

せん断強度低減法の数理的性質に関する検討

A study on shear strength reduction method from the point of mathematics and mechanics

小林俊一*・西木佑輔**・下南貴史***・松本樹典****

Shun-ichi Kobayashi, Yusuke Nishiki, Takashi Shimominami and Tatsunori Matsumoto

*正会員 博士(工学) 金沢大学助教 理工研究域環境デザイン学系(〒920-1192 石川県金沢市角間町)

**非会員 修士(工学) 元 金沢大学大学院生 自然科学研究科

***非会員 金沢大学大学院生 自然科学研究科

****正会員 工博 金沢大学教授 理工研究域環境デザイン学系

せん断強度低減法は斜面安定問題や支持力問題の全体安全率を評価する方法として知られている。しかしながら、数理的な視点からせん断強度低減法の性質を議論した研究例は見当たらない。そこで、本論文ではせん断強度低減法について、最適化問題の観点から検討を加えた。その結果、荷重が比例荷重で与えられる場合、摩擦性(内部摩擦角が0でない)材料では、基準荷重の大きさによって全体安全率と終局限界荷重の関係が非線形となり、基準荷重が安全側の場合は控えめな結果を、基準荷重を終局限界荷重以上とする場合は危険側の結果を与えることを示した。さらに、極限解析法とせん断強度低減法の比較を行い、荷重係数とせん断強度低減率の類似性と相違点について検討した。

Key Words : shear strength reduction method, optimization, limit analysis, factor of safety

1. はじめに

地盤工学における斜面安定問題や基礎の支持力問題においては、斜面や基礎の崩壊時に作用する外力を評価することが最も重要であり、これを具体的に評価するさまざまな解析法が提案されてきた。それらは大まかに以下のように分類される。

- 剛塑性力学の枠組みで評価するもの
- 弾塑性力学の枠組みで評価するもの

このうち、せん断強度低減法(Shear Strength Reduction Method)は弾塑性力学の枠組みで斜面等の安全率を評価する方法である。ここで言う安全率とは以下のように定義される。

ある弾塑性境界値問題において、所定の一定外力(物体力および表面力)が作用している状態を考える。このとき、釣合系を満足し、しかもせん断応力が「地盤のせん断強度 τ を定数 F で除した仮想的なせん断強度 τ_F 」を上回らないような応力場が存在すれば、この弾塑性境界値問題の安全率を F であると定義する。仮想的なせん断強度 τ_F は以下のように表せる。

$$\tau_F = \frac{c'}{F} + \sigma' \frac{\tan \phi'}{F}, \quad (1)$$

ここに c' 、 ϕ' は土の見かけの粘着力と内部摩擦角であり、 σ' は直応力(ただし圧縮を正とする)である。

このせん断強度低減法のアイデアを実装した弾塑性有限要素法は、Zienkiewicz et al.¹⁾に遡るが、実務上使用される各種斜面安定解析法との比較によって全体安全率の精度や計算法の適用性を具体的に議論したのは鶴飼である^{2),3)}。また、Duncan-Changの応力ひずみ関係にせん断強度低減法を組み込んだ有限要素解析もMatsui & San⁴⁾によって提案されている。その後、いろいろな種類の例題を取り上げてせん断強度低減法の有効性を検討した研究⁵⁾が行われる等、せん断強度低

減法を実装した有限要素法に関する数値実験例はすでに数多く発表されている。同様に、せん断強度低減法を実装した有限差分法による議論はDawson et al.⁶⁾によって行われている。これらの研究では、せん断強度低減法を実務に展開するための基礎的な情報を得ることに主眼がおかれており、異なる数値解析手法を用いた複数の結果を比較することによってその有用性を議論し、従来の極限平衡法に代わって実務的に利用可能であることを明らかにしている。

その一方で、最適化問題の観点から、せん断強度低減法の理論的な構造について議論した研究例は見当たらない。著者らはこれまで剛塑性力学の枠組みで、極限解析法の数理的な構造の分析と数値解法の開発を行ってきた⁷⁾。本論文では、これら極限解析法について得られた知見に基づき、新たにせん断強度低減法の数理的な構造を分析し、得られる解の性質を検討する。

さらに、今後は性能設計法の本格的な導入とともに、複数の異なる性能照査法で構造物の性能を照査する機会も増加すると思われる。このような場合、エンジニアリングとして重要なことは、複数の異なる性能照査法が与える解の性質や、それら相互の関係を把握しておくことである。このような観点から、本論文ではせん断強度低減法と極限解析法の比較を行い、これらの方法の関係を終局限界荷重を評価する観点から議論した。

2. せん断強度低減法の数理構造

2.1 各種安定解析法の分類

まず、斜面安定問題や支持力問題に適用される各種解析手法について、簡単に分類を行い、その力学的な性質についてまとめておく。

剛塑性力学の枠組みで評価する方法としては、以下の3つが代表的である。

極限解析法

極限定理に基づいて、崩壊時の荷重とモードを評価する方法。静力学条件から崩壊荷重を評価する下界法と運動学条件から崩壊荷重を評価する上界法があり、得られる崩壊荷重は下界法の解 \leq 正解値 \leq 上界法の解となる。

特性曲線法

釣合条件と破壊条件を用いて、応力場の特性方向を求め、静的許容な応力場（とそれに対応する崩壊荷重およびモード）を求める解法。塑性域での応力場のみを検討した解は不完全解と呼ばれる。もし剛体域への応力場の拡張を行い、釣合条件と破壊条件を対象領域全てで満足していることが確認できれば、その解は下界に属する解である。また、しばしば正解と一致する精度の高い解が得られる。主に2次元問題について用いられる。

極限平衡法

任意の破壊形状に対して、破壊面（すべり面）での破壊条件と、崩壊する土塊の釣合を考慮して崩壊時の荷重とモードを評価する方法。一見すると下界法のようにも見えるが、土塊内部の応力状態が破壊条件を破らないことを検証していないため、得られる解が正解値を下回る保証はない。

