

剛塑性有限要素解析による地山補強土工法の補強効果の評価

Estimation of Reinforcement Effect on Slope Stability by Nailing Method based on Rigid Plastic Finite Element Analysis

保科 隆*・瀧本英朗*・田中達也*・磯部公一**・大塚 悟***

Takashi Hoshina, Takimoto Hideaki, Tatsuya Tanaka, Koichi Isobe and Satoru Ohtsuka

* 工修 長岡技術科学大学大学院, 工学研究科 建設工学専攻 (〒940-2188 新潟県長岡市上富岡町 1603-1)

** 工博 長岡技術科学大学 助教, 工学部 環境・建設系 (〒940-2188 新潟県長岡市上富岡町 1603-1)

*** 工博 長岡技術科学大学 教授, 工学部 環境・建設系 (〒940-2188 新潟県長岡市上富岡町 1603-1)

This paper proposes a new analysis method to estimate stability of treated slope with nailing method. It employs rigid plastic constitutive equations for slope and reinforcement nail. A rigid plastic constitutive equation of contact plane between slope and reinforcement nail is also introduced to consider a pull out effect of reinforcement nail from the slope. Reinforcement nail is modeled into a beam and reinforcement effects of not only axial force but also bending moment can be taken into account in the method. The feature of proposed method is to assess the factor of safety based on the strength reduction coefficient. Through some case studies, its applicability was clearly shown. In this paper, loading test was also conducted on model slope treated by nailing method to examine the applicability. Some future assignments were found, but numerical simulations showed good coincident with model tests qualitatively.

Key Words: rigid plastic, finite element analysis, soil nailing, slope stability

キーワード: 剛塑性, 有限要素解析, 地山補強土, 斜面安定

1. はじめに

自然斜面に鉄筋を挿入する地山補強土工法は、比較的小規模の斜面崩壊防止策として多用されている。その設計は極限平衡法による安定解析により実施されているが、すべり線と剛体ブロックを用いた崩壊土塊の運動の記述はやや簡易的であり、補強材による斜面の安定効果は取り入れられているものの、斜面と補強材間の相互作用力は十分に評価されていない問題がある。建設費用の効率化が求められる現在において、より合理的な地山補強土工法の設計が求められており、この課題を解決する合理的な解析手法を構築する必要がある。

これまでの地山補強土工法の安定性評価の高度化は、有限要素法を用いた弾塑性変形解析がしばしば用いられている。しかし、自然斜面の初期応力は様々であり、その推測はきわめて難しい。弾塑性変形解析は初期応力の設定によって異なる変位量が求められるために、補強効果の客観的評価が難しい問題がある。また、通常、斜面の地盤調査は N 値などの限られた情報に限定され、弾塑性変形解析で必要な様々なパラメータが得られない場合が多い。極限平衡法による安定性評価が用いられるのは、これらの要件に対して現実的な評価が行われる点が多い。本研究では、極限平衡法と同様の特徴を有する剛塑性有限要素法を用いた解析手法を提案し、その適用性について検討する。剛塑性有限要素法は極限平衡法と同様の解析手法であるため、連続体理論に基づくためにすべり面などの局所的な

変形挙動を表現することは出来ないが、構成式の利用により地盤や補強材の物理的特性や両者の相互作用力を合理的に評価することが可能である。剛塑性有限要素法は機械工学の分野で開発されて、金属加工の変形解析に応用されている。一方、地盤工学の分野では Tamura et al.¹⁾ が極限解析の上界定理に基づいて剛塑性有限要素法を構造体の安定解析(地盤の支持力解析)に適用した。その後、Tamura et al.²⁾ は上界定理に基づく剛塑性有限要素法と等価な結果を与える剛塑性構成式を誘導した。特に、地盤材料のような摩擦性材料に対する構成式の誘導は、剛塑性有限要素法を関連流れ則から非関連流れ則へ拡張する上で大きな貢献をはたした。

補強材を含む地盤材料の剛塑性有限要素解析には Asaoka et al.³⁾ の研究がある。Asaoka et al. は補強材の効果を地盤の変位に関する拘束条件(変位速度の制約条件)として捉え、構造体全体の安定性を評価するとともに補強材の軸力やモーメントを求める方法を提案した。また、宮田・重久⁴⁾ は補強材を引張りに抵抗する線材としてモデル化する解析を実施した。これらの方法は、補強材の効果を評価する上で有効であるが、地盤と補強材間の引抜けによる相互作用力の評価や、後述する 2 次元解析における補強材のモデル化などの課題が指摘される。

本研究では Tamura et al.²⁾ の剛塑性構成式の誘導手法に基づいて、地盤材料および補強材、地盤と補強材間のインターフェイスに関する剛塑性構成式を定式化することに

より、より合理的な地山補強土工法の解析手法を提案する。斜面安定解析では安全率が強度低減係数によって評価することから、大塚・宮田の方法⁵⁾に基づいて各材料の剛塑性構成式に共通の安全率を導入することにより、斜面の安定解析を実施する。また、斜面の安定性評価では2次元解析にモデル化が行われることが多いが、地山補強土工法を2次元解析すると補強材が3次的には平板のように表現されることになり、実際の挙動と大きく異なる問題がある。2次元解析では補強材の剛性を適宜調整して解析することが多いが、実際現象との相違やパラメータの設定法に関して問題が残る。そこで、本研究では2次元解析に補強材の3次元効果を簡易的に取り入れる解析手法を新たに提案する⁶⁾。この方法によると、補強材の材料物性を直接用いても、補強材の径や挿入ピッチなどの3次元効果を考慮することが可能となる。

本稿では、まず地盤と補強材の相互作用を適切に考慮した剛塑性有限要素解析による斜面安定解析手法の定式化を行う。つづいて、解析手法の適用性に関する様々な数値実験を行うとともに、重力場で実施した斜面模型地盤に対する上載圧載荷実験の再現解析を行い、本解析手法の妥当性を検証する。

2. 解析手法の概要

2.1 地盤材料の剛塑性構成式と斜面安定解析の構造

Tamura et al.²⁾は *Drucker-Prager* 型の降伏関数を用いた剛塑性構成式を以下のように誘導している。降伏関数を応力の第一不変量 I_1 、偏差応力の第二不変量 J_2 を用いて次式のように表す。ここに、 ω 、 ψ は *Mohr-Coulomb* の破壊基準に基づく c 、 ϕ と関係付けられる係数であり、引張応力を正と定義した。

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\sigma}) &= \omega I_1 + \sqrt{J_2} - \psi = 0 \\ I_1 &= \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \\ J_2 &= \frac{1}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s} \end{aligned} \quad (1)$$

塑性変形を生じる物体の応力 $\boldsymbol{\sigma}$ を、塑性ひずみ速度から求められる決定応力 $\boldsymbol{\sigma}^{(1)}$ と塑性ひずみ速度から求められない非決定応力 $\boldsymbol{\sigma}^{(2)}$ に分解する。決定応力 $\boldsymbol{\sigma}^{(1)}$ は関連流れ則により以下のように表される。式中の $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ は塑性ひずみ速度、 $\dot{\epsilon}$ は等価塑性ひずみ速度である。

$$\boldsymbol{\sigma}^{(1)} = \frac{\psi}{\sqrt{3\omega^2 + 1/2}} \frac{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p}{\dot{\epsilon}}, \quad \dot{\epsilon} = \sqrt{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p} \quad (2)$$

