応用力学論文集 Vol.13, pp.477-486　(2010 年 8 月)　土木学会

粒状材料の弾性変形特性に関する数値実験

Numerical experiments for elastic deformation characteristics of granular materials

佐藤雄太*・金子賢治**・鈴木久美子***・熊谷浩二****
Yuta SATOH, Kenji KANEKO, Kumiko SUZUKI and Koji KUMAGAI

*学生会員　八戸工業大学大学院工学研究科土木工学専攻（〒 031-8501 青森県八戸市大字妙字大開 88-1）
**正会員　工博　八戸工業大学大学院　工学研究科土木工学専攻（〒 031-8501 青森県八戸市大字妙字大開 88-1）
***正会員　工博　八戸工業大学工学部（〒 031-8501 青森県八戸市大字妙字大開 88-1）
****フェロー会員　工博　八戸工業大学大学院　工学研究科土木工学専攻（〒 031-8501 青森県八戸市大字妙字大開 88-1）

In this study, we discussed the elastic deformation characteristics of granular materials by the micro-scale analysis in the multi-scale numerical method. At first, we showed the outline of our multi-scale method for granular materials. In the method, the micro-scale analysis plays a role of the constitutive equation in the macro-scale problem. By directing our focus to this feature of the multi-scale theory, we carried out the numerical experiments to investigate the elastic deformation characteristics. As the results, we were able to obtain the important information about the elastic deformation characteristics of granular materials.

Key Words : *elastic deformation characteristics, granular materials, micro-scale numerical experiments, global-local modeling*

1.　はじめに

粒状材料に対して hypoplasticity[1),2)]やマイクロメカニックスモデル[3),4),5)]など塑性論とは異なるアプローチによる構成式も提案されてはいるが，これら以外の大部分は金属塑性論に基づくもの[6),7)]である．また，繰り返し負荷挙動や滑らかな弾塑性遷移など実材料の忠実な変形挙動の記述を目的として，降伏面の内部を純粋な弾性域と仮定しない非古典弾塑性論に基づく構成式が数多く提案されている[8)]．

これらの金属塑性論に基づく構成式においては，弾性ひずみ増分と塑性ひずみ増分とに分離して増分型の構成式をそれぞれに定式化し，全ひずみ増分はこれらを合計することで評価する．粒状材料の構成式に関して塑性ひずみ増分については現在まで多くの研究者により活発に研究が行われているが，弾性部分に関しては修正応力を用いて検討している例等[9)]はあるものの，単に等方線形弾性体の構成式を適用していることが多い．その理由としては，粒状材料の場合には塑性変形が卓越しており弾性変形は比較的小さいと認識されていることが挙げられる．また，実験において弾性部分と塑性部分とに正確に分離することが困難であるため，構成式研究の一般的な手法は，塑性ひずみ増分を複雑に定式化し等方線形弾性体と仮定した弾性ひずみ増分と足しあわせて全ひずみ増分を評価することで実験事実と比較し検討している．しかしながら，変形理論が微小変形から有限変形や大変形などへ移行してきている現在においては弾性部分を微小と考えることには多少無理があると考えられるし，弾性変形として取り扱う必要のある部分と塑性変形として取り扱う必要のある部分とに正確に分離して考える方が合理的である．したがって，粒状材料の変形挙動を正確に記述するためには，まず，変形を弾性部分と塑性部分とに正確に分離し，それぞれの特性を十分に把握する必要がある．

このような目的を実験により行うことは非常に難しく，数値解析的な検討が有効である．粒状材料の弾塑性変形挙動に関する数値実験的研究として，Bardet[10)]や Kishino ら[11)]が離散体解析手法を用いた数値実験によって塑性流動則に関する研究を，Cheng ら[12)]は粒子破砕を考慮した数値解析により破砕性粒状材料の破壊基準に関する研究を行っている．また，金子らは非線形均質化理論に基づく粒状体マルチスケール解析[13),14),15)]の概念に基づき，そのミクロスケール解析を用いて塑性流動則や負荷面[16)]，破壊基準[17)]，応力主軸回転時の変形挙動[18),19)]などの検討を行っている．

数学的均質化理論[20),21)]に基づく粒状体マルチスケール解析[13),14),15)]は，巨視的な構成式を用いること無く，粒子の集合体である粒状材料の変形特性を反映した境界値問題の解析手法である．粒子集合からなる構造体は数学的均質化理論により，等価均質体と微視構造に分離され，マクロとミクロといった２つのスケールの境界値問題として記述される．マルチスケール解析法はこれらマクロおよびミクロスケール問題を連成して同時に解く解析手法であり，粒状体マルチスケール解析法においてはマクロスケール問題には有限要素法を，ミクロスケール問題には粒状要素法[22),23)]を用いている．本解析手法においては通常の有限要素法における構成式の役割は周期境界制御による粒状要素法による

ミクロスケール解析が担うことになる．つまり，数学的均質化理論によれば，周期境界条件下でのミクロスケール解析が巨視的な応力ひずみ関係を与えることとなり，ミクロスケールに与えた粒状体の微視的変形特性を忠実に反映した構造解析が可能となる．しかしながら，粒状体マルチスケール解析法は全体構造内部の全積分点において微視スケール解析を行う必要があり，計算時間・計算負荷の点から現在の計算機性能をもってしても実用的に使用するのは困難である．さらには，学術的観点から見れば現象をできる限り正確に記述しその本質を理解するための構成式の構築が必要である．

本研究では，粒子集合材料の弾性特性について検討・考察するために，粒状体マルチスケール解析におけるミクロスケール解析が構成関係を与えることに着目し，これを用いて粒状材料の弾性変形特性を把握することを目的として数値実験を行う．具体的には，特に，粒子の弾性特性と集合体としての平均弾性挙動の関連性，種々の応力状態における弾性ひずみ増分応答，微視的内部構造と弾性変形特性の関係について考察する．

2. 粒子の弾性と集合体の弾性特性の関係

2.1 粒子間構成式と制約条件

本章では，粒子自身の弾性特性と集合体としての平均弾性変形特性の関係を考察する．ここでは，本研究で用いた粒状要素法を用いたミクロスケール解析手法のうち，弾性変形特性に関する解析結果に直接的に関係する粒子間構成式と制約条件について簡単に示す．

粒子は球形に理想化し，球形粒子自身は剛体要素であり粒子の弾性的な変形は粒子間に設定した構成式で表現する．粒子間の接触力と相対変位との弾性関係を，粒子がすべりを生じるまでの相対変位が微小であると考え，ここでは接触点における増分型の構成式はすべりが生じない限り以下の線形関係で表す．

$$\Delta \boldsymbol{T}^{ij} = \boldsymbol{s}^{ij}[[\Delta \boldsymbol{u}^{ij}]] \tag{1}$$

ここに，$\boldsymbol{s}^{ij}$ は粒子 i と粒子 j の間の接触点 C^{ij} における仮想バネ剛性マトリクス

$$\boldsymbol{s}^{ij} = \begin{pmatrix} s_N & 0 & 0 \\ 0 & s_T & 0 \\ 0 & 0 & s_T \end{pmatrix} \tag{2}$$

であり，$\Delta \boldsymbol{T}^{ij}$ は粒子 i と粒子 j の間の接触力増分ベクトル，$[[\Delta \boldsymbol{u}^{ij}]]$ は相対変位増分ベクトルである．