一方、以下の3つは、弾塑性力学の枠組みで系の安定性を評価する方法である。

弾塑性 FEM 解析法

支配方程式の増分形を発展的に解き、系の挙動を逐次的に追いかけて評価していく方法。各増分方程式を解く際には、材料の塑性応答を考慮した弾塑性接線剛性マトリックスを用いる。さまざまな分野で最も広く用いられている解法。

せん断強度低減法

弾塑性 FEM 解析法を用いて、所定の外荷重に対する系全体の余裕度を評価する方法。せん断強度を定数 F で除して割り引いた強度に対して、弾塑性 FEM を実施し、計算が収束しなくなるような最大の F を求めることによって、系全体の余裕度を定量的に評価する。

Linear Matching Method

線形弾性 FEM を利用して弾塑性解が満たすべき応力場を繰返し計算で評価する方法。所定の外荷重に対する線形弾性応力解を求め、もし破壊条件を破る要素があれば、その剛性を順次低減させて再度、線形弾性応力解を求める。これを繰返し、最終的に外荷重と釣合い、しかも破壊条件を満足する応力場を求める^{8),9)}。

本研究では、せん断強度低減法を取り上げ、その数理的な構造と解の性質について議論する。せん断強度低減法は弾塑性力学の枠組みで評価する方法の1つとして分類している。これは、実際に数値計算を行う過程は、さまざまな定数 F について、材料のせん断強度を定数 F で除して割り引いた系に対して弾塑性解析法を行い、解が収束しなくなるような F を求める。つまり計算の収束性をもって、系の塑性状態を推定し、塑性崩壊状態に対応する定数 F を求めていることにはほかならない。

さて、塑性崩壊時に対応した物理量を用いて議論を行えば、その数理的構造や解の性質について有用な情

報が得られることが期待できる。下界法にに基づく許容応力場は、外荷重に対する線形弾性応力とゼロ外力に釣合う自己釣合応力の和で表現可能である¹⁾。塑性変形による強度パラメータの変化がない弾完全塑性体を取り上げれば、許容応力場に関する上記の表現は、弾塑性解析によって得られる応力場と同一となる。したがって、弾完全塑性体からなる系の許容応力場の議論を簡潔に行うために、下界法に基づく許容応力場の議論が援用できることが分かる。そこで、本論文では剛塑性力学の枠組みでせん断強度低減法の数理構造について調査を行う。

2.2 最適化問題としてのせん断強度低減法

(1) 対象とする問題

ここでは最適化問題の観点から、剛塑性境界値問題に属する最適化問題としてせん断強度低減法の定式化を行い、その数理的な構造について議論する。なお、以後の議論では、連続体で通常用いる定義に従って、応力やひずみは引張りを正にとる。

地盤は Drucker-Prager の破壊規準に従う剛完全塑性材料とする。固定境界条件（Dirichlet 境界条件） S_u 上では速度ゼロとし、荷重としては自重など一定の物体力に起因する荷重 Γ_c と、地震荷重など構造物に作用する環境外力 Γ_0 からなる。せん断強度の低減係数を m と表す。この低減係数は式 (1) の定数 F の逆数である。

さて、せん断強度低減法では、釣合式を満たし、破壊条件を破らない応力場のうち、せん断強度低減係数 m を最小にするようなものを求める最適化問題である。これを有限要素法によって離散化した形で表現すると以下のとおりである。

$$\text{Find } m \rightarrow \min \quad (2)$$

s.t.

$$\int_V B^T \sigma dV - \Gamma_0 - \Gamma_c - D_d^T p = 0 \quad (3)$$

$$f(\sigma, m) \leq 0 \quad (4)$$

ここに行列 B は有限要素法の B マトリクス、ベクトル σ は各積分点での応力を成分とするベクトル、行列 D_d は全節点の変位速度とディリクレ境界条件を対応付ける行列、ベクトル p はディリクレ境界条件での反力ベクトル、ベクトル Γ_c, Γ_0 はそれぞれ自重による一定荷重を表す荷重ベクトルと、外力による荷重ベクトルである。また、ベクトル f は各積分点での降伏関数値を成分として持つベクトルである。

(2) 降伏関数

Drucker-Prager モデルにせん断強度低減法を導入した降伏関数は以下の形で表せる。

$$f(\sigma, m) = m\alpha\sigma_m + \sqrt{J_2} - mc \quad (5)$$

ここに α, c は Drucker-Prager モデルの材料定数、 σ_m は平均応力、 J_2 は偏差応力テンソルの第2不変量である。

¹⁾ なお、この表現は弾塑性仮説と等価であることに注意されたい。つまり、自己釣合応力に弾性コンプライアンスを乗じた弾性ひずみと塑性変形によって生じる塑性ひずみの和が適合系を形成することを意味する。

(3) セン断強度低減法のラグランジアン

この最適化問題のラグランジアン L_R は以下のように書ける。

$$L_R = \begin{cases} -m + \kappa \cdot \left\{ \int_V B^T \sigma dV - \Gamma_0 - \Gamma_c - D_d^T p \right\} \\ \quad -\lambda \cdot f(\sigma, m) & \text{if } \lambda \geq 0 \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6)$$

ラグランジュ双対理論に従えば、主問題である強度低減係数 m の最小化問題は、スカラー量 $(-m)$ の最大化問題として、ラグランジアン L_R に関する以下の上限操作および下限操作より得られる。

$$\inf_{m, \sigma, p} \left\{ \sup_{\kappa, \lambda} L_R \right\}$$

具体的には以下の最適化問題が得られる。

$$\begin{aligned} & \text{Find} \quad -m \rightarrow \max \\ & \text{s.t.} \quad \begin{cases} \int_V B^T \sigma dV - \Gamma_0 - \Gamma_c - D_d^T p \\ f(\sigma, m) \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

一方、対応する双対問題は、上限操作と下限操作の順序を入れ替えることにより導出でき、具体的に以下の最適化問題として書ける。

$$\begin{aligned} & \inf_{\kappa, \lambda} \left\{ \sup_{m, \sigma, p} L_R \right\} = 0 \\ & \inf_{\kappa, \lambda} \left[\sup_{m, \sigma} \left\{ -m + \kappa \cdot \int_V B^T \sigma dV - \lambda \cdot f(m, \sigma) \right\} \right. \\ & \quad \left. - \kappa \cdot (\Gamma_0 + \Gamma_c) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{s.t. } D_d \kappa = 0 \quad (9)$$