非決定応力 $\boldsymbol{\sigma}^{(2)}$ は降伏関数式(1)の直線部分に沿う応力成分であり、構成式から直接求めることが出来ない。しかし、降伏関数上に応力があることを利用して非決定応力の成分（不定応力）を以下のように表すことが出来る。降伏関数式(1)に関連流れ則を適用すると、塑性ひずみ速度の条件式（体積変化特性）が求められる。

$$h(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_v^p - \frac{3\omega}{\sqrt{3\omega^2 + 1/2}} \dot{\epsilon} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_v^p - \beta \dot{\epsilon} = 0 \quad (3)$$

ここに $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_v^p$ は塑性体積ひずみ速度である。式(3)は降伏関数式(1)と直交する塑性ひずみ速度に関する条件式であることを利用すると、 $\boldsymbol{\sigma}^{(2)}$ は不定定数 α を用いて次式のように表される。

$$\boldsymbol{\sigma}^{(2)} = \alpha \frac{\partial h}{\partial \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p} = \alpha \left\{ \mathbf{I} - \frac{3\omega}{\sqrt{3\omega^2 + 1/2}} \frac{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p}{\dot{\epsilon}} \right\} \quad (4)$$

$\mathbf{I}$ は単位テンソルを表す。式(2)、式(4)より *Drucker-Prager* 型降伏関数に対する剛塑性構成式は次式になる。

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)} = \frac{\psi - 3\omega\alpha}{\sqrt{3\omega^2 + 1/2}} \frac{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p}{\dot{\epsilon}} + \alpha \mathbf{I} \quad (5)$$

この構成式は不定係数 α を含んでおり、式(3)の制約条件と共に境界値問題の解析を実施することにより、 α を求めることが出来る。

剛塑性構成式は変形している物体に適用可能なことから、剛体の物体には適用できない問題がある。しかし、安定解析に当たっては剛体を含めた解析が必要なことから、次のように剛塑性構成式を拡張する。等価塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}$ がある閾値 $\dot{\epsilon}_0$ を下回る場合に $\dot{\epsilon}_0$ を $\dot{\epsilon}$ に置き換える操作を行うと式(6)が得られる。この操作は剛体領域で等価ひずみ速度が小さくなることに伴う、式(5)でゼロによる割算を防ぐ効果がある。また、式(6)を最右辺に書き直すと、 $\dot{\epsilon}_0$ による置き換えは地盤の強度を ($\dot{\epsilon}/\dot{\epsilon}_0 < 1$) で割り引く効果がある。したがって、式(6)はせん断強度を見掛け上低下させた構成式を作成するのと同じ効果を期待でき、剛体部分にも微小な塑性変形を許容することによって降伏関数内の応力に対しても式(5)と同様の構成関係を構築し、安定して力のつり合い式を解くことが可能になる。閾値 $\dot{\epsilon}_0$ の設定に関しては、事前に $\dot{\epsilon}_0$ を変化させた数値実験を実施することとして、論文中の崩壊事例には安全率の算出に影響を及ぼさない値を用いている。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \\ &= \frac{\psi - 3\omega\alpha}{\sqrt{3\omega^2 + 1/2}} \frac{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p}{\dot{\epsilon}_0} + \alpha \mathbf{I} = \left(\frac{\psi - 3\omega\alpha}{\sqrt{3\omega^2 + 1/2}} \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \frac{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p}{\dot{\epsilon}} + \alpha \mathbf{I} \right) \\ &\quad \text{in case of } \dot{\epsilon} \leq \dot{\epsilon}_0 \end{aligned} \quad (6)$$

斜面安定解析では斜面の安全率がせん断強度の低減係数によって定義される⁴⁾。降伏関数および体積変化特性を、安全率を用いて次のように表わす。

$$f(\boldsymbol{\sigma}, F_s) = \frac{\omega}{F_s} I_1 + \sqrt{J_2} - \frac{\psi}{F_s} = \hat{\omega} I_1 + \sqrt{J_2} - \hat{\psi} = 0 \quad (7)$$

$$h(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p, F_s) = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_v^p - \frac{3\hat{\omega}}{\sqrt{3\hat{\omega}^2 + 1/2}} \dot{\epsilon} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_v^p - \hat{\beta} \dot{\epsilon} = 0 \quad (8)$$

ここに、 $\hat{\beta}$ は強度低減係数を用いる際に式(8)から求まる係数である。

また、本研究では解析速度の高速化を目的に制約条件をペナルティ法によって陽に取り組む方法を用いる (κ : ペ

ナルティ定数)．以上から剛塑性構成式は最終的に次の方程式で与えられる．

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\hat{\psi}}{\sqrt{3\hat{\omega}^2+1/2}} \frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}{\dot{e}} + \kappa \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v^p - \hat{\beta} \dot{e} \right) \left\{ \mathbf{I} - \frac{3\hat{\omega}}{\sqrt{3\hat{\omega}^2+1/2}} \frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}{\dot{e}} \right\} \quad (9)$$

斜面安定解析は、式(9)の剛塑性構成式を力の釣り合い式(弱形式)に代入して実施する．ここで、物体力を $\mathbf{x}$ (v は面体領域)，表面力を $\mathbf{t}$ (S_σ は応力境界)と表して、若干の展開を行うと次式になる．

$$\begin{aligned} & \int_V \left(\frac{\psi - 3\omega\kappa \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v^p - \hat{\beta} \dot{e} \right)}{\sqrt{3\hat{\omega}^2+1/2}} \frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}{\dot{e}} \right) : \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dV \\ & + \int_V (F_s \cdot \kappa) \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v^p - \hat{\beta} \dot{e} \right) \mathbf{I} : \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dV \\ & = \int_V (F_s \cdot \mathbf{x}) \cdot \delta \dot{\mathbf{u}} dV + \int_{S_\sigma} (F_s \cdot \mathbf{t}) \cdot \delta \dot{\mathbf{u}} dS \end{aligned} \quad (10)$$

for $\forall \delta \dot{\mathbf{u}}$

剛塑性構成式は変位速度の大きさが不定のために、以下の制約条件とともに解析することにより、安全率が求められる．

$$\int_V \mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV + \int_{S_\sigma} \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{u}} dS = 1 \quad (11)$$

斜面安定解析では、式(7)、(8)に示すように安全率によって地盤の強度パラメータ、体積変化特性が変化するため、式(9)は安全率に関する非線形方程式である．したがって、式(10)は安全率 $\hat{F}_s$ 、初期の変位速度 $\dot{\mathbf{u}}$ を仮定して方程式を解くことにより、安全率ならびに変位速度を算出、更新する繰返し解法を用いる．ペナルティ法 (μ : ペナルティ定数) を用いて制約条件式(11)を式(10)に陽に取り込むと次式になる．

$$\begin{aligned} & \int_V \left(\frac{\psi - 3\omega\kappa \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v^p - \hat{\beta} \dot{e} \right)}{\sqrt{3\hat{\omega}^2+1/2}} \frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}{\dot{e}} \right) : \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dV + \int_V (\hat{F}_s \cdot \kappa) \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v^p - \hat{\beta} \dot{e} \right) \mathbf{I} : \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dV \\ & = \mu \left(\int_V \mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV + \int_{S_\sigma} \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{u}} dS - 1 \right) \left(\int_V \mathbf{x} \cdot \delta \dot{\mathbf{u}} dV + \int_{S_\sigma} \mathbf{t} \cdot \delta \dot{\mathbf{u}} dS \right) \end{aligned} \quad (12)$$