摩擦による制約条件は接触力の法線および接線方向成分をそれぞれ T_N^{ij}，$\boldsymbol{T}_T^{ij}$ として，以下のような Mohr-Coulomb 条件を仮定する．

$$\left| \boldsymbol{T}_T^{ij} \right| \leq T_N^{ij} \tan \phi \tag{3}$$

この条件を満たさない場合，粒子間にすべりが生じることとし強制的に接線方向接触力をこの限界値に戻す修正を行う．ここに，ϕ は粒子間摩擦角である．粒子同士の接触条件は

$$[[u_N^{ij}]] > 0 \tag{4}$$

により与えられる．接触条件を満たさない場合には接触力 $\boldsymbol{T}^{ij}$ は強制的に $\boldsymbol{0}$ とする．

本研究で用いるミクロスケール解析手法においては，接触点における法線および接線方向バネ剛性 s_N, s_T と粒子間摩擦角 ϕ の３つの材料パラメータが用いられる．集合体の弾性挙動に大きく影響を与えるパラメータは，粒子自身の弾性特性を表す法線方向と接線方向の２つのバネ剛性であり，ここではこれら２つのパラメータのみを変化させたモデルを複数作成し解析を行うことで，粒子の弾性特性と集合体の平均挙動としての弾性特性の関係について考察する．

2.2 解析の概要

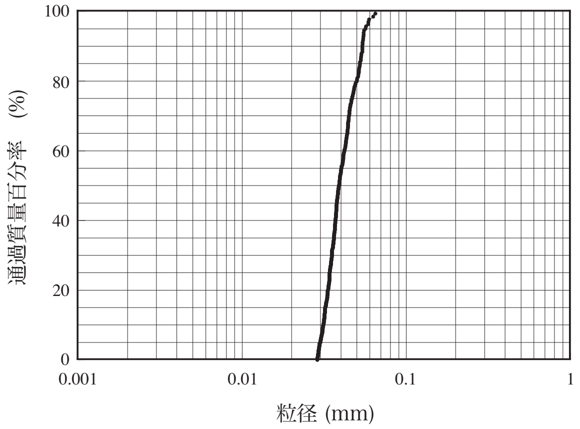
本論文においては，マルチスケール解析のミクロスケール部分のみを取り出して粒状材料の弾性特性について考察する．マルチスケール解析手法のミクロスケール解析は周期境界条件を仮定しているため，本論文では全ての解析において周期境界条件を用いる．また，応力 $\boldsymbol{\Sigma}$ を加えて得られるひずみ $\boldsymbol{E}$ を弾性部分と塑性部分に分離する必要があることから応力プローブ試験[11)]を行う．応力プローブ試験とは，任意の応力状態におかれた材料の応力増分とひずみ増分との関係を調べ，増分型の連続体構成モデルの考察を行うための一連の試験である．ある応力状態から種々の方向に大きさ一定の微小な応力増分による載荷・除荷を行い，応答として得られるひずみ増分を評価する．載荷時に生じたひずみ増分のうち，除荷過程において回復するひずみを弾性ひずみ増分，非回復ひずみを塑性ひずみ増分と見なすことができる．したがって，本研究における粒状要素法によるミクロスケール解析は応力制御によりシミュレーションを行う．なお，個別要素法[26)]は応力を精度良く制御して解析を行うことが非常に困難であり，粒状要素法を用いることで応力空間上の解析を精度良く行うことができ，粒状要素法を用いることの利点の一つである．

本研究で用いた粒状体モデルは，粒径0.03〜0.07mmの範囲で1073個の球粒子を立方体領域にランダムに発生させた後，解析に必要なパラメータを設定して等方応力100kPaを作用させ，全粒子のつり合い状態を満足するように作成した．本モデルの粒径分布は**図–1**に示す通りである．この集合体モデルに対して粒子間摩擦角 ϕ =15° を一定とし，**表–1**に示すように法線および接線方向バネ剛性を変化させた17個のモデルを作成した．モデル A-1〜A-8 は，法線方向成分と接線方向成分の比を0.7と一定にして，$\sqrt{s_N^2+s_T^2}$ を変化させた．また，B-1〜B-9 については $\sqrt{s_N^2+s_T^2}$ を100kN/m と

して，法線および接線方向の比 s_T/s_N を変化させている．モデル A-6 の初期状態の粒子配置を例として**図–2** に示す．なお，初期つり合い状態を満足した際には，間隙比は粒子間バネ剛性の大きさに依存して若干変化するが，ほぼ一定の値となっている．また，ファブリックテンソルの対角項はどのモデルにおいても初期つり合い状態においては 1/3 程度であり，微視的内部構造もほぼ等方であることを確認している．

作成した初期状態に対して $\bar{p}-q$ 面における応力プローブ試験[11]を行い，弾性ひずみ増分を抽出し集合体の弾性特性を抽出した．ここで，q は $q=\sqrt{2}(\Sigma_{zz}-\Sigma_{xx})/\sqrt{3}$ と定義されるせん断応力である．また，$\bar{p}$ は $(\Sigma_{xx}+\Sigma_{yy}+\Sigma_{zz})/\sqrt{3}$ であり，$\sqrt{\bar{p}^2+q^2}=\|\boldsymbol{\Sigma}\|$ となるように平均応力 p を補正した応力パラメータである．

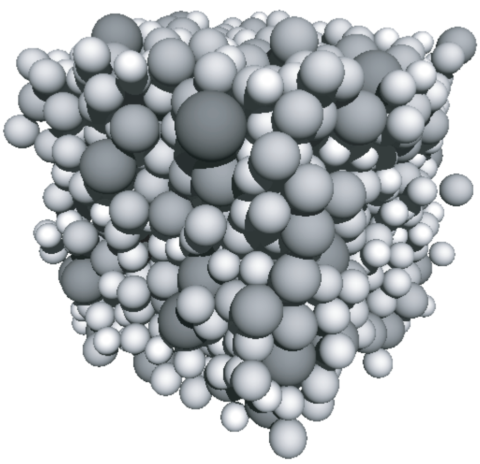
石井ら[23]は，粒状要素法を用いて応力プローブ試験を行う場合，応力増分の大きさは側圧の 0.0001〜0.02 倍程度であれば結果に応力増分の大きさに依存して不具合が生じないことを示している．したがって，本研究での応力プローブ試験は，各平面内において応力増分 $\|\Delta\boldsymbol{\Sigma}\|=1$kPa とし，1° 毎 360 方向について行った．



図–1 粒子集合体モデルの粒径分布

表–1 解析に用いた粒状体モデルのパラメータ

No.	s_N (kN/m)	s_T (kN/m)	$\sqrt{s_N^2+s_T^2}$ (kN/m)	s_T/s_N
A-1	0.4095	0.2867	0.5	0.7
A-2	0.8190	0.5734	1.0	0.7
A-3	4.095	2.867	5.0	0.7
A-4	8.190	5.734	10.0	0.7
A-5	40.95	28.67	50.0	0.7
A-6	81.90	57.34	100.0	0.7
A-7	409.5	286.7	500.0	0.7
A-8	819.0	573.4	1000.0	0.7
B-1	70.71	70.71	100.0	1.0
B-2	74.33	66.90	100.0	0.9
B-3	78.09	62.47	100.0	0.8
B-4	85.75	51.45	100.0	0.6
B-5	89.44	44.72	100.0	0.5
B-6	92.85	37.91	100.0	0.4
B-7	95.78	28.73	100.0	0.5
B-8	99.01	19.80	100.0	0.2
B-9	99.50	9.950	100.0	0.1