降伏関数の非線形性のために、陽な形で双対問題の目的関数は表現できないが⁵、降伏関数 $f(m, \sigma)$ が十分に滑らかで微分可能であるとすれば、変数 m および σ の上限操作と等価となる、次の2つの変分の停留条件が得られる。

$$-1 - \lambda \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial m} \right) = 0 \quad (10)$$

$$\int_V B \kappa dV - \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \lambda = 0 \quad (11)$$

双対問題の目的関数値から主問題の目的関数値を差し引いた双対ギャップ \mathcal{G} を整理すると

$$\mathcal{G} = -\lambda \cdot f(\sigma, m) \geq 0 \quad (12)$$

となる。したがって、双対ギャップがゼロとなる相補性条件では、あらゆる積分点において降伏関数値 $f(\sigma, m) \leq 0$ とラグランジュ定数 $\lambda \geq 0$ の積が0となる。

この相補性条件を力学的に解釈すれば、各積分点での材料の変形状態が塑性、剛体、中立のいずれかの状態であることを示している。

塑性: 降伏関数値が $f = 0$ となる

剛体: ラグランジュ定数が $\lambda = 0$ となる

中立: 降伏関数値、ラグランジュ定数のいずれもが0となる

(4) KKT 条件

これらを総合すると、セン断強度低減法による最適解が満たすべき条件である KKT 条件は、以下のように書ける。

$$\int_V B^T \sigma^* dV - \Gamma_0 - \Gamma_c - D_d^T p^* = 0 \quad (13)$$

$$-\lambda^* \cdot f(\sigma^*, m^*) = 0, \quad f(\sigma^*, m^*) \leq 0, \quad \lambda^* \geq 0 \quad (14)$$

$$-1 - \lambda^* \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial m} \right)^* = 0 \quad (15)$$

$$\int_V B \kappa^* dV - \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^{*T} \lambda^* = 0 \quad (16)$$

(5) 正解による外部仕事率と内部消散率

正解の適合系 (κ^*, λ^*) と釣合系 (σ^*, m^*, p^*) を用いて、仮想仕事率の原理を考えれば、以下の式を得る。

$$\int_V \sigma^* \cdot B \kappa^* dV = (\Gamma_0 + \Gamma_c) \cdot \kappa^* \quad (17)$$

さらに (17) の左辺を関連流れ則と相補性条件を考慮して整理する。降伏関数 f の応力に関する偏導関数、および変数 m に関する偏導関数はそれぞれ

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{m\alpha}{3} \delta_{ij} + \frac{1}{2\sqrt{J_2}} s_{ij}$$

$$\frac{\partial f}{\partial m} = \alpha \sigma_m - c$$

であるので、各積分点において応力 σ^* と塑性ひずみ速度 $B \kappa^*$ の積は以下のようにまとめられる。

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^{p*} &= \sigma_{ij}^* \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right)^* \lambda^* \\ &= \left(\frac{m^* \alpha}{3} \delta_{ij} + \frac{s_{ij}}{2\sqrt{J_2}} \right)^* (s_{ij} + \sigma_m \delta_{ij})^* \lambda^* \\ &= (m^* \alpha \sigma_m + \sqrt{J_2})^* \lambda^* \\ &= m^* c \lambda^* \end{aligned} \quad (18)$$

従って、(17) の左辺は

$$\int_V \sigma^* \cdot B \kappa^* dV = m^* c \lambda^* \cdot e \quad (19)$$

と表せる。ここにベクトル e は成分数が積分点数と同じで、全ての成分が1となるベクトルである。ベクトル λ には、体積積分 $\int_V * dV$ を数値積分で評価するためのヤコビアンと重みが含まれているので、内積演算 $\lambda^* \cdot e$ は全ての要素に対して体積積分を行ったことに相当する。したがって、左辺は系全体での内部消散率を表している。

制約条件である式 (15) は以下のように書き換えられるので、

$$c(\lambda^* \cdot e) - \alpha(\lambda^* \cdot \sigma_m^*) = 1 \quad (20)$$

となる。したがって、この制約条件式は内部消散率の正規化とみなせる。圧縮応力場では $\sigma_m \leq 0$ となることに注意すれば、材料パラメータ α が大きくなるほど、内部消散率 $c(\lambda^* \cdot e)$ は小さくなる。

これらより、せん断強度低減係数 m^* と対応する安全率 F^* は

$$F^* = \frac{1}{m^*} = \frac{c \lambda^* \cdot e}{\Gamma_0 \cdot \kappa^* + \Gamma_c \cdot \kappa^*} = \frac{1 + \alpha(\sigma_m^* \cdot \lambda^*)}{\Gamma_0 \cdot \kappa^* + \Gamma_c \cdot \kappa^*} \quad (21)$$

となる。

2.3 極限解析法とせん断強度低減法の比較

(1) 極限解析法

せん断強度低減法で対象とした問題を極限解析法で解いてみる。我々の関心事は、対象とする系が保有する終局支持力である。これを解くために、荷重 Γ_0 に関する荷重係数 n の最大化問題を考える。せん断強度低減法と異なる点は、強度低減係数を一定値 $m = 1$ とする代わりに、外力 Γ_0 に関する荷重係数 n の最適化を図ることである。

ラグランジアン L_L を以下のように導入する。

$$L_L = \begin{cases} n + \kappa \cdot \left\{ \int_V B^T \sigma dV - n\Gamma_0 - \Gamma_c - D_d^T p \right\} \\ \quad - \lambda \cdot f(\sigma, 1) & \text{if } \lambda \geq 0 \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases} \quad (22)$$