式(12)の解析より変位速度 $\dot{\mathbf{u}}$ が求められると、安全率は次式により得られる．

$$F_s = \mu \left(\int_V \mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV + \int_{S_\sigma} \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{u}} dS - 1 \right) \quad (13)$$

2.2 梁要素を用いた補強土対策斜面の安定解析

地山の補強土工法は、自然斜面に鉄筋等の線材を挿入して、崩壊の可能性が高い土砂塊を地山と一体化することにより、斜面の安定性を高める工法である．本研究では補強材と地山間の相互作用による安定効果を考慮するために、補強材および、補強材と地山間の境界に剛塑性構成式を導入する解析を行う．しかし、2次元解析に補強材を取り入れた解析を行うと、実質的には線材である補強材を板状にモデル化した解析を実施することになり、地山を補強材に

よって分断したモデル化になる．そのため、有限要素解析では補強材のモデル化による不合理性を調整するために補強材の剛性を低下した解析が行われることが多い．しかし、線材の剛性の低下率に関しては理論的な裏づけがなく、解析の信頼性を損なう問題がある．2次元解析は計算費用効果から設計等で用いられることが多いことから、本研究は2次元解析の高精度化を目的に補強土対策斜面の簡易安定解析手法を提案する．

図-1は補強土対策斜面の2次元モデルの概念図である．補強材の奥行き方向の対策ピッチ dt (対策工の奥行き方向の設置間隔)を考慮すると斜面の2次元解析における力の釣り合い式(弱形式)は以下の式で表される．

$$dt \int_A \boldsymbol{\sigma} : \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dA = dt \int_A \mathbf{x} \cdot \delta \dot{\mathbf{u}} dA + dt \int_{L_\sigma} \mathbf{t} \cdot \delta \dot{\mathbf{u}} dL \quad (14)$$

ここで、 A は斜面の2次元断面、 L_σ は2次元断面の応力境界を表している．

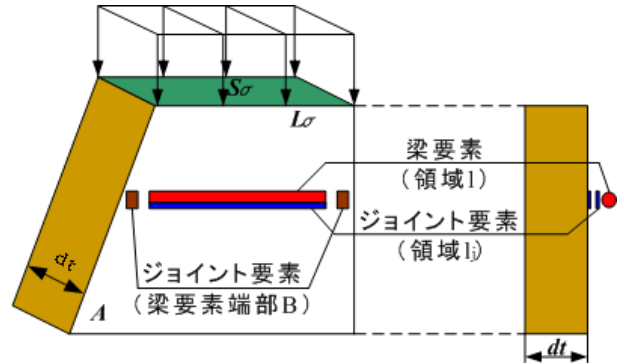


図-1 解析モデル概念図

地山と補強材間の相互作用の評価は、補強材を地盤内に埋込む従来の方法に対して、2次元にモデル化された地盤断面に外接するように補強材を設置して、補強材と地盤間の周面摩擦モデルを導入することによって相互作用力を伝達するモデルを用いる(図-1参照)．この方法によると、補強材や地山と補強材間の周面摩擦力に対して、実際の材料物性値を用いることにより3次元的な現象を簡易的に評価することができる．地山補強土工法斜面全体の力の釣り合い式(弱形式)は次のように表される．

$$\begin{aligned} & dt \int_A \boldsymbol{\sigma} : \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dA + \int_l \boldsymbol{\sigma}_{beam} : \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dl \\ & + dr \int_{l_j} \mathbf{t} \cdot \delta \Delta \dot{\mathbf{u}} dl + [\mathbf{f} \cdot \delta \Delta \dot{\mathbf{u}}]_\eta \\ & = dt \int_A \mathbf{x} \cdot \delta \dot{\mathbf{u}} dA + dt \int_{L_\sigma} \mathbf{t} \cdot \delta \dot{\mathbf{u}} dL \end{aligned} \quad (15)$$

for $\forall \delta \dot{\mathbf{u}}$

ここに、 $\boldsymbol{\sigma}_{beam}$ は梁要素の応力ベクトル(後述)、 $\mathbf{t}$ は不連続面に作用する応力ベクトル、 f は補強材両端における軸力である．また、 l は補強材、 l_j は補強材と地盤断面との接触面(ジョイント要素)、 dr は補強材の周長を表わす．また、 η は補強材の両端部であり、この点にて補強材は地盤と接続(ジョイント要素)している．左辺第2項は補強材を梁要素にモデル化したものであり、第3、4項は補強

材と地盤間のインターフェイス要素（ジョイント要素を利用）を表している．第3項は補強材に沿う作用力に対して，第4項は補強材両端における軸力に対する離合モデルを表わす．インターフェイス要素は地盤と補強材間の周面摩擦モデルを表すことから，仮想変位速度の不連続量に対して力のつり合い式（弱形式）を構築している．

2.3 補強材の剛塑性構成式

補強材を梁要素により表現するために，地盤と同様に梁部材の剛塑性構成式を新たに誘導する（引張力を正）．本研究では補強材の軸力 N と曲げモーメント M を考慮して，降伏関数に図-2に示す楕円型の関数を仮定した．ここに， a ， b ， σ_0 は補強材の材料特性を表すパラメータであり，斜面安定解析の安全率に従い，強度低減係数を導入している．

$$f(N, M, F_s) = \left(\frac{N}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{I}M\right)^2 - \left(\frac{\sigma_0}{F_s}\right)^2 \quad (16)$$

$$\equiv (aN)^2 + (bM)^2 - \bar{\sigma}_0^2 = 0$$

ここに， A ， y ， I ， σ_0 はそれぞれ補強材の断面積，半径，断面二次モーメント，降伏応力を表している．以下のように換算塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}^p$ を式(17)で定義すると，関連流れ則より式(20)を誘導できる．ここに， λ は塑性定数， $\dot{\epsilon}$ は換算塑性ひずみ速度のノルムである．

$$\dot{\epsilon}^p = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \dot{\epsilon}_n \\ \frac{1}{b} \dot{\epsilon}_\theta \end{pmatrix} = \frac{2\lambda}{\bar{\sigma}_0^2} \begin{pmatrix} aN \\ bM \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\dot{\epsilon}^2 = \dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p = \left(\frac{2\lambda}{\bar{\sigma}_0^2}\right)^2 (a^2 N^2 + b^2 M^2) = \frac{4\lambda^2}{\bar{\sigma}_0^2} \quad (18)$$

$$\lambda = \frac{\bar{\sigma}_0}{2} \dot{\epsilon} \quad (19)$$

$$\dot{\epsilon}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{beam}} = \frac{2\lambda}{\bar{\sigma}_0^2} \begin{pmatrix} a^2 N \\ b^2 M \end{pmatrix} = \frac{\dot{\epsilon}}{\bar{\sigma}_0} \begin{pmatrix} a^2 N \\ b^2 M \end{pmatrix} \quad (20)$$

以上から，軸ひずみと曲げひずみに分解して表記すると次の剛塑性構成式が誘導される．

$$\sigma_{beam} = \begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_0 & 1 \\ \dot{\epsilon} & a^2 b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \dot{\epsilon}^p$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_0 & 1 \\ \dot{\epsilon} & a^2 b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_n \\ \dot{\epsilon}_\theta \end{pmatrix} \quad (21)$$

梁要素の剛塑性構成式は軸力と曲げモーメントに関する楕円型の降伏関数を用いたために，地盤材料のように非決定応力は存在しない．よって，構成式を用いる際の付加的な制約条件を要しない．また，梁要素が剛体挙動する際の処理は地盤の構成式と同様に換算塑性ひずみ速度のノルム $\dot{\epsilon}$ に閾値 $\dot{\epsilon}_0$ を導入する処理を行う．