図–2 粒子集合体モデルの例（モデル A-6）

2.3 解析結果とその考察

(1) 粒子間バネ剛性の大きさの影響

まず，**図–3** にモデル A-1〜A-8 に対して行った応力プローブ試験の結果得られた弾性ひずみ増分応答を示す．図中の弾性ひずみ増分に関するパラメータ $\Delta p^e, \Delta q^e$ は，応力プローブ試験において作用させた応力のパラメータ $\bar{p}$ および q に対応しており，それぞれ

$$\Delta p^e = (\Delta E^e_{xx} + \Delta E^e_{yy} + \Delta E^e_{zz})/\sqrt{3} \tag{5}$$

$$\Delta q^e = \sqrt{2}(\Delta E^e_{zz} - \Delta \bar{E}^e)/\sqrt{3} \tag{6}$$

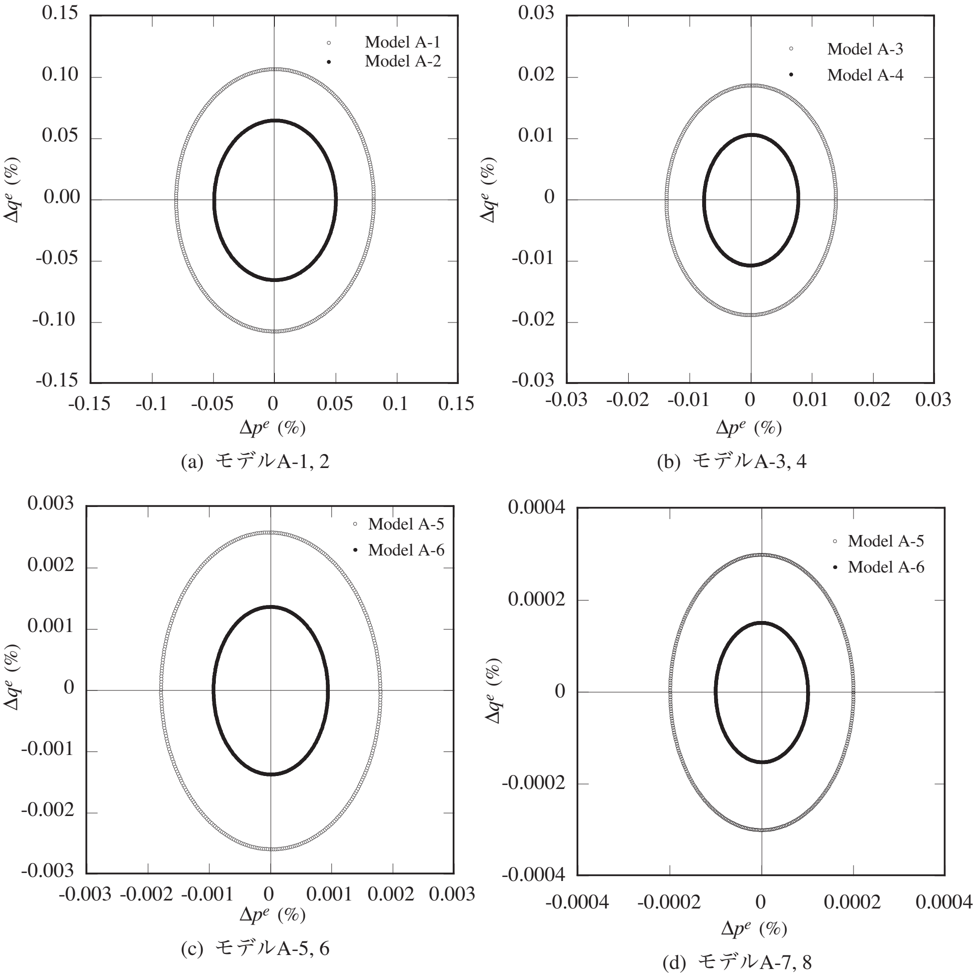
と表される．ここで，$\bar{E}^e = (E^e_{xx} + E^e_{yy})/2$ である．

モデル A-1〜8 は，バネ剛性の大きさを変化させているが，同図より，バネ剛性が大きくなっても弾性ひずみ増分として得られる集合体の応答を表す形状は類似した長軸が縦軸方向，短軸が横軸方向となる楕円形を示し，大きさのみが変化することがわかる．バネ剛性が大きくなると粒子集合体の剛性が大きくなり，得られる弾性応答は同様の応力増分に対して小さくなる．

等方弾性体の構成式を適用して数値実験と同様に応力プローブ試験を実施して得られる弾性ひずみ増分応答を**図–3** と同様の図にプロットすると，長軸が縦軸，短軸が横軸方向となる楕円形の応答を示す．**図–4** に例として，モデル A-6 の場合の数値実験結果と等方弾性構成式とを比較して示す．なお，等方弾性体の増分型構成式は

$$\Delta E^e_{ij} = \frac{1+\nu}{e}\Delta\Sigma_{ij} - \frac{\nu}{e}\Delta\Sigma_{kk}\delta_{ij} \tag{7}$$

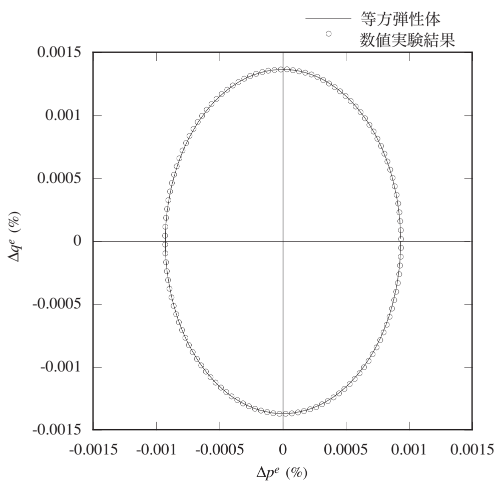
と表され，ここではヤング率 e とポアソン比 ν を p 軸方向と q 軸方向への２つの経路のプローブ試験結果を代表値として上式により逆算した．解析結果より逆算したモデル A-6 に対するヤング率は e=81.83 MPa, ポ



(a) モデルA-1, 2 (b) モデルA-3, 4

(c) モデルA-5, 6 (d) モデルA-7, 8

図–3 弾性ひずみ増分応答（モデル A-1〜A-8）



図–4 等方弾性体構成式と数値実験結果の比較（モデル A-6）

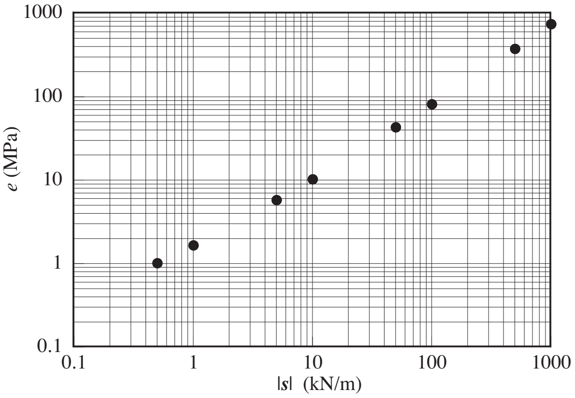
アソン比は ν=0.119 となり，これらを用いて弾性ひずみ増分を計算している．同図から，初期等方応力状態における弾性ひずみ増分応答は，等方弾性体の構成式で非常に精度良く近似できることがわかる．なお，その他のパラメータを用いたモデルについても同様に等方弾性体の構成式で近似可能であった．