このラグランジアン L_L について、ラグランジュ双対理論に従って上限操作、下限操作を行えば、最終的には以下の KKT 条件を得る。

$$\int_V B^T \sigma^* dV - n\Gamma_0 - \Gamma_c - D_d^T p^* = 0 \quad (23)$$

$$-\lambda^* \cdot f(\sigma^*, 1) = 0, \quad f(\sigma^*, 1) \leq 0, \quad \lambda^* \geq 0 \quad (24)$$

$$\kappa^* \cdot \Gamma_0 = 1 \quad (25)$$

$$\int_V B \kappa^* dV - \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^{*T} \lambda^* = 0 \quad (26)$$

上記の式はそれぞれ、釣合式、相補性条件、外部塑性仕事率の正規化、関連流れ則を意味している。またラグランジュ乗数の物理的な意味として、 κ は節点変位速度を、 λ は非負の塑性乗数を意味している。

適合系の解 (κ, λ) と釣合系の解 (σ, p, n) を用いて仮想仕事率の原理を適用すれば、最終的に以下の式を得る。

$$\begin{aligned} \dot{W}_{int} &= \dot{W}_{ext} \\ &= n\Gamma_0 \cdot \kappa + \Gamma_c \cdot \kappa \end{aligned} \quad (27)$$

ここに内部消散率 \dot{W}_{int} は以下のとおりである。

$$\begin{aligned} \dot{W}_{int} &= \int_V \sigma^* \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^{*T} \lambda^* dV \\ &= c \lambda \cdot e \end{aligned} \quad (28)$$

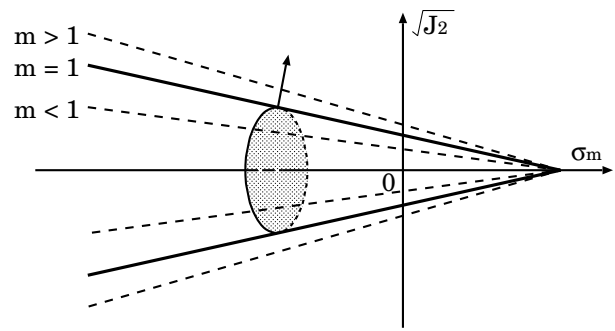


図-1 せん断強度低減率 m と降伏曲面形状 (Drucker-Prager モデル)

極限解析法の場合は、材料強度パラメータ α が一定で、関連流れ則に従う塑性ひずみ速度方向自体は変化しないので、内部消散率は材料パラメータ c に比例する。

これらより荷重係数 n は以下のように計算できる。

$$n = \frac{c \lambda^* \cdot e - \Gamma_c \cdot \kappa^*}{\Gamma_0 \cdot \kappa^*} \quad (29)$$

(2) 極限解析法とせん断強度低減法の比較

まず荷重 Γ_0 が終局限界荷重である場合を考えよう。このとき荷重係数は $n = 1$ 、せん断強度低減係数は $m = 1$ となる。このとき、せん断強度低減法および極限解析法が満たすべき KKT 条件を考えれば、両者の解はいずれも同じ釣合式、相補性条件および関連流れ則を満足していることが分かる。相違点は外部仕事率あるいは内部消散率の正規化であるが、これは $m = 1$ においては外部仕事率および内部消散率が速度場に関する 1 次斉次性を示すことから本質的ではない。したがって、いずれの方法でも同じ終局限界荷重を得る。

次に安全率を計算する式 (21) と、荷重係数を計算する式 (29) を比較検討しよう。これらはよく似た形式で表現できることが分かるが、詳しく見れば以下の点が異なる。荷重係数については、分子、分母ともに速度 κ^* と荷重係数 λ の 1 次項で表現できており、速度に関する 1 次斉次性が成り立っていることが分かる。これに対して、安全率については、内部消散率の正規化に関する制約条件を考慮すれば、速度に関する 1 次斉次性が成り立っていないことが分かる。これは、図-1 に示すように、せん断強度低減係数 m が変化すると、関連流れ則のためにダイレイタンシー特性も変化するので、基準となる荷重の取り方によって安全率が変化する可能性があることを示唆している。以下では、さらに具体的にこの性質について検討する。

議論を簡単にするため、荷重が原点 0 から比例荷重を受ける場合に、せん断強度低減係数 m や荷重係数 n がどのように評価されるのか考えてみる。比例荷重であるので、一定荷重項は $\Gamma_c = 0$ となり、荷重は Γ_0 のスカラー倍で表せる。

ある基準荷重 Γ_0 に対するせん断強度低減法による解を上添字 $*$ のついた量で表すことにする。せん断強度低減係数が m^* に対応する許容な応力場を σ^* と表す。この許容な応力場は、全ての積分点で以下の不等式を

パラメータ α	$m^* < 1$	$m^* = 1$	$m^* > 1$
$\alpha > 0$	$\bar{m} < 1$	$\bar{m} = 1$	$\bar{m} > 1$
$\alpha = 0$	$\bar{m} = 1$	$\bar{m} = 1$	$\bar{m} = 1$

m^* : 基準荷重 Γ_0 に対するせん断強度低減係数
 \bar{m} : 荷重 $\bar{\Gamma} = \Gamma_0/m^*$ に対するせん断強度低減係数

満足する。

$$f(\sigma^*, m^*) = m^* \alpha \sigma_m^* + \sqrt{J_2^* - m^* c} \leq 0 \quad (30)$$

つぎに基準となる荷重を $\bar{\Gamma} = \Gamma_0/m^*$ としたときの静力学的な条件について考える。極限解析法であれば、外力 Γ_0 に対する荷重係数が n^* であれば、外力 $\bar{\Gamma}_0 = n^* \Gamma_0$ に対する荷重係数は $\bar{n} = 1$ となる。これに対して、せん断強度低減法はどのような解を与えるかを検討する。

釣合式の線形性より、少なくとも応力場 $\bar{\sigma} = \sigma^*/m^*$ は釣合式を満たす。この応力を使って、荷重 $\bar{\Gamma}_0$ に対する荷重低減率を $\bar{m} = 1$ と仮定して降伏関数値 $f(\bar{\sigma}, 1)$ を計算すると

$$\begin{aligned} f(\bar{\sigma}, 1) &= \alpha \frac{\sigma_m^*}{m^*} - \frac{1}{m^*} \sqrt{J_2^* - c} \\ &= \frac{1}{m^*} \left(m^* \alpha \sigma_m^* + \sqrt{J_2^* - m^* c} \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{m^*} - 1 \right) \alpha \sigma_m^* \\ &\leq \left(\frac{1}{m^*} - 1 \right) \alpha \sigma_m^* \end{aligned} \quad (31)$$