式(16)を用いると，補強材に圧縮力が作用する場合にも

適用されるが，座屈などの現象が生じることが懸念されるために，本論文では補強材に引張力の発生する問題に適用を限定することとする．

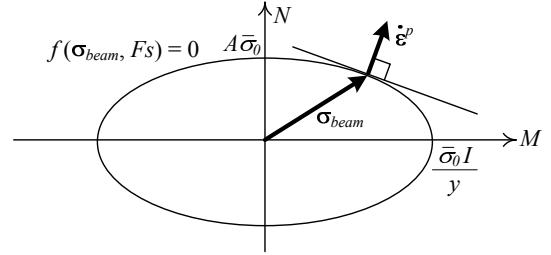


図-2 梁要素の降伏関数

2.4 速度不連続面の剛塑性構成式

異なる物体が面的（2次元問題では線）に接するときの接触面での応力～変位速度関係を剛塑性構成式により記述する．接触面では変位速度場の不連続性を考慮し，応力ベクトル $\mathbf{t}$ にMohr-Coulomb型の降伏関数を用いる．

$$f(\mathbf{t}, F_s) = |\mathbf{t}_s| - \hat{c}_s + t_n \tan \hat{\phi}_s = 0 \quad (22)$$

ここに， t_s ， t_n は不連続線に作用する応力ベクトル $\mathbf{t}$ のせん断，垂直方向の成分であり， $\hat{\phi}_s$ ， $\hat{c}_s$ は不連続線でのせん断抵抗角，粘着力より定まる材料パラメータである．これらの定数は強度定数と強度低減係数による次の関係がある．

$$\hat{c}_s = c_s / F_s, \quad \hat{\phi}_s = \tan^{-1} \left(\frac{\tan \phi_s}{F_s} \right) \quad (23)$$

速度不連続面（線）の相対的な変位速度ベクトル $\Delta \dot{\mathbf{u}}$ を+面の変位速度ベクトルを $\dot{\mathbf{u}}^+$ ，一面での変位速度ベクトルを $\dot{\mathbf{u}}^-$ の差で定義する（図-3参照）．

$$\Delta \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}^+ - \dot{\mathbf{u}}^- \quad (24)$$

不連続面（線）のせん断に伴う運動条件（体積変化特性）は次式で表される．

$$h(\Delta \dot{\mathbf{u}}, F_s) = |\Delta \dot{u}_s| \tan \hat{\phi}_s - \Delta \dot{u}_n$$

$$= \left(\frac{\Delta \dot{u}_s \cdot \tan \hat{\phi}_s}{|\Delta \dot{u}_s|} - 1 \right) \begin{pmatrix} \Delta \dot{u}_s \\ \Delta \dot{u}_n \end{pmatrix} = \mathbf{a} \cdot \Delta \dot{\mathbf{u}} = 0 \quad (25)$$

$\Delta \dot{u}_s$ ， $\Delta \dot{u}_n$ は相対変位速度の水平および鉛直方向成分である．地盤材料と同様に降伏関数式(22)によって定まる決定応力 $\mathbf{t}^{(1)}$ と定まらない非決定応力 $\mathbf{t}^{(2)}$ に分けて構成関係を誘導すると，次の剛塑性構成式が得られる．

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}^{(1)} + \mathbf{t}^{(2)} = \frac{\hat{c}_s}{\cos \hat{\phi}_s (1 + \tan^2 \hat{\phi}_s)} \frac{\Delta \dot{\mathbf{u}}}{\|\Delta \dot{\mathbf{u}}\|} + \xi (\mathbf{a} \cdot \Delta \dot{\mathbf{u}}) \mathbf{a} \quad (26)$$

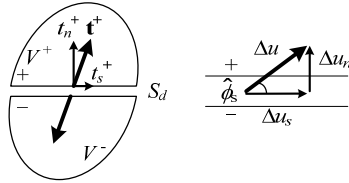
ここに ξ はペナルティ定数であり，制約条件式(25)を陽に構成式中に導入している．また $\|\Delta \dot{\mathbf{u}}\|$ は相対変位速度のノルムであり，相対変位速度が小さい場合には閾値 $\|\Delta \dot{\mathbf{u}}\|_0$ に置き換える操作により2つの物体が一体として挙動する運動を記述する．

本研究では，梁要素の端部境界条件についてもインター

フェイス要素を導入する。梁要素端部と地山の補強材軸方向の相対変位速度 $\Delta \dot{u}$ を用いて、次の関係式を使用する。

$$f = \frac{c_B}{F_s} \frac{\Delta \dot{u}}{|\Delta u|} \quad (27)$$

ここに、 c_B は補強材端部と地山間の引抜き抵抗力を表す。



(a) 不連続線上の応力状態 (b) 不連続線の運動
図-3 応力ベクトルと相対変位速度ベクトル

3. 地山補強土斜面の事例解析

3.1 無対策斜面の解析

剛塑性有限要素法を用いて鉄筋のような線材を地山に挿入する補強土工法を施工した斜面の安定解析を実施する。解析に用いた斜面を図-4に示す。斜面天端には構造物を設定した等分布荷重 10 kN/m を載荷している。境界条件は底部を固定条件、側面をローラー条件（水平変位速度を固定）とした。地盤定数は中間土を想定した表-1である。はじめに無対策斜面の安定解析の結果を図-5に示す。図は塑性ひずみ速度分布による崩壊形態と変位速度から求めた変形を示している。安全率は $F_s = 1.050$ であり、のり先からの円弧状のすべり面が得られており、すべり土塊が前方へ随分運動していることがわかる。連続体に基づく有限要素解析では極限平衡法のようなシャープなすべり面は得られないが、せん断領域が局所化しており、上述の通りすべり土塊が剛体的に挙動することが分かる。

表-1 地盤定数

せん断抵抗角 ϕ [°]	35
粘着力 c [kPa]	20
単位体積重量 γ [kN/m³]	18

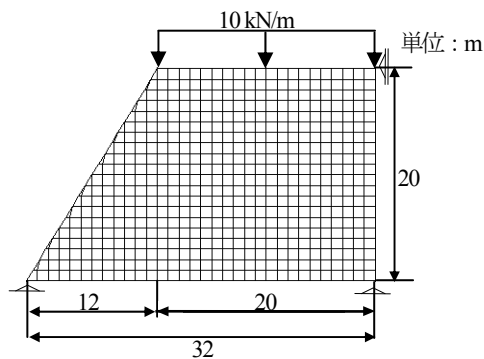


図-4 解析対象と有限要素メッシュ

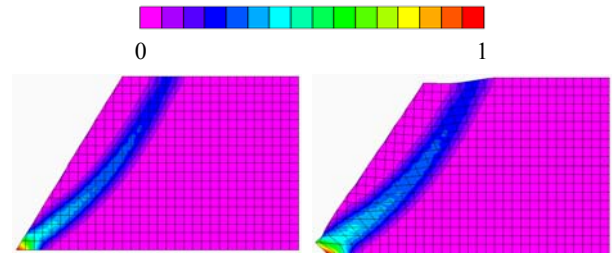


図-5 相対塑性ひずみ速度分布図および変形図
($F_s = 1.050$)