各モデルについて同様にして求めたヤング率およびポアソン比とバネ剛性の大きさの関係を**図–5** に示す．**図–5(a)** は，ヤング率とバネ剛性の大きさの関係を両対数グラフに表したものであり，同図より，バネ剛性の大きさとヤング率は両対数グラフでほぼ直線関係にあることがわかる．**図–5(b)** は，ポアソン比とバネ剛性の大きさの関係を片対数グラフにあらわしたものである．同図より，バネ剛性の大きさが大きくなると若干ポアソン比も大きくなる傾向にあるが，ほとんど変わらないことがわかる．以上より，より硬い粒子を用いるほど集合体のヤング率も大きく硬くなるが，法線方向と接線方向のバネ剛性が一定であればポアソン比はほとんど変わらないといえる．

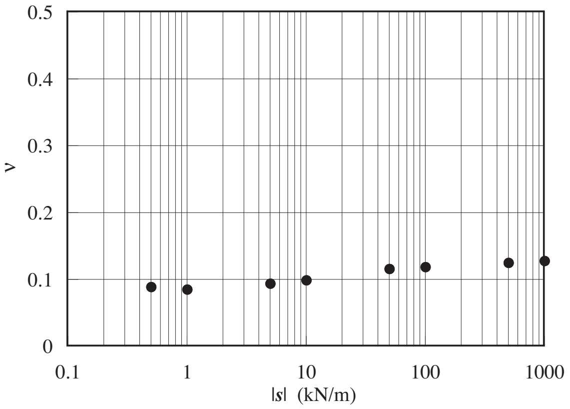
このような，バネ剛性を一定とした場合の解析結果については，例えば文献 3) のようなマイクロメカニックスモデルにおいても示されており，個別要素法を用いた検討[27]とも一致した傾向を示している．

(2) 粒子間バネ剛性比の影響

次に，**図–6** にモデル B-1〜B-9 について同様にして行った応力プローブ試験の結果得られた弾性ひずみ増分応答を示す．モデル B-1〜B-9 については，バネ剛性



(a) ヤング率とバネ剛性の大きさの関係



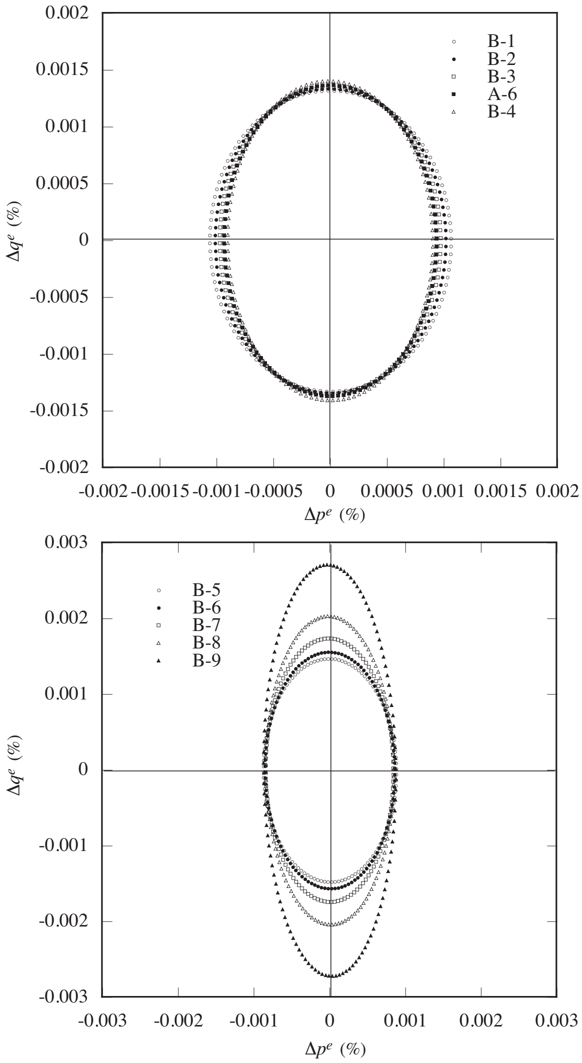
(b) ポアソン比とバネ剛性の大きさの関係

図–5 弾性定数とバネ剛性の大きさの関係（$s_T/s_N = 0.7$）

の大きさを一定として法線方向と接線方向成分の比を変化させたものである．同図より，バネ剛性の法線方向成分と接線方向成分の比が 1 に近いほど，応答として得られる弾性ひずみ増分を表す楕円形の短軸の長さが長軸に近く，バネ剛性比が小さくなるにつれて長軸が長くなることがわかる．また，バネ剛性比 0.3 より小さくなると急激に長軸が長い楕円となる．

図–7 はバネ剛性比とヤング率，ポアソン比の関係を示している．同図より，バネ剛性が 0.6 以上であればヤング率はほとんど変化しないが，バネ剛性比が 0.5 以下となるとバネ剛性の大きさは一定にしているにもかかわらずヤング率が急激に低下することがわかる．また，ポアソン比は，バネ剛性比が小さくなるにしたがって大きくなる．

バネ剛性の値は粒子サイズと相対的な関係により特性が変化するが，本研究で用いた粒径を用いる場合には，砂質土のヤング率は通常 10^1MPa 程度のオーダーであり，本研究で用いているミクロスケール解析手法を用いて砂質土の挙動を解析する場合には，バネ剛性の大きさを 10^1kN/m 程度に設定すべきことがわかる．砂質土の一般的なポアソン比は 0.1〜0.3 程度であり，バネ剛性比が 0.1〜0.8 の範囲ではほぼ妥当な値を示すといえる．



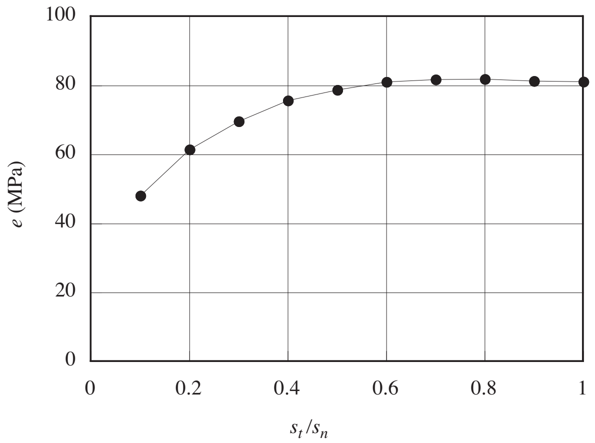
図–6 弾性ひずみ増分応答（モデル B-1〜B-9）

3. 応力状態と弾性ひずみ増分応答の関係

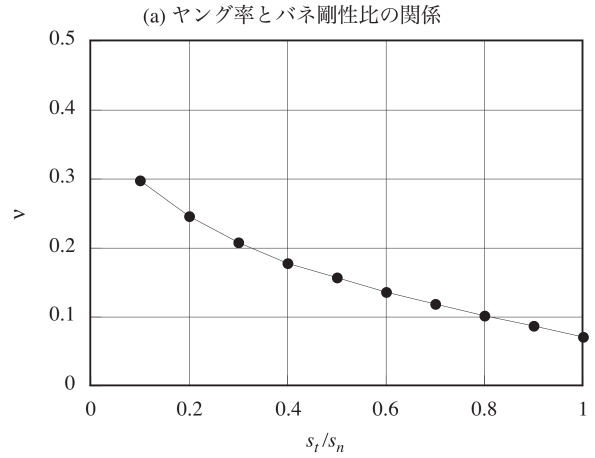
3.1 解析の概要

本章では，種々の応力状態における弾性ひずみ増分応答について考察するために，各種応力条件下で数値実験を行う．解析に用いた粒子集合体モデルは**図–2** に示したものと同様であり，粒径の分布は**図–1** に示した通りである．法線および接線方向剛性 s_N =50kN/m, s_T =35kN/m, 粒子間摩擦角 ϕ =15° を用いた．本モデルは，粒径 0.03〜0.07mm の範囲で 1073 個の球粒子を立方体領域にランダムに発生させ，各パラメータを設定した後，等方応力 100kPa によりつり合い状態を満足するように作成している．