となる。

ここで圧縮応力場では $\sigma_m^* \leq 0$ となることに注意すると、少なくともせん断強度低減率が $m^* < 1$ であれば、あらゆる積分点で降伏関数値が負あるいはゼロとなるので、応力場 $\bar{\sigma} = \sigma^*/m^*$ は降伏曲面 f の内部にあることが分かる。これは、応力場 $\bar{\sigma}$ が少なくとも安全側の応力場であることを意味する。したがって、実際のせん断強度低減率 \bar{m} は、 $\bar{m} \leq 1$ となることが分かる。

逆に $m^* > 1$ であれば、降伏関数値は正となる可能性がある。ただし、今回チェックした応力場は $\bar{\sigma} = \sigma^*/m^*$ だけであり、外力 $\bar{\Gamma}$ と釣合う全ての応力場について降伏関数値を検討した訳ではない。

また、材料定数 α がゼロとなる場合は、平均応力 σ_m の変化によるせん断強度の変化がない。従って、せん断強度低減率 m^* がどのような値であっても、荷重 $\bar{\Gamma} = \Gamma_0/m^*$ に対するせん断強度低減率は $\bar{m} = 1$ となる。

これらをまとめると表-1 に示す結果が得られる。基準荷重 Γ_0 に対するせん断強度低減係数 m^* と 1 の大小関係によって、荷重 $\bar{\Gamma} = \Gamma_0/m^*$ に対するせん断強度低減係数 \bar{m} は異なる。荷重 Γ_0 に対して安全側つまり $m^* < 1$ の場合は、荷重 $\bar{\Gamma}$ に対しても安全側 $\bar{m} < 1$ の結果が得られるが、危険側 $m^* > 1$ の場合には荷重 $\bar{\Gamma}$ に対しても危険側 $\bar{m} > 1$ となる。また、材料定数 α がゼロの場合には、荷重 Γ_0 に対するせん断強度低減率 m^* の大きさに関わらず、 $\bar{m} = 1$ となる。

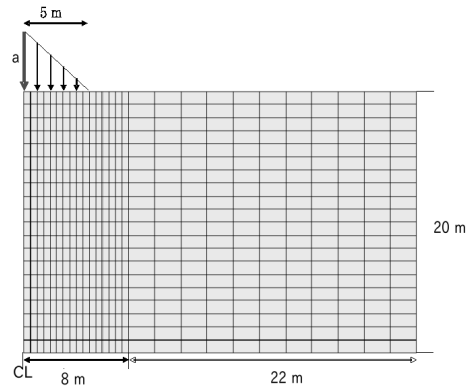


図-2 数値解析に用いたメッシュ図

なお、本論文で想定している材料は弾完全塑性材料で、材料強度は荷重経路に依存しないことを強調したい。このような材料からなる系の場合、せん断強度低減法も凸計画問題として定式化できるため、崩壊荷重は一意に決まる。一方、実際問題として、せん断強度低減法の数値計算を行う場合には、あるせん断強度低減係数に対して求めた応力場を、せん断強度低減係数を変化させた次のステップの計算において初期応力場として利用することがある。このような場合に注意したいことは、計算での荷重経路が釣合系かつ降伏条件を破らないような実行可能な内点条件²を満たしていることを保証しておくことである。荷重原点からの比例載荷を行えば、内点条件を満たすことは容易である。一方、塑性硬化や軟化に伴う強度変化が生じる材料の場合は、経路に依存した崩壊荷重が現れる可能性があることに注意されたい。

さて、ここでは Drucker-Prager の破壊規準を用いた説明を行ったが、平均応力 σ_m がせん断強度と関係する破壊規準に従う材料、例えば Mohr-Coulomb の破壊規準に従う剛完全塑性材料でも、同様の議論が成立する。

さらに、このせん断強度低減係数の議論は静力学的な条件についてのみ考慮していることにも注意する必要がある。つまり、解の一意性や最適性はともかく、流れ則が関連流れ則なのか非関連流れ則なのかには依らず、不等式 (31) は成立する。したがって、表-1 に示す解の性質は非関連流れ則の場合でも同様に成り立つと考えられる。

3. 数値実験による検証

前節では、せん断強度低減法による安全率 $F = 1/m$ は、比例載荷の場合には表-1 の特性をもつ指標であることを理論的に説明した。これを数値実験によって確認する。

対象とする問題は、自重のない弾完全塑性モール・クーロン地盤に表面載荷を行う 2 次元支持力問題である。自重がないという仮定のために、この支持力問題は

² ここで言う内点とは、後出の図-7 中に示すような $m = \text{const.}$ Line の内側 (原点側) の応力状態を意味する。(同図では $m = 1$ Line のケースの一部分だけが図示されている。)

せん断剛性率	3.5×10^5 (kPa)
ポアソン比	0.3
密度	0 (ton/m ³)
粘着力	8.82 (kPa)
内部摩擦角	0°, 15°

比例载荷条件を満たしている。解析に用いたメッシュを図-2に示す。境界条件は側方はスライダー、底面は固定境界条件とした。数値実験では有限差分法解析コードFLACを使用した。数値解析に用いたパラメータを表-2に示す。地盤の弾性定数は、具体的な対象物を想定した値ではなく、標準的な値の例として用いた。

表-3 計算されたせん断強度低減係数 m (関連流れ則)

	せん断強度低減係数 m	
	$\phi = 0^\circ$	$\phi = 15^\circ$
m^*	0.098 ($a = 1$)	0.089 ($a = 1$)
\bar{m}	1.0 ($a = 10.21$)	0.61 ($a = 11.21$)
m^*	1.27 ($a = 13$)	1.22 ($a = 40$)
\bar{m}	1.01 ($a = 10.3$)	1.11 ($a = 32.8$)

a の単位は kN/m

表-4 計算されたせん断強度低減係数 m (非関連流れ則)