3.2 補強材の斜面安定効果

補強材の効果を調べるために図-4の斜面に対して、のり面中央付近に補強材を水平に配置した斜面の安定解析を行う。用いた補強材および地盤と補強材間の周面摩擦に関するパラメータは表-2の通りである。補強材と地盤の周面摩擦力は粘着力を 20 kPa、せん断抵抗角を 35° とした。また、補強材端部の引き抜け条件は粘着力を 0.01 kPa と引き抜けを可能に設定した。補強材は長さ 10m、径 0.2m で、降伏軸力は $N_y = 20$ kN を仮定した。奥行き方向の補強材間隔を変えた解析を実施すると、図-6に示す安全率が得られる。図では補強材の設置間隔が長いと無補強の斜面安全率に近づき、設置間隔が短いと安全率が向上する結果となった。

図-7(a)に設置間隔が短い 0.5 m の場合の塑性ひずみ速度分布と変形図を示す。同図より、補強材の影響ですべり面が補強材の外側に発生していることが分かる。塑性ひずみ速度分布の詳細を見るとすべり土塊は更に幾つかのブロックに分かれて変形が局所化している様子が見られる。一方、図-7(b)に示した設置間隔が長い 3.0 m の場合の塑性ひずみ速度分布と変形図から、すべり面は無対策の場合とほぼ同様のすべり面であり、補強材を横切るようにすべり面が発生していることが確認できる。補強材を板状にモデル化する従来の 2 次元解析ではこのような崩壊形態を解析できた事例は少ない。本解析の効果と特徴が良く表れた解析結果と言える。

次に、補強材をのり面中央に配置して補強材の長さを変化させた場合の解析事例を示す。設置間隔は 2.0 m とした。補強材長さを変化させた解析結果を図-8に示す。補強材の長さが長いほど斜面の安全率は上昇するが、補強材が 10 m 以上では補強効果が上がらない。図-9に補強材が 15 m の場合の塑性ひずみ速度分布および変形図を示す。斜面のすべり面はのり面側に発生し、補強材を長くしても安全率が上昇しないことと併せて考えると、補強材ののり面側が引張破壊または引き抜け破壊していると推測される。図-10に解析より得られる補強材の軸力分布を示す。のり面より 3 m から 10 m にかけて軸力が 180 kN であり、材料定数を安全率で除した $200 / 1.106 = 180.8$ kN にほぼ一致していることから降伏（引張破壊）していることが分かる。

補強材を複数設置した場合の解析を行う。補強材は 10 m、設置間隔は 2 m とし図-11に示す位置に設置した。補強材の本数を変化させた際の安全率の変化を図-12に示す。

す。補強材の本数が増えると安全率が上昇しており、妥当な解析結果が得られている。図-13 に補強材本数が2本と3本の場合の塑性ひずみ速度分布を示す。これより、2本の場合にははすべり面が補強材の内側に発生するのに対して、3本の場合には補強材の外側に発生する結果となった。このことから、補強材の本数を3本以上に増やしても破壊形態に影響ないため対策効果はさほど上がらないことが予測される。

表-2 補強材の解析条件

接触ジョイントのせん断抵抗角 ϕ [°]	35
接触ジョイントの粘着力 c_c [kPa]	20
接点ジョイントの粘着力 c_p [kPa]	0.01
補強材の軸降伏応力 N_y [kN/m ²]	200
補強材の降伏曲げモーメント M_y [kNm]	0.01
補強材の直径 D [m]	0.2

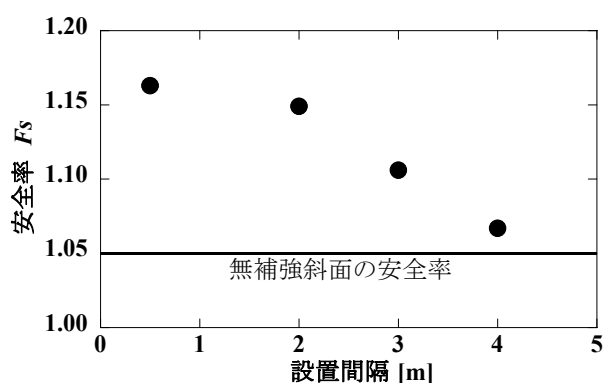
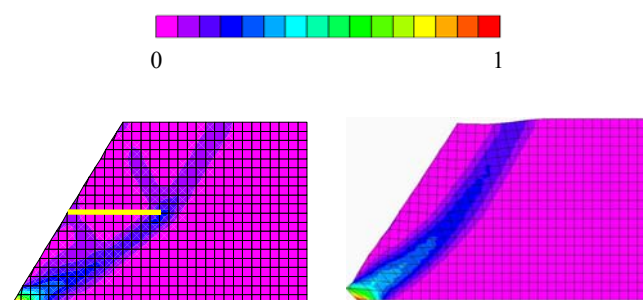
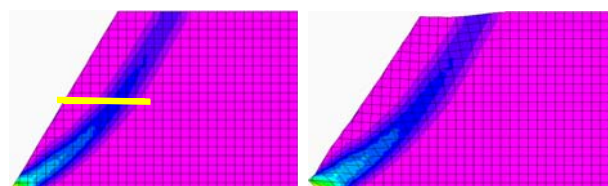


図-6 補強材の設置間隔と安全率の関係



(a) 設置間隔 0.5 m ($F_s = 1.163$)



(b) 設置間隔 3.0 m ($F_s = 1.067$)

図-7 補強材の設置間隔による
相対塑性ひずみ速度分布図および変形図

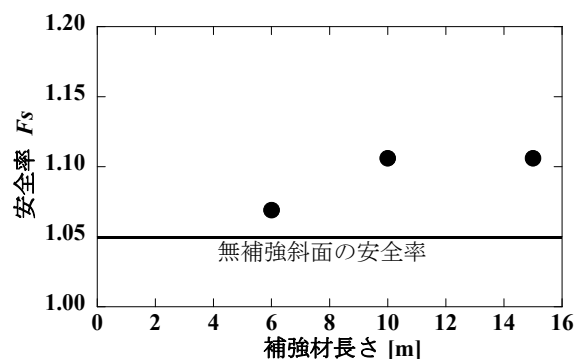


図-8 補強材の長さで安全率の関係

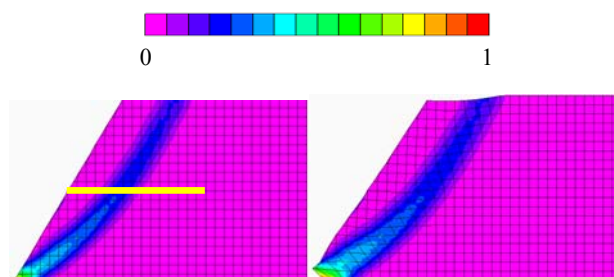


図-9 相対塑性ひずみ速度分布図および変形図
補強材長さ 15 m ($F_s = 1.106$)