まず，**図–8** に示した 4 つのケースの載荷経路において載荷シミュレーションを実施した．ここで，p は平均応力であり，q は $q = \sqrt{2}(\Sigma_{zz} - \Sigma_{xx})/\sqrt{3}$ と定義されるせん断応力である．経路（path）0 は，等方圧縮経路であり，粒状材料の弾性変形特性の拘束圧依存性について検討するために設定している．また，経路 1 は

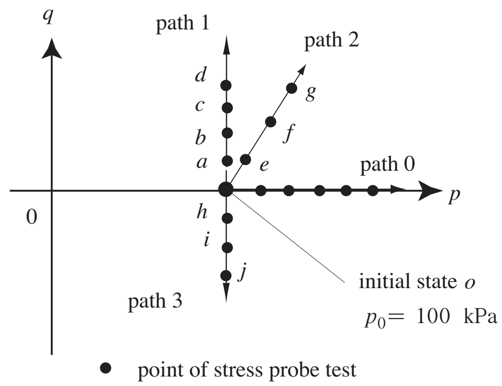


(a) ヤング率とバネ剛性比の関係

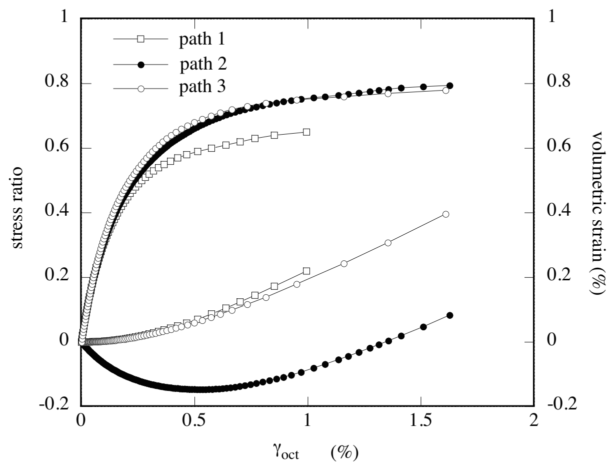


(b) ポアソン比とバネ剛性比の関係

図–7 弾性定数とバネ剛性比の関係 ($\sqrt{s_N^2+s_T^2}$ = 100kN/m)



図–8 せん断載荷経路と応力プローブ試験点



図–9 応力ひずみ関係（経路 1〜3）

平均応力一定の三軸圧縮，経路 2 は実際の実験と同条件の側圧一定三軸圧縮，経路 3 は平均応力一定三軸伸張試験の経路であり，いずれも種々のせん断応力条件下での弾性ひずみ増分応答を調べるための経路である．

載荷試験を実施した後，初期等方応力状態を含めた種々の応力状態において，$p-q$ 面および π 平面における応力プローブ試験を実施した．応力プローブ試験は，応力増分 $\|\Delta\boldsymbol{\Sigma}\| = 1\mathrm{kPa}$ とし，各平面内において 1° 毎 360 方向について行った．$p-q$ 面上での応力プローブ試験を実施するあたっては，前章と同様に，$\sqrt{\bar{p}^2+q^2} = \|\boldsymbol{\Sigma}\|$ となるように $\bar{p} = \sqrt{3}p$ と補正した $\bar{p}-q$ 空間を用いて応力を制御した．

3.2 解析結果とその考察

(1) 応力ひずみ関係

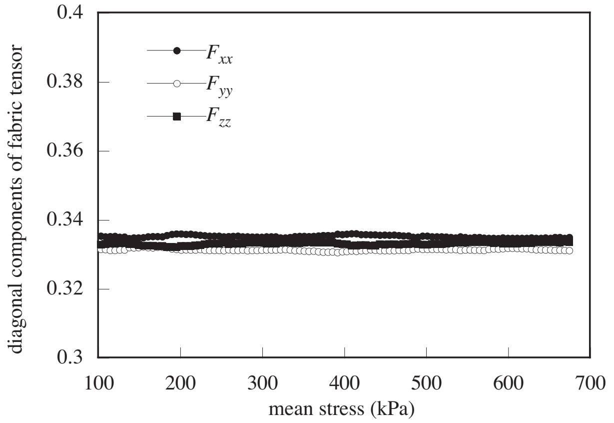
図–9 にケース 1〜3 のせん断載荷シミュレーションの結果得られた応力ひずみ関係を示す．同図の縦軸に示した応力比は，せん断応力と平均応力の比 $|q|/p$ を表しており，横軸の γ_{oct} は八面体せん断ひずみを表している．同図の経路 1 および 2 の応力比と八面体せん断ひずみの関係より，2 つの圧縮経路においてはほぼ同様の応答を示し，伸張方向には若干弱いといった粒状材料特有のせん断変形特性が現れていることがわかる．また，経路 2 は実際の三軸圧縮試験をシミュレートした経路であるが，せん断ひずみと体積ひずみの関係より正のダイレイタンシーが現れており，ここで用いる粒子集合体モデルは，密な砂のような挙動を示すことがわかる．

(2) 微視的内部構造変化

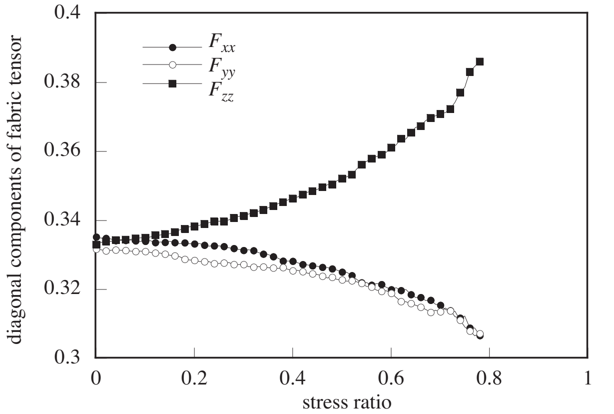
本研究で用いた周期境界制御粒状要素法による微視スケール解析においては，個々の粒子のつり合い式を解くため，集合体内部での粒子接触情報を収集することが可能である．粒子の幾何学的な接触状況が集合体の弾性変形特性に大きく影響を与えると考えることができるため，ここでは，粒状集合体内部の幾何学的微視構造を表す指標であり，次式で定義されるファブリックテンソル[28),29)]を算出し，載荷に伴う微視構造変化を評価する．

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{2N} \boldsymbol{n}_i \otimes \boldsymbol{n}_i \tag{8}$$

ここで，N は集合体内部での粒子接触点数であり，$\boldsymbol{n}_i$ は i 番目の接触点における外向き単位法線ベクトルを



(a) components of fabric tensor (path 0)



(b) components of fabric tensor (path 1)