	せん断強度低減係数 m	
	$\phi = 0^\circ$	$\phi = 15^\circ$
m^*	0.098 ($a = 1$)	0.089 ($a = 1$)
\bar{m}	1.0 ($a = 10.21$)	0.61 ($a = 11.21$)
m^*	1.27 ($a = 13$)	1.22 ($a = 40$)
\bar{m}	1.01 ($a = 10.3$)	1.11 ($a = 32.8$)

a の単位は kN/m

解析方法としては、まず基準荷重 Γ_0 は地盤表面に与え、せん断強度低減法によりせん断強度低減係数 m^* を計算する。基準荷重は載荷幅 10 (m)、三角形頂点での荷重値が a の鉛直下向き三角形分布荷重である。

つぎに、基準荷重をせん断強度低減係数 m^* で除した荷重 $\bar{\Gamma} = \Gamma_0/m^*$ に対して、せん断強度低減法によりせん断強度低減係数 \bar{m} を計算する。関連流れ則を仮定した場合のせん断強度低減係数 m を表-3にまとめる。同様の解析をダイレイタンシー角 $\psi = 0^\circ$ の非関連流れ則を仮定した場合についても実施し、その解析結果を表-4に示す。FLACによる解析では、両者の結果は一

致し、理論的な検討と同様の傾向を示している。

この理由として、本解析が自重ゼロの場合の解析であるので、支持力係数 N_c に対応した支持力が得られているためであると考えられる。また、浅い基礎の支持力問題では、塑性領域が周辺の弾性領域から受ける変位拘束条件が弱いので、ダイレイタンシー挙動の違いによる平均応力 σ_m の変化は支持力に影響を及ぼさなかったと理解できる。さらに、せん断強度低減法の定式化からも分かるように、せん断強度低減係数は直接的には静力学的な検討によって評価されている。少なくとも応力の立場から見れば同じ降伏関数を用いているので、同じ極限荷重を示すことは下界法の立場からも理解できる。

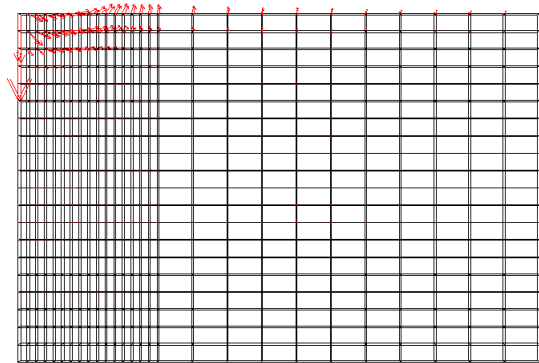


図-3 弾塑性解析による変位場 (関連流れ則 $\phi = 15^\circ, m^* = 0.089$)

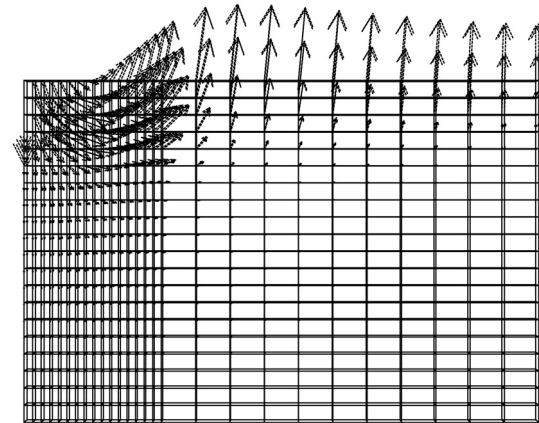


図-4 弾塑性解析による変位場 (関連流れ則 $\phi = 15^\circ, m^* = 1.22$)

さらに、表-3 および表-4 によると、計算されたせん断強度低減率 m は理論的な検討と同様の傾向を示していることが分かる。つまり、内部摩擦角が $\phi \neq 0^\circ$ の場合、表の上段に示すように基準荷重が安全側であれば、得られる安全率 $F = 1/m$ は実際の崩壊荷重よりもより安全側の評価となっている。逆に表の下段に示すように基準荷重が危険側であれば、得られる安全率は実

際の崩壊荷重よりも危険側の評価を与えている。一方、内部摩擦角がゼロの場合には、基準荷重の大きさによらず $\bar{m} \approx 1$ が成立しており、崩壊荷重時の a は安全率 $F = 1/m$ と基準荷重時の a の積の形で表せる。

一方、支持力係数 N_γ に関する議論は、自重を考慮した条件で解析すべきものである。このような载荷条件は比例载荷ではないために表-1 に示す性質が成立しない。支持力係数 N_γ を含む非比例载荷に対する議論は次節にて行う。

さらに、解析結果によって得られた変形場についても確認しておこう。

関連流れ則の解析シリーズで得られた変位場として、図-3 および図-4 を示す。図-3 は基準荷重 Γ_0 が安全側の例であり、一方、図-4 は基準荷重 Γ_0 が危険側の例である。図中の矢印は節点変位を表し、変位の縮尺については、全体の変形モードが分かりやすいような値を適宜採用した³。これらの図から、関連流れ則に従う場合は、せん断強度低減係数の変化によってダイレイタンシー挙動も影響を受けるため、せん断強度低減係数 m が大きくなるほど大きな塑性体積膨張を示す。また、地盤内の塑性領域も、せん断強度低減係数 m の増加に伴って拡大するため、すべり線位置などの塑性崩壊モードに関する幾何学的な情報も変化している。とりわけ、今回の解析では自重を無視しているため、地盤内の塑性領域がかなり側方に広がるため、せん断強度低減係数 m によって塑性崩壊モードの幾何形状が変化する傾向が顕著に見られる。

一方、非関連流れ則の解析シリーズで得られた変位場として、図-5 および図-6 を示す。図-5 は基準荷重 Γ_0 が安全側の例であり、一方、図-6 は基準荷重が危険側の例である。変位の縮尺が異なるために少し分かりにくいのが、これらの図からせん断強度低減係数 m によらず同一の変形モードを示していることが読み取れる。これは、非関連流れ則の場合、ダイレイタンシー挙動がせん断強度低減係数 m にはよらないためである。