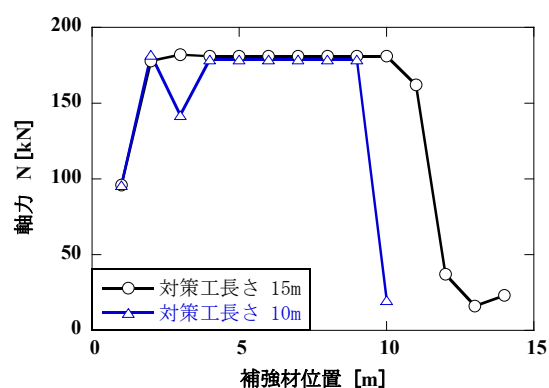


図-10 補強材の軸力分布

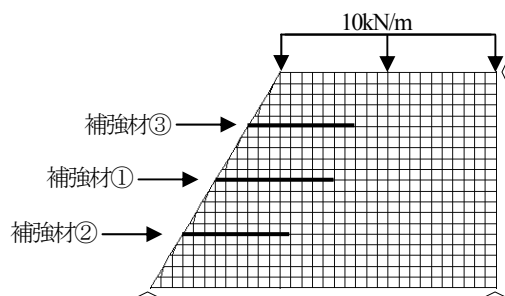


図-11 補強材の挿入位置による補強効果

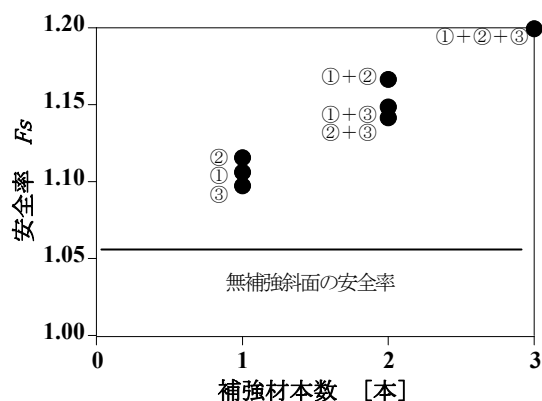


図-12 補強材の本数と安全率の関係

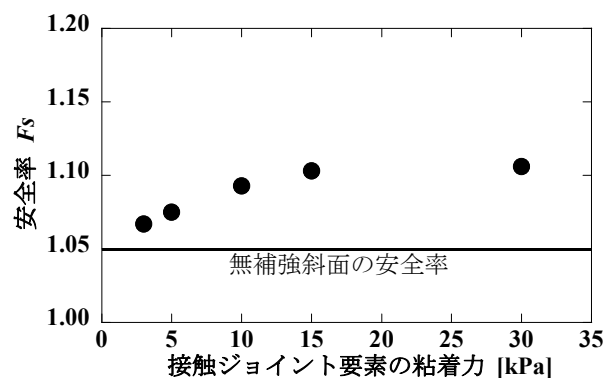


図-14 接触ジョイントの粘着力と安全率の関係

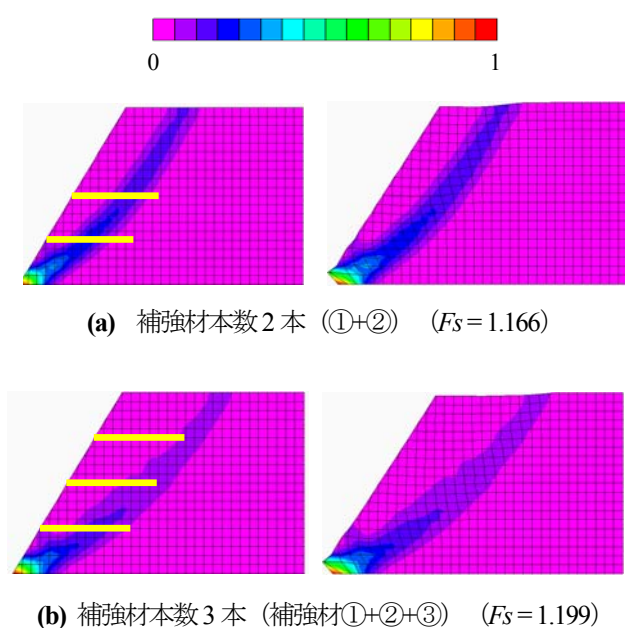


図-13 補強材位置の検討

相対塑性ひずみ速度分布図および変形図

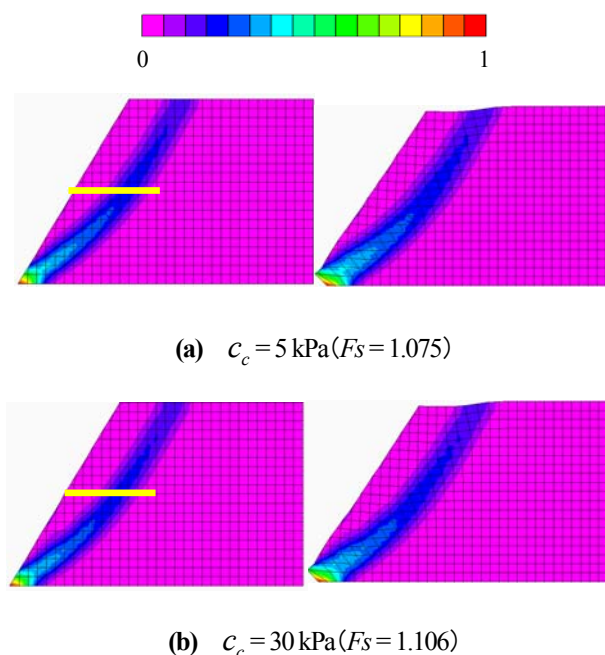


図-15 相対塑性ひずみ速度分布図および変形図

3.3 斜面と対策工間の周面摩擦力の検討

補強材と地盤の周面摩擦力を大きく設定すると、補強材が引張破壊する解析結果が得られたことから、周面摩擦力の影響について調査する。周面摩擦力は簡単のために摩擦抵抗角をゼロにして粘着力のみを変化させた検討を行う。補強材はのり面中央に配置して、長さ 10 m、対策ピッチは 2 m とした。粘着力を変化させた場合の安全率変化を図-14 に示す。図では粘着力が小さいと無対策斜面の安全率に漸近し、粘着力を大きくすると安全率は上昇するものの頭打ちする結果が得られた。得られた塑性ひずみ速度分布図を粘着力が 5 kPa、30 kPa の場合について一括して図-15 に示す。見掛け上、すべり線位置に大きな変化はなく、ほぼ同様の破壊形態が得られている。

補強材の引き抜け防止策として斜面のり面に受圧版を設置すると補強効果の高いことが知られている。そこで、のり面の受圧版の効果を補強材端部の引き抜け条件によりモデル化することとして、粘着力はのり面側を 10000 kPa、地山側を 0.01 kPa と設定して、のり面側では引き抜

けが発生しないように設定して解析を行った。受圧版のモデル化に関しては、補強材の端部を斜面地表面とインターフェイス要素（ジョイント要素）を介して接続している。インターフェイスの強度を大きく設定すると、補強材が地表面から引抜けないことから、受圧版の効果を最大限に考慮する解析になる。インターフェイス要素の強度に関しては、数値実験の視点から適宜設定した。

解析結果を図-16 に示す。安全率は $F_s = 1.106$ と受圧版による補強材引き抜け防止によって向上した。図-17 に受圧版の有無による補強材の軸力分布を比較した。補強材の軸力分布は、補強材端部での軸力や補強材周面での摩擦力によって変化するため、引抜けが発生した場合は、端部での軸力が小さく、すべり面と交差する補強材中央辺りで軸力が最大値となる。このことから、補強材の軸力分布は斜面の破壊形態やすべり線の発生に大きく影響されることがわかる。一方、受圧版が設置されると補強材の引抜けが生じないため、受圧版と接続する地表面で大きな軸力が発揮する。図ではのり面から斜面内部に向けて軸力がほぼ