図–10 圧縮およびせん断に伴う微視構造変化

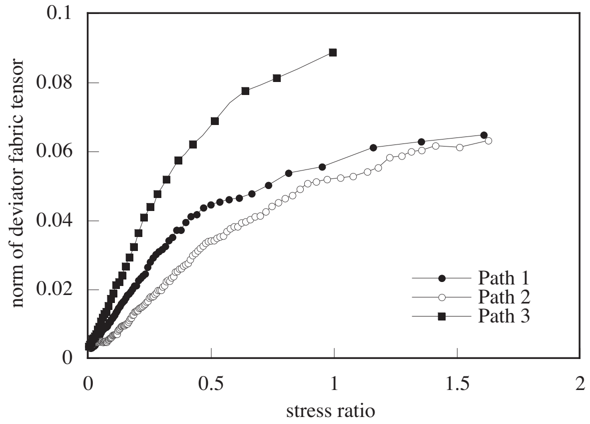
表している．ファブリックテンソルは，微視的内部構造を表す指標であり，対角項の和が常に 1 になるように正規化されている．また，３つの対角項が 1/3 になる場合に完全に等方的な微視構造と判断される．

図–10 に，圧縮およびせん断載荷に伴うファブリックテンソルの対角項の変化を経路 0 と 1 の場合を例に示す．同図より，等方圧縮の経路 0 の場合には，ファブリックテンソルの対角成分は全てほぼ 0.33 になっており，幾何学的微視構造はほぼ等方的といえる．また，経路 1 の平均応力一定三軸圧縮においては，せん断が進展するにつれて圧縮される z 軸方向の接触分布が卓越し，側圧方向の x 軸および y 軸方向には接触分布が減少してくることがわかる．

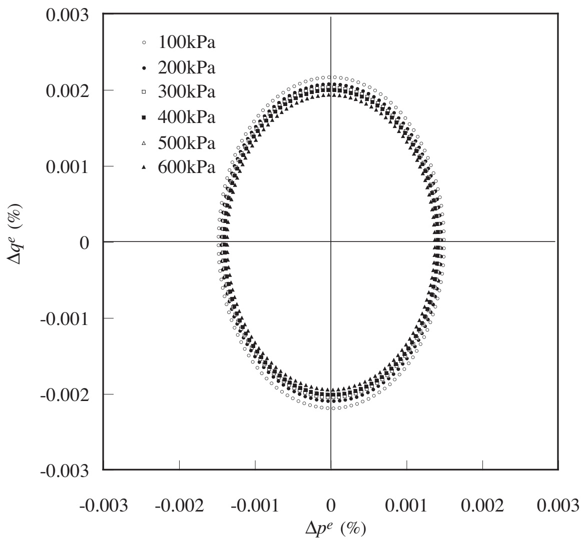
微視構造の異方性の度合いを表すために，偏差ファブリックテンソル $\boldsymbol{F}^d$ を次式のように定義する．

$$\boldsymbol{F}^d = \boldsymbol{F} - \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\boldsymbol{F})\boldsymbol{\delta} \tag{9}$$

ここで，$\boldsymbol{\delta}$ はクロネッカーのデルタである．偏差ファブリックテンソルの大きさが 0 であれば，微視構造が完全に等方的であることを表し，大きくなるほど異方性の度合いが大きくなる．



図–11 せん断に伴う微視構造の異方性



図–12 等方拘束圧による弾性ひずみ増分応答の変化

図–11 に経路 1〜3 のせん断載荷に伴う偏差ファブリックテンソルの大きさ $\sqrt{\boldsymbol{F}^d \cdot \boldsymbol{F}^d}$ の変化を示す．同図より，経路 3 の平均応力一定三軸伸張の経路で最も微視構造の異方性が大きいことがわかる．また，経路 1 と 2 の平均応力一定および側圧一定三軸圧縮経路においては，ほぼ微視構造変化は類似した傾向を示すことがわかる．

次節では，これらの載荷に伴う微視構造変化を念頭において，弾性ひずみ増分応答に関する考察を行う．

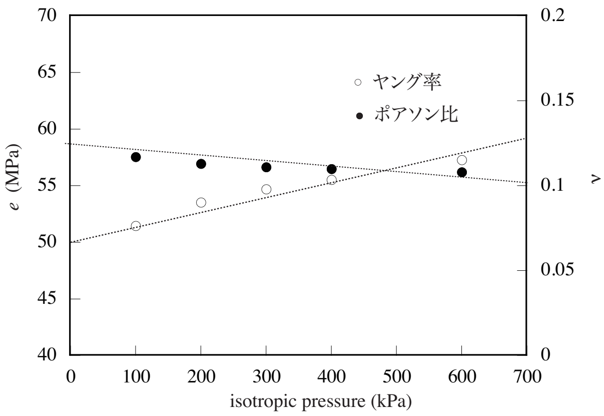
(3) 等方圧縮経路における弾性ひずみ増分応答

ここでは，まず，経路 0 の等方圧縮経路のいくつかの応力状態における応力プローブ試験結果より，粒状材料の弾性変形特性の拘束圧依存性を検討する．

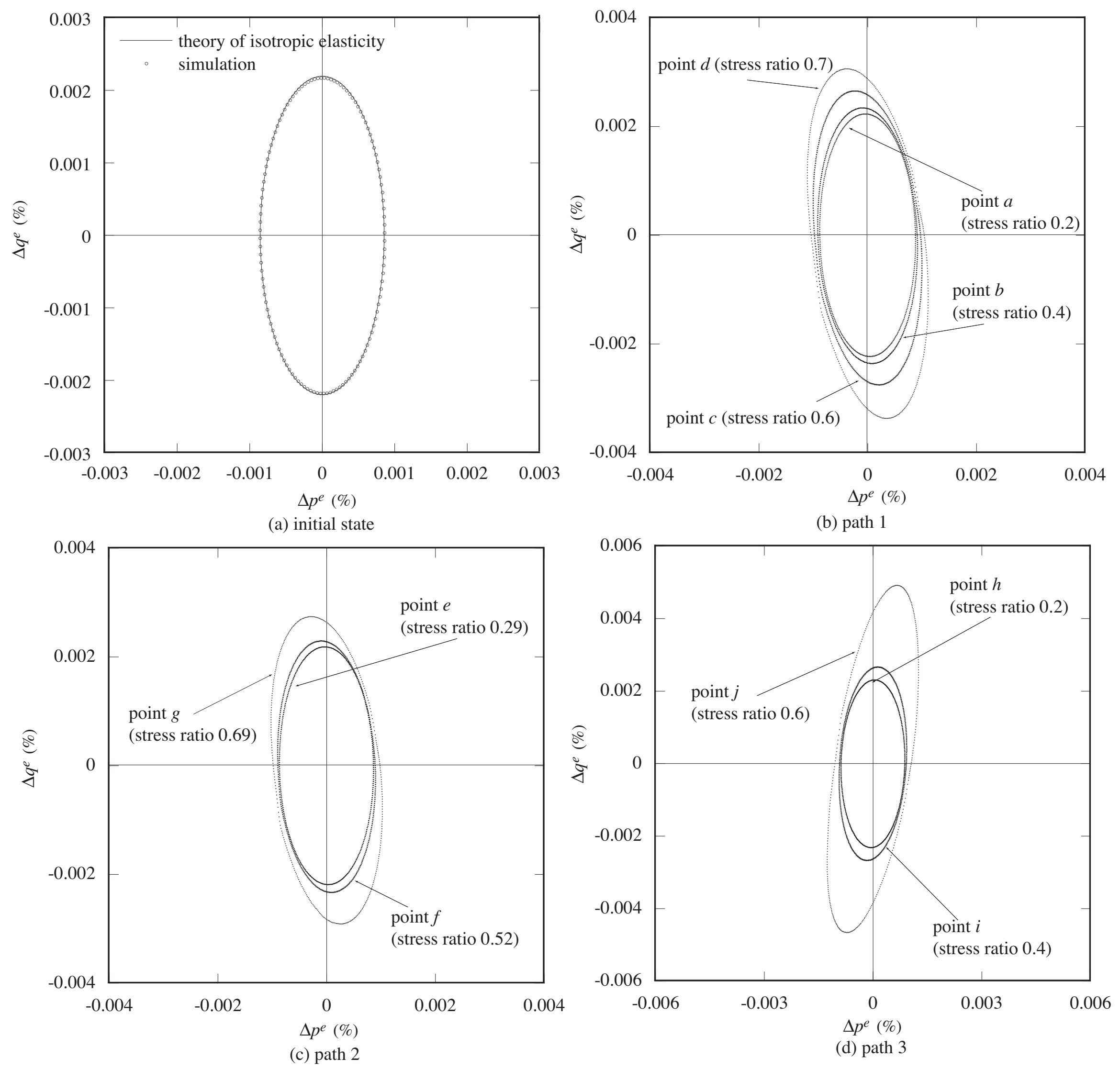
図–12 に，等方拘束圧 100kPa, 200kPa, 300kPa, 400kPa, 500kPa, 600kPa における応力プローブ試験の結果から得られた弾性ひずみ増分応答を示す．弾性ひずみ増分応答は，前章と同様に $\Delta p^e - \Delta q^e$ 空間上に示した．同図より，等方応力状態においては $\Delta p^e - \Delta q^e$

