反映させることができる．要素型レイリー減衰行列は要素剛性行列と要素質量行列を用いて以下の式で定義する．

$$\boldsymbol{C} = \sum_i a_1 h_i \boldsymbol{M}_i^e + \sum_i a_2 h_i \boldsymbol{K}_i^e \tag{A15}$$

ここで，$\boldsymbol{M}_i^e$，$\boldsymbol{K}_i^e$ はそれぞれ要素iの質量行列，剛性行列である．またレイリー減衰のそれぞれの係数について意味合いを明確にするために次のように定義する．

$$a_1 = \frac{4\pi f_1 f_2}{f_1+f_2},\quad a_2 = \frac{1}{\pi(f_1+f_2)} \tag{A16}$$

f_1，f_2はそれぞれ特性振動数（Hz）を，h_iは要素 i の減衰比を表す．均質な場合には通常のレイリー減衰となり，減衰行列も対角化することができることから，j次のモード減衰比はその固有振動数$f^{(j)}$を用いて以下のように表される．

$$h^{(j)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi f^{(j)}}a_1 + 2\pi f^{(j)}a_2\right) \tag{A17}$$

モード減衰は固有振動数に関する離散的な値となるがこれを連続的な関数として解釈し，式(A16)を代入し整理すると次の式が得られる．

$$h(f) = \frac{1}{f}\frac{f_1 f_2}{f_1+f_2}h_0 + f\frac{1}{f_1+f_2}h_0 \tag{A18}$$

発揮される減衰比は特性振動数f_1,f_2において入力した減衰比と等しくなるという明確な意味を持ち，入力パラメタ f_1 より低振動数あるいは f_2 より高振動数の場合は入力した減衰比よりも大きくなり，f_1 以上，f_2 以下の領域では小さくなる．

以上は有限要素法における定式化であるがこれと同等の意味になるようにMPS法においても定式化を行う．振動方程式を変位から決まる復元力と速度から決まる復元力に分けて次のようにおく．

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{r}}_k + \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{M}}\dot{\boldsymbol{r}}_k + \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{K}}\dot{\boldsymbol{u}}_k + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}_k) = \boldsymbol{f}_k \tag{A19}$$

ここで，下添え字 k は時刻ステップを表す．また，$\boldsymbol{g}$ は回転成分を取り除いた変位 $\boldsymbol{u}_k$ だけから決まる復元力を表す．レイリー減衰と同等になるように速度比例行列 $\boldsymbol{C}$ を質量に比例する項と剛性に比例する項に分け，質量比例項には回転成分を取り除く前の速度を，剛性比例項には回転成分を取り除いた後の速度を乗じる．その際，MPS 法では要素の概念がないので各粒子に減衰比を割り当てる．

$$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{M}} = a_1\boldsymbol{HM},\qquad \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{K}} = a_2\boldsymbol{H}\frac{d\boldsymbol{g}}{d\boldsymbol{u}} \tag{A20}$$

ここで，$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} h_1 & & & \boldsymbol{0} \\ & h_2 & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & & h_n \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{H}$ は各粒子の減衰比を記憶した対角行列とする．有限要素法の剛性行列に相当する行列として復元力ベクトルの変位ベクトルによる微分で求められる行列 $d\boldsymbol{g}/d\boldsymbol{u}$ を用いる．線形の剛性行列 $\boldsymbol{K}$ による復元力 $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{Ku}$ の場合，変位ベクトル $\boldsymbol{u}$ による微分は $\boldsymbol{K}$ となり，行列 $d\boldsymbol{g}/d\boldsymbol{u}$ は線形の場合を包含している．

式(A19)に式(A20)を代入して整理すると次の式が得られる．

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_k + a_1\boldsymbol{H}\dot{\boldsymbol{r}}_k + a_2\boldsymbol{HM}^{-1}\frac{d\boldsymbol{g}}{d\boldsymbol{u}}\dot{\boldsymbol{u}}_k + \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}_k) = \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{f}_k \tag{A21}$$