このように関連流れ則と非関連流れ則による変形モードは大きく異なる。しかしながら、自重を無視した解析では、せん断強度低減係数 m 、あるいは安全率 $F = 1/m$ の形で整理すると、表-3、表-4 に示すように同じ値が得られていることに注意されたい。

4. 安全率や荷重係数の工学的応用

これまでの議論により、せん断強度低減法による安全率 $F = 1/m$ は、比例载荷の場合には表-1 の特性をもつ指標であることを示した。

ついで非比例载荷について、その工学的な意味を振り返って見よう。支持力問題であれば、地盤材料自身の重量は支持力公式中の自重項の形で $\gamma BN_\gamma/2$ として表れ、全体支持力に大きな寄与をする。ここに γ は土の単位体積重量、 B は基礎幅、 N_γ は支持力係数である。一方、静的震度法による斜面安定問題でも、常時作用

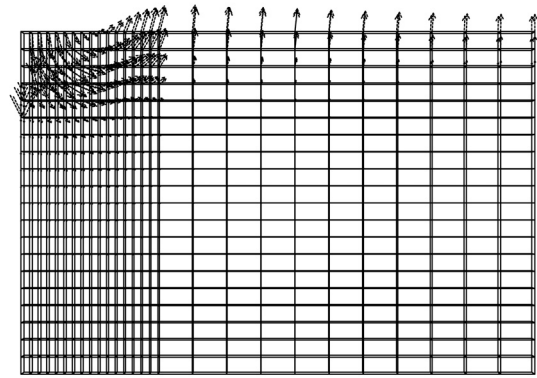


図-5 弾塑性解析による変位場（非関連流れ則 $\phi = 15^\circ, m^* = 0.089$ ）

している一定の重力加速度と地震時に作用する静的震度の組合せで外力を表現している。

一般に、常時作用している荷重 Γ_c についてはその性質がよく知られているが、地震力等の一時的に作用する自然環境外力についてはその性質に関する情報が不足している。したがって、一時的な自然環境外力を反映した基準外力 Γ_0 の程度と安全率あるいは荷重係数の関係を明らかにすることが工学的には重要だと思われる。

この点において、極限解析法による荷重係数の評価では、直接的に終局限界状態における一時的な自然環境外力の程度を評価しているため、シンプルで分かりやすい。一方、せん断強度低減法による安全率の評価では、それぞれの解析ケースで得られる安全率について、一時的な自然環境外力と常時作用荷重の影響を分離することはできないことに注意する。そのため、例えば終局限界状態となる一時的な自然環境外力の程度を評価するためには、複数の解析ケースでの結果を利用しなければならない。

極限解析法あるいはせん断強度低減法を用いた終局限界状態の評価のイメージを図-7 に示す。終局限界荷重と比例载荷によるせん断強度低減法の解の関係は次のとおりである。まず Γ_0 方向の荷重を少しずつ増加させながら、破線方向の比例载荷荷重に対する強度低減係数 m を求め、 $m = 1$ となる点を数値的に探索する。この $m = 1$ なる点を連ねた $m = 1$ Line は、比例载荷によって得られる系の終局荷重で構成される曲面である。

さらに、せん断強度低減法における安全率の定義より明らかであるが、安全率が2であることと、例えば盛土限界高さが2倍であることや、終局限界支持力が2倍となることとはまったく関係がない。つまり、せん断強度低減法における安全率 F は全体安全性の程度を評価する指標の1つであり、安全率が高いほど全体安定性は高いことは事実であるが、それらの値は必ずしも外力と直接的に関係付けられる訳ではないことに注意が必要である。

なお、実際にどのような荷重が作用したときに系が塑性崩壊を起こすのか、系の終局荷重を知っておく必要がある場合には、せん断強度低減法をわざわざ用いる

³ それぞれ異なる大きさの基準荷重に対する変位場であるので、変位量の大きさそのものよりも、変形モードが重要であると考えた。

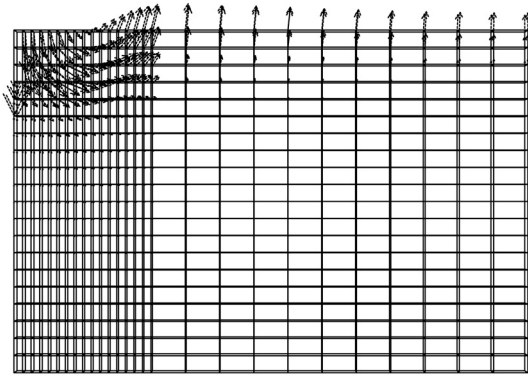


図-6 弾塑性解析による変位場（非関連流れ則 $\phi = 15^\circ, m^* = 1.22$ ）

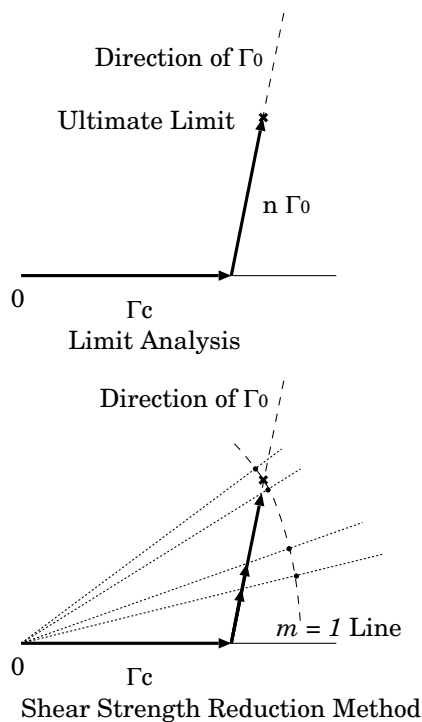


図-7 非比例載荷に対して極限解析法あるいはせん断強度低減法で終局限界荷重を評価するイメージ

には及ばない。弾塑性解析による直接計算を行い、 Γ_0 に沿って荷重を少しずつ増加させて、計算が不安定となる荷重を終局荷重とすればよい。

5. おわりに

本論文では、せん断強度低減法の数理的性質について検討した。得られた知見をまとめると以下のとおりである。

せん断強度低減係数 m の性質

せん断強度低減法の性質を最適化理論の観点から整理した。比例載荷を受ける場合は、せん断強度低減率 m (あるいはその逆数である安全率 $F = 1/m$) を評価す