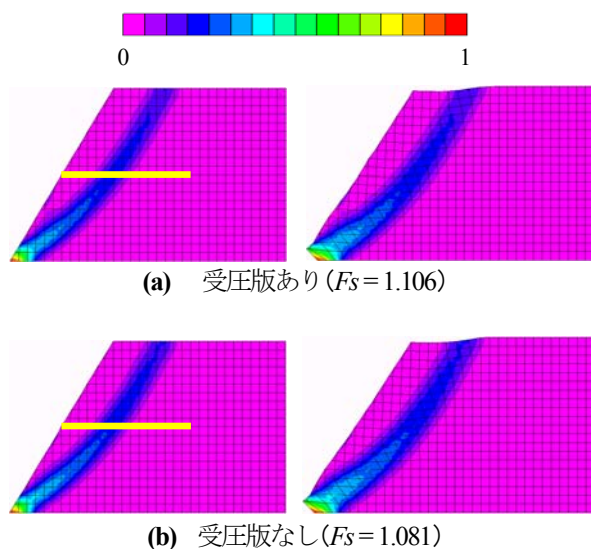


図-16 塑性ひずみ速度分布とベクトル

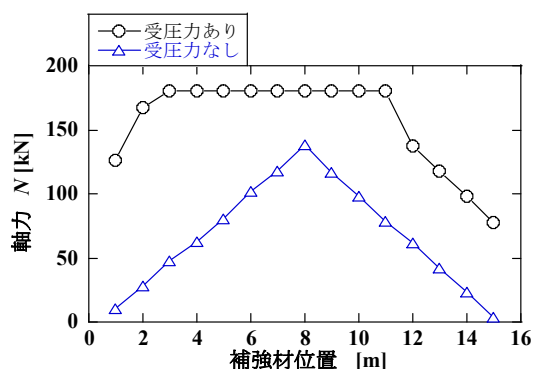


図-17 補強材の軸力分布

一定値を示すが、これらは安全率にて低減した軸力降伏値に等しく、補強材が引っ張り破壊を生じていることを示す。

3.4 応用解析事例

図-18 に示す斜面下部に低強度のシーム層が存在する場合の事例解析を実施し、①地山と補強材間の相互作用評価と②地山内の弱層による不連続ブロック挙動の2つの適用事例を通して、不連続面の構成式の解析手法の適用性を検討した。用いる地盤定数は表-2と同様である。ただし、シーム層は不連続面の剛塑性構成式でモデル化することとして、粘着力10kPa、せん断抵抗角 0° とした。図-19 に無対策斜面の塑性ひずみ速度分布図及び変形図を示す。シーム層がない斜面のすべり面(図-13)と異なり、シーム層に規定されて崩壊形状が大きく変化して、ブロック状の破壊形態を示す。安全率は $F_s = 0.921$ が得られた。補強材による補強材の解析を、のり面中央付近に補強材を1本設置する場合と3本設置する場合の2ケースについて解析を行った。補強材長は10mとし、対策ピッチは2mである。解析結果を図-19に示す。図には両ケースの塑性ひずみ速度分布図と変形図を示した。これより、対策の設置により斜面の崩壊形態が変化する様子が分かる。すべ

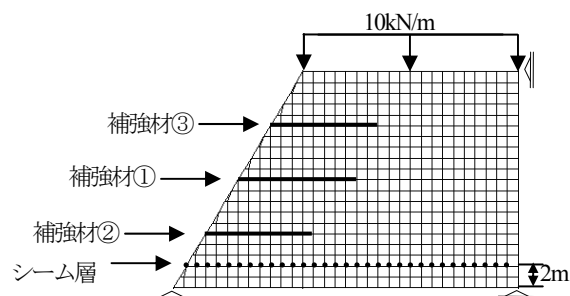
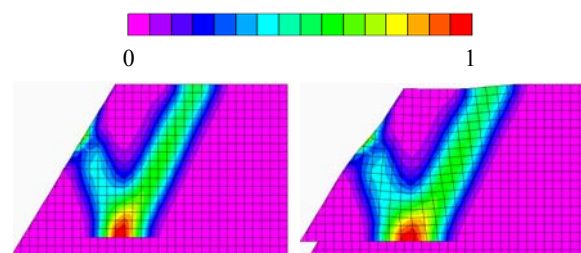
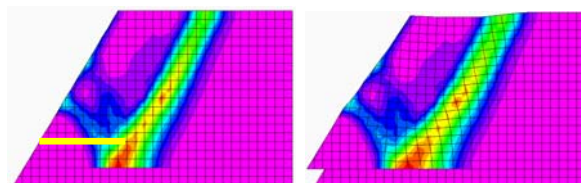


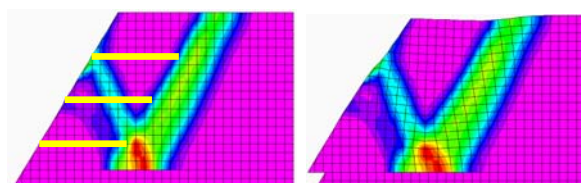
図-18 シーム層を用いた解析モデル



(a) 無補強材なし ($F_s = 0.921$)



(b) 補強材1本 (①) ($F_s = 0.941$)



(c) 補強材3本 (①+②+③) ($F_s = 0.955$)

図-19 相対塑性ひずみ速度分布図および変形図

り線位置には大きな変化は見られないが、斜面がブロック状に崩壊することから補強材の設置によりすべり土塊内部の各ブロックの崩壊機構に影響を与えることにより補強効果が現れている。補強材が1本の場合に安全率は $F_s = 0.941$ 、3本の場合に $F_s = 0.955$ と補強材による補強材が妥当に評価されている。

4. 中間土で構成した斜面模型に対する上載圧荷実験

本研究で提案した斜面補強材法の数値解析手法の適用性を模型実験のシミュレーションにより検証する。

4.1 模型実験の概要と結果

図-20に模型実験に用いた載荷装置と模型斜面を示す。斜面は高さ300mm、奥行き385mm、天端225mm、底部400mmに成形し、のり勾配は $1:\sqrt{3}$ (60°)である。用いた地盤材料は東北硅砂6号と藤森粘土を乾燥重量で3:1で配合したものである。材料の物性値は表-3に示す。斜面模型は最適含水比11.1%に調整し、締固め度70%に

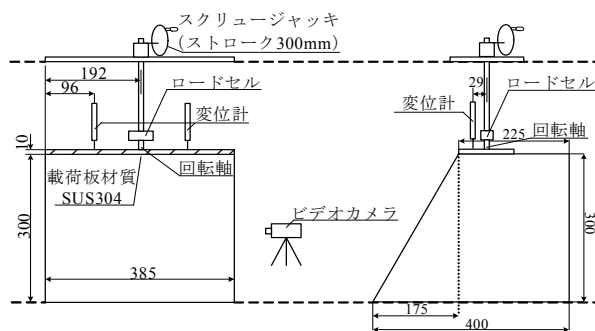


図-20 模型実験概要図 (実験機と斜面モデル)

表-3 地盤材料の物性特性

硅砂・藤森 (3:1)	
砂分含有率 [%]	77.2
シルト分含有率 [%]	13.7
粘土含有率 [%]	9.1
細粒分含有率 [%]	22.8
土粒子密度 G_s [%]	2.66
最大乾燥密度 ρ_d [g/cm ³]	1.971
透水係数 k_s [cm/s]	8.30E-02

表-4 実験ケース

Case	内容	実験結果 [kN]	解析結果 [kN]
1	無補強 (対策工なし)	0.81	0.81
2	補強斜面 ($l = 235$ mm, 2本)	0.86	0.93
3	補強斜面 ($l = 235$ mm, 4本)	0.94	1.00
4	補強斜面 ($l = 150$ mm, 4本)	0.77	0.93