ここで，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}(t\text{-}\Delta t))$ についてテーラー展開 1 次までの近似を考える．

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}(t-\Delta t)) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}(t)) - \Delta t\frac{d\boldsymbol{g}}{d\boldsymbol{u}}\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} \tag{A22}$$

時刻 t をステップ k，時刻 $t\text{-}\Delta t$ をステップ k-1 として，式(A22)を変形して次の関係を得る．

$$\frac{d\boldsymbol{g}}{d\boldsymbol{u}}\dot{\boldsymbol{u}}_k = \frac{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}_k) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}_{k-1})}{\Delta t} \tag{A23}$$

式(A23)を式(A21)に代入し，整理すると以下の式が得られる．

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{r}}_k &= \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{f}_k - a_1\boldsymbol{H}\dot{\boldsymbol{r}}_k - \left(\frac{a_2}{\Delta t}\boldsymbol{H} + \boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}_k) \\ &\quad + \frac{a_2}{\Delta t}\boldsymbol{H}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}_{k-1})\end{aligned} \tag{A24}$$

ここで，$\boldsymbol{I}$ は単位行列である．以上により，現ステップの速度ベクトル，変位から決まる復元力ベクトル $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}_k)$，1 ステップ前の変位から決まる復元力ベクトル $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}_{k-1})$を用いて減衰を考慮した加速度ベクトルを算定できる．$\boldsymbol{M}$ が対角行列であることよりプログラムは非常に簡易になり，数行のサブルーチンで減衰を考慮できる．

参考文献

1) 国土交通省：土木・建築にかかる設計の基本，2002. http://www.mlit.go.jp/kisha/kisha02/13/131021/131021.pdf
2) 国際標準化機構（ISO）：ISO 23469（構造物の設計の基本ー地盤基礎構造物の設計に用いる地震作用），日本規格協会，2005.
3) 国土交通省港湾局監修，港湾の施設の技術上の基準・同解説検討委員会編：港湾の施設の技術上の基準・同解説，日本港湾協会，2007.
4) 伯野 元彦：破壊のシミュレーションー拡張個別要素法で破壊を追う，森北出版，1997.
5) 中瀬仁，安中正，片平冬樹，興野俊也：平面ひずみ圧縮試験に対する個別要素法の適用，土木学会論文集，No.454/III-20，pp.55-64，1992.
6) Liu, G. R. and Liu, M.B.: Smoothed particle hydrodynamics: a meshfree particle method, World Scientific, 2003.
7) 酒井譲，山下彰彦，SPH 理論に基づく粒子法による構造解析の基礎的検討, 日本機械学会論文集（A 編），67 巻，659 号，pp. 7-16，2001.
8) 越塚誠一：計算力学レクチャーシリーズ 5　粒子法，丸善，2005.
9) 越塚誠一：粒子法シミュレーション，培風館，2008.
10) 土木学会 応用力学委員会 計算力学小委員会編：いまさら聞けない 計算力学の常識，丸善，2008.
11) 沖村孝，鳥居宣之，堀内雅宏：MPS 法による盛土の到達距離推定に関する研究，神戸大学都市安全研究センター研究報告，第 10 号，2006.3.
12) 宋武燮，越塚誠一，岡芳明：MPS 法による弾性構造体の動的解析，日本機械学会論文集（A 編），71 巻，701 号，pp. 16-22，2005.
13) 稲垣健太，酒井幹夫，越塚誠一，MPS 法によるコンクリートキャスクの地震応答解析，日本計算工学会，Transaction of JSCES, No.20080026, 2008
14) 吉田郁政，石丸真，MPS 法を用いた地震応答解析のための基礎検討，土木学会論文集 A，Vol.66, No.2, pp.206-218, 2010

（2010 年 3 月 9 日　受付）