るための基準荷重 Γ_0 が $m < 1$ であれば評価される安全率は終局限界荷重と比較して安全側の値となる。一方、 $m > 1$ であれば評価される安全率は終局限界荷重と比較して危険側の値となる。また Drucker-Prager 基準の材料定数 α がゼロのときには、基準荷重の選び方に依らず、同じ終局限界荷重を与えることを示した。このような解の性質は、平均応力 σ_m がせん断強度に影響する他のモデル、例えば Mohr-Coulomb 基準でも成り立つ。

さらに、上記で示した解の性質を数値実験によって検証するため、浅い基礎の2次元支持力問題を取り上げ、有限差分解析を行い、数値解析結果でも同様の性質が得られることを確認した。

これに加えて、関連流れ則と非関連流れ則による解の違いを検討するため、同じ浅い基礎の2次元支持力問題を取り上げ、数値実験を行った。水平地盤上の浅い基礎の支持力解析のように周辺領域からの体積拘束の少ない問題では、塑性変形でのダイレイタンス挙動に伴う平均応力の変化が少ないのでせん断強度の増加もあまり見込めず、結果として関連流れ則、非関連流れ則を問わず同様の支持力解が得られた。これは、せん断強度低減法が基本的には静力学的な条件に基づいて解を評価していることとも整合する。

せん断強度低減法と極限解析法の関係

せん断強度低減法によく似た剛塑性境界値問題の解法として極限解析法が知られている。これらを終局限界荷重を評価する立場から理論的な考察を行い、極限解析で得られる荷重係数 n と、せん断強度低減法で得られるせん断強度低減係数 m とを比較し、その類似性と相違点について議論した。まず、終局限界荷重はせん断強度低減係数が $m = 1$ となる荷重状態であるが、このときは極限解析法とせん断強度低減法はいずれも同じ制約条件式を満足しており、得られる解は一致する。

比例載荷を考える場合、極限解析法は基準荷重 Γ_0 の大きさによらず、同じ終局限界荷重を与えるが、せん断強度低減法では基準荷重の大きさに依存したせん断強度低減係数 m あるいは安全率 $F = 1/m$ が得られる。このため、せん断強度低減法で終局限界荷重を評価するためには、複数の異なる大きさの基準荷重を用いた解析が必要となる。

さらに、一般の非比例載荷を考えるとき、せん断強度低減係数 m では、作用荷重のうち死荷重（一定荷重 Γ_c ）と変動荷重（変動荷重 Γ_0 ）の影響を分離することはできないため、得られる解 m は $\Gamma_c + \Gamma_0$ に対するせん断強度低減係数となっている。一方、極限解析法では変動荷重 Γ_0 に対する荷重係数 n を直接的に評価するという特徴がある。

せん断強度低減法によって得られるせん断強度低減係数 m 、あるいは安全率 $F = 1/m$ は系の全体安全性を示す定量的な尺度ではあるが、系に作用する荷重との関係を直接的に表す物理量ではない。したがって、作用荷重に関する安全性を検討したい時には、安全率が1となる終局限界荷重を別途計算しておき、想定する載荷重に対する安全率を評価してやればよい。

せん断強度低減法はすでに実務上の実績もあり、工学的に有効な方法であることは間違いない。性能設計

の流れの中で、複数の性能照査解析メニューを取り上げて相互比較を行う際には、評価手法によって性質や定義の異なる安全率の意味を理解し、単に数字の比較をするのではなく、上記のような解析法の特徴を踏まえて工学的な判断を行うことが重要になる。

謝辞

本研究の一部は平成 21 年度 文部科学省 科学研究費補助金基盤研究 (C) 20560461 (研究代表者:小林俊一) の補助を受けた。ここに記して謝意を表す。

参考文献

- 1) Zienkiewicz, O.C., Humpheson, C. & Lewis, R.W.: Associated and non-associated visco-plasticity and plasticity in soil mechanics, *Géotechnique*, Vol. 25, No. 4, pp. 671-689, 1975.
- 2) 鵜飼恵三：弾塑性 FEM による斜面の全体安全率の計算法、土質工学会論文報告集、Vol. 29, No. 2, pp. 190-195, 1989.
- 3) 鵜飼恵三：安定解析におけるせん断強度低減法の有用性、土と基礎、Vol. 38, No. 1, pp. 67-72, 1990.
- 4) Matsui, T. & San, K-C.: Finite element slope stability analysis by shear strength reduction technique, *Soils and Foundations*, Vol. 32, No. 1, pp. 59-70, 1992.
- 5) Griffiths, D.V. & Lane, P.A.: Slope stability analysis by finite elements, *Géotechnique*, Vol. 49, No. 3, pp. 387-403, 1999.
- 6) Dawson, E.M., Roth, W.H. & Drescher, A.: Slope stability analysis by strength reduction, *Géotechnique*, Vol. 49, No. 6, pp. 835-840, 1999.
- 7) Kobayashi, S.: Hybrid type rigid plastic finite element analysis for bearing capacity characteristics of surface uniform loading, *Soils and Foundations*, Vol. 45, No. 2, pp. 17-27, 2005.
- 8) Ponter, A.R.S. & Carter, K.F.: Limit state solutions, based upon linear elastic solutions with a spatially varying elastic modulus, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 140, pp. 237-258, 1997.
- 9) Ponter, A.R.S.: A linear matching method for shakedown analysis, in “*Inelastic behaviour of structures under variable repeated loads* (Eds. Maier, G. & Weichert, D.),” Springer, pp.265-318, 2002.

(2010 年 3 月 9 日 受付)