空間上に示した弾性ひずみ増分応答が，長軸が縦軸方向，短軸が横軸方向の楕円形となる．つまり，等方応力状態においては粒状材料の弾性ひずみ増分は等方弾性体の構成式で表すことができると言える．前節で示したファブリックテンソルで表される微視構造は，等方応力状態の場合にはほぼ等方的になっており，等方的な微視構造の場合には弾性ひずみ増分応答も等方的になることが予測される．また，等方応力が大きくなるにしたがって，楕円形が若干小さくなっていることがわかる．このことは，拘束圧の大きさに依存して硬くなっていることを表している．

次に，数値実験結果を基に各拘束圧の場合において前章と同様にしてヤング率とポアソン比を算出した．**図–13** に拘束圧の大きさとヤング率およびポアソン比の関係を示した．同図より，拘束圧が大きくなるとヤング率は若干大きくなり，ポアソン比は若干小さくなることがわかる．したがって，粒状集合体の弾性変形特性は拘束圧に依存して変化し，拘束圧が大きくなるほど硬くなると言える．また，同図より，ヤング率およびポアソン比は拘束圧とほぼ線形関係にある．



図–13 等方拘束圧と弾性定数の関係



図–14 せん断載荷に伴う弾性ひずみ増分応答の変化 (p-q 面)

(4) 種々の応力条件下における弾性ひずみ増分応答

ここでは，種々のせん断応力条件下における弾性ひずみ増分応答を検討する．

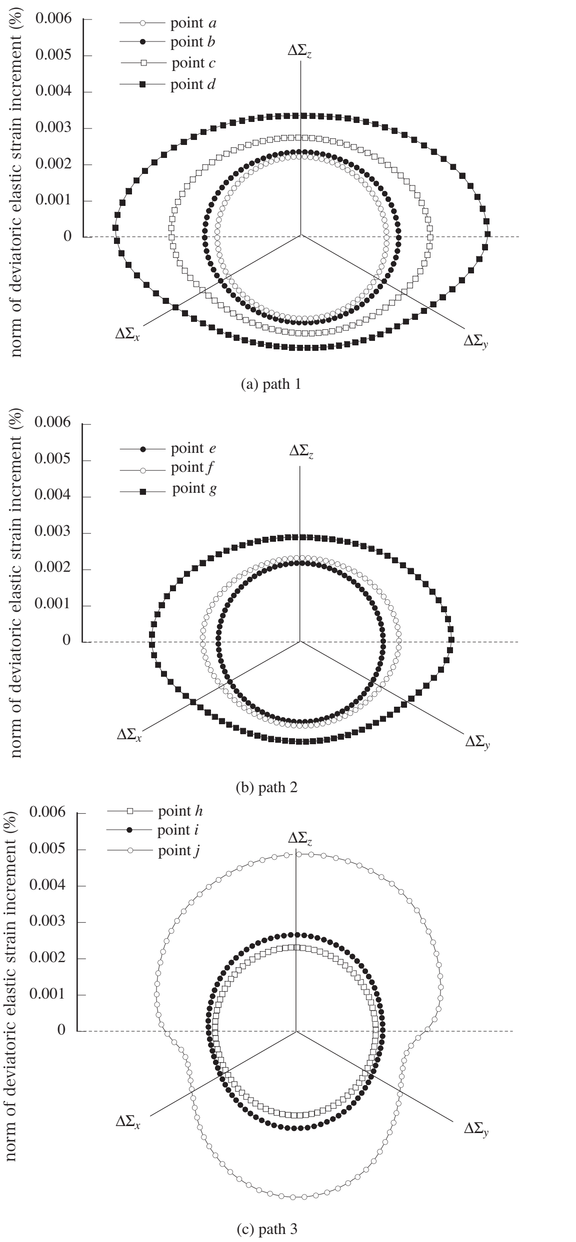
まず，載荷経路 1, 2, 3 のプローブ試験点 a〜j において行った $p-q$ 面における応力プローブ試験の結果得られた弾性ひずみ増分応答を**図–14** に示す．同図 (a) には初期等方応力状態 100kPa の時の結果を比較のため等方弾性体を仮定して計算した場合と併せて示した．同図 (b), (c), (d) は，それぞれ，経路 1, 2, 3 の場合の解析結果である．同図 (b) より，平均応力一定三軸圧縮経路におけるせん断載荷が進展すると，徐々に弾性応答の異方性が大きくなり，等方弾性体の構成式では表現できないことがわかる．また，同図 (c) より，側圧一定三軸圧縮である経路 2 においても，せん断載荷が進むと異方的な弾性応答を示すことがわかる．また，経路 2 においても，経路 1 の場合とほぼ同様の誘導異方性を示している．さらに，側圧一定三軸伸張試験を模擬した経路 3 の場合には，ある応力比を超えると弾性ひずみ増分が急激に大きくなっている．また，経路 1, 2 の場合よりも弾性ひずみ増分応答の初期等方状態における応答とのずれが顕著に表れている．**図–11** に示したように，微視構造の異方性については，経路 1, 2 においては類似しており，経路 3 の場合が最も大きいことから，弾性変形特性の誘導異方性が微視構造の変化に起因するものと推測される．

載荷経路 1, 2, 3 のプローブ試験点 a〜j において行った π 平面における応力プローブ試験の結果得られた弾性ひずみ増分応答を**図–15** に示す．同図は，弾性ひずみ増分テンソルの偏差成分の大きさを応力増分方向に対応させて π 平面上に示したものである．なお，等方弾性体を仮定した場合には同様の表示においては弾性ひずみ増分応答は円形となって現れる．同図より，$p-q$ 面内での応力プローブ試験結果と同様に，どの経路においてもせん断が進展するのに伴い弾性ひずみ増分応答が異方的になることがわかる．また，異方性の現れ方は，経路 1 と 2 においては類似しているが，経路 3 では大きく異なる．他の経路と比較して微視的内部構造がより異方的に発達する経路 3 においては，ある応力状態を越えると非常に異方的となり，等方弾性体では全く表現不可能な弾性ひずみ増分応答が現れている．

ここでは，種々の応力状態における弾性ひずみ増分応答について検討した．粒状材料の弾性構成式として平均応力 p に依存した構成式が種々検討されているが，本解析の結果，弾性増分応答は q によっても大きく変化することがわかった．

4. おわりに

本研究では，粒状材料の弾性変形特性について考察・検討するために粒状体マルチスケール解析における微視スケール解析を用いて数値実験を行った．具体的には，粒子の弾性特性と集合体の弾性特性の関係，種々の応力状態における弾性挙動について述べた．以下，本研究で得られた結論を整理して示す．



図–15 せん断載荷に伴う弾性ひずみ増分応答の変化 (π 平面)

1. 粒子間のバネ剛性の大きさが大きくなると集合体のヤング率も大きくなり，両対数グラフで直線の関係にある．バネ剛性の大きさが変化しても集合体のポアソン比はほとんど変化しない．
2. 粒子間のバネ剛性比が 0.6 以上であればヤング率はほぼ一定であるが，0.5 以下になると急激に減少する．バネ剛性比が減少するとポアソン比は大きくなる．また，バネ剛性比が 0.1〜0.8 であればほぼ妥当な集合体のポアソン比の値となる．
3. 等方応力状態における弾性ひずみ増分応答は等方

ほぼ線形の関係となる．

線形弾性体で表現可能であるが，ヤング率およびポアソン比は等方応力の大きさに依存し，これとほぼ線形の関係となる．

4. せん断載荷が進展すると弾性ひずみ増分応答は異方的となり，等方弾性体の構成式では表現できない．
5. 弾性応答の誘導異方性は微視構造変化に起因すると考えられ，微視構造を表すファブリックテンソルを弾性マトリックスに導入することで表現可能と考えられる．

また，今後の課題として，提案されている種々の弾性構成式と比較・検討した議論が必要である．また，初期異方性を有する粒子集合材料の弾性特性や誘導異方性を含む粒状材料の弾性構成式の定式化等が挙げられる．なお，後者に関しては微視的内部構造の誘導異方性を合理的に取り込む必要があり，まず，多くの数値実験により微視的内部構造変化に関する情報を収集することが重要であると考えられる．

参考文献

1) Kolymbas, D. ed.: *Constitutive Modelling of Granular Materials*, Springer-Verlag, New York, 2000.
2) Bauer, E.: Analysis of Shear band bifurcation with a hypoplastic model for a pressure and density sensitive granular materials, *Mechanics of Materials*, Vol. 31, pp. 597–609, 1999.
3) Chang, C. S., Chang, Y. and Kabir, G.: Micromechanics modeling for stress-strain behavior of granular soils. I: Theory, *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol. 118, pp. 1959–1974, 1992.
4) Emeriault, F., Cambou, B. and Mahboubi, A.: Homogenization for Granular Materials: Non Reversible Behavior, *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, Vol. 1, pp. 199–218, 1996.
5) Nemat-Nasser, S.: A micromechanically-based constitutive model for frictional deformation of granular materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 48, pp.1541–1563, 2000.
6) Sekiguchi, H. and Ohta, H.: Induced anisotropy and time dependency in clays, *Constitutive Equations of Soils*, Spec. Session 9, 9th ICSMFE, Tokyo, pp. 229–238, 1977.
7) Asaoka, A., Nakano, M., Noda, T.: Superloading yield surface concept for highly structured soil behavior, *Soils and Foundations*, Vol. 40, No. 2, pp.99–110, 2000.
8) Tsutsumi, S. and Hashiguchi, K.: General non-proportional loading behavior of soils, *International Journal of Plasticity*, Vol. 21, No. 10, pp. 1941-1969, 2005.
9) 檜尾正也，中井照夫，星川拓哉，三輪時弘：修正応力 t_{ij} を用いた弾性式，第 32 回地盤工学研究発表会講演概要集, pp. 461–462, 1997.
10) Bardet, J. P. : Numerical simulations of the incremental responses of idealized granular materials, *Int. J. Plasticity*, Vol. 10, No. 8, pp.879–908, 1994.
11) Kishino, Y., Akaizawa, H. and Kaneko, K. : On the plastic flow of materials, *Powders and Grains 2001*, pp.199–202, 2001.
12) Cheng, Y. P., Bolton, M. D. and Nakata, Y.: Crushing and plastic deformation of soils simulated using DEM, *Géotechnique*, Vol. 54, No.2, pp. 131–141, 2004.
13) 金子賢治，寺田賢二郎，京谷孝史，岸野佑次: 非線形均質化理論に基づく粒状体マルチスケール解析法の開発とその応用, 土木学会論文集, No. 680/III-55, pp. 183–199, 2001.
14) Kaneko, K., Terada, K., Kyoya, T. and Kishino, Y.: Global-local analysis of granular media in quasi-static equilibrium, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 40, pp.4043–4069, 2003.
15) 金子賢治，豊島一也，熊谷浩二：均質化理論に基づく粒状体マルチスケール解析法の平面ひずみ問題への拡張，第 50 回地盤工学シンポジウム論文集，pp.183–190，2005.
16) 金子賢治・堤成一郎・高嶋孝征・熊谷浩二：マルチスケールモデリングに基づく粒状体の負荷面の評価，土木学会論文集 C, **62**, No. 3, 667–678, 2006.
17) Kaneko, K., Tsutsumi, S., Aizawa, R., Kumagai, K. and Kishino, Y. : Failure surface of granular materials predicted by global-local computations, *Proc. of the International Symposium on Geomechanics and Geotechnics of Particulate Media*, pp. 205–209, 2006.
18) Tsutsumi, S., Kaneko, K., Toyosada, M., Hashiguchi, K. and Kishino, Y.: Non-coaxial constitutive response of idealized 3D granular assemblies to rotation of principal stress axes, *Journal of Applied Mechanics*, JSCE, **8**, 565–571, 2005.
19) Tsutsumi, S. and Kaneko, K.: Constitutive response of idealized granular media under the principal stress axes rotation, *Int. J. Plasticity*, Vol.24, Issue 11, pp. 1967–1989, 2008.
20) Sanchez-Palencia, E.: *Non-homogeneous Media and Vibration Theory*, Lecture Notes in Physics 127, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
21) Lions, J. L.: *Some Methods in the Mathematical Analysis of Systems and Their Control*, Science Press, Beijing, China, 1981.
22) 岸野佑次：新しいシミュレーション法を用いた粒状体の準静的挙動の解析，土木学会論文集，No. 406/III-11, pp. 97–116, 1989.
23) 石井建樹，金子賢治，岸野佑次：真三軸応力プローブに対する粒状体の増分非線形応答について，応用力学論文集，JSCE，Vol. 5，pp.451–460，2002.
24) 寺田賢二郎，菊地昇：非均質弾塑性体のマルチスケール解析のための一般化アルゴリズム，土木学会論文集，No. 633/I-49, pp. 217–229, 1999.
25) Allaire, G.: Homogenization and Two-Scale Convergence, *SIAM J. Math. Anal.*, Vol. 23, pp. 1482–1518, 1992.
26) Cundall, P. A. and Strack, O. D. L.: A discrete numerical model for granular assemblies.
27) Japanese Domestic Committee on TC35: Technical Report, Japanese Domestic Committee on Geotechnics of Particulate Media, JGS, 2005.
28) Oda, M. and Iwashita, K. ed.: *Mechanics of Granular Materials*, A.A. Balkema, 1999.
29) 佐武正雄：地盤と土の異方性，土と基礎，Vol. 32, No.9, pp. 5–12, 1984.

(2010 年 3 月 9 日 受付)