作製した。模型側面には変形分析用に 50 mm 間隔で、硅砂を用いてメッシュを作製している。補強材は $\phi = 5$ mm の中空アルミパイプを使用した。パイプの物性値は数値解析の所で後述する。パイプは周面に東北硅砂 6 号を塗布して、地盤との摩擦力を確保した。模型実験は天端にて長さ 100 mm の剛な載荷板を介して変位制御で載荷する。補強材は斜面の天端より 100 mm の位置にのり面側に設置する。実験は表-4 に示す 4 ケースであり、無対策斜面のほか、補強材長や本数を変化させた実験を実施した。対策工の設置間隔は、Case2 のとき 130 mm，Case3, 4 とともに 77 mm としており、全て底面から 200 mm の位置に設置している。

図-21 に実験から得られた荷重～変位関係を示す。無補強斜面の場合にピーク荷重が得られたが、他の事例では変位に伴い荷重が増加する結果となった。これは本実験が変位制御方式で載荷したことによると考えられる。図の初期 (領域 a) において荷重～変位関係に折れ点が各実験に共通して現れるが、この地点における斜面の変形状況は図-22 に示すと、載荷板の端部 (のり肩) からのり面の表層にかけて浅いすべりが発生していることが分かる。荷重～変位関係はその後も変位の増加に伴って荷重が増加しており、また、この浅いすべりは載荷板の極限支持力機構としては不適切と考えられることから、極限支持力は、無補強斜面を除いて、沈下量 50 mm 以下で荷重～変位関係

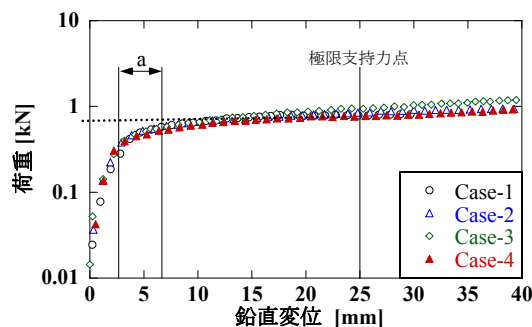


図-21 実験結果 (荷重～変位関係)

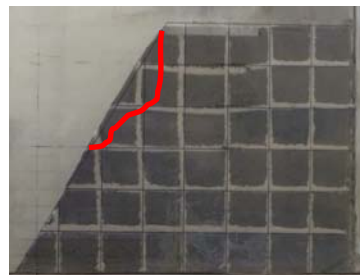


図-22 領域 a における破壊状況

(対数軸) で勾配がほぼゼロになる荷重を用いて定義した。

表-4 に得られた極限支持力を示す。無対策斜面の極限支持力に対して、対策斜面の極限支持力は増加しており、補強材本数が多いほど対策効果が大きく得られた。

また、補強材を短くすると対策効果が小さい結果となったが、実験では無補強斜面の極限支持力を下回ったことから、実験的にはやや課題が残された。今回の模型実験では補強材にアルミパイプを用いたが、やや剛性が高すぎることで、また周面摩擦力の確保に東北硅砂を塗布したがせん断や引き抜き等によってパイプから剥がれやすい問題が指摘される。

4.2 模型実験に対する数値解析

剛塑性有限要素法を用いて補強土工法を用いた模型斜面の支持力実験の数値解析を実施する。用いた地盤材料およびアルミパイプの材料物性値を表-5 に示す。地盤材料については一面せん断実験によりせん断抵抗角を求め、粘着力に関しては無補強斜面の極限支持力から逆算した。これは、地盤材料が不飽和状態の場合に、粘着力は実験条件に左右されることによる。

各実験に対する解析結果を図-22 に模型実験の画像解析結果と比較して示す。画像解析は実験終了後を対象としており、模型実験側面の変形より算出するために概略的な精度である。解析による塑性ひずみ速度分布図は実験条件によらず大きな差異は見られない。載荷板の端部よりすべり面が発生し、のり尻に向かって伸びている。また、模型実験結果もマクロ的にはほぼ同様の崩壊形態を示すが、前述したようにのり肩部で大きな変形が発生している。また、補強材本数の違いによる崩壊規模は大きな差異が見られなかった。補強材長が短い場合に載荷板の直下でひずみが

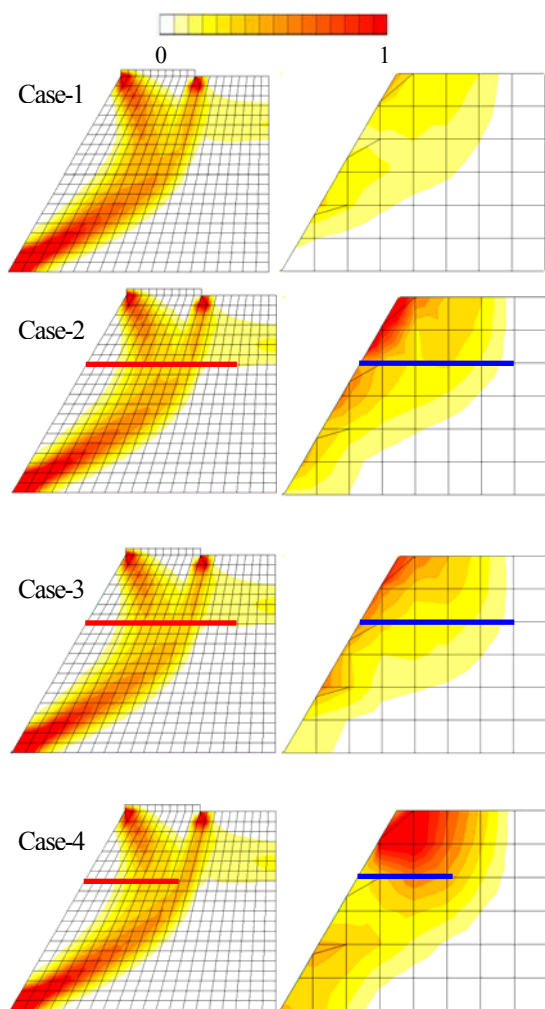


図-23 各実験に対する解析結果
(左図：剛塑性有限要素解析結果，右図：画像解析結果)

表-5 補強材の材料物性値

アルミパイプの材料物性値	
長さ [mm]	235
径 [mm]	5
弾性係数 E [N/mm ²]	6.67E+07
降伏応力(0.2%耐力) [kN/m ²]	4.00E+04
軸降伏応力 N [kN/m ²]	0.51
降伏曲げモーメント M_y [kNm]	4.27E+04

一様に発生する傾向が見られ、この現象が極限支持力の低下と関係がある可能性もあるが、具体的な原因はよく分かっていない。更なる検討を行う予定である。解析による極限支持力を表-4に示す。補強材法の効果は必ずしも模型実験と一致していないが、補強材本数や長さの影響を合理的に表現している。なお、今回の解析では補強材と地盤間の周面摩擦力に地盤定数を適用したが、過大評価になっている可能性がある。

5. 結論

本研究では補強材のような線材を斜面に挿入する補強

土工法に関して、斜面の安定性を合理的に評価する解析手法を提案した。以下に本研究から得られた結論を箇条書きにする。

- 1) 斜面の安定性評価では伝統的にせん断強度を低減して極限状態となる係数を安全率と定義することから、本研究では斜面、補強材および斜面と補強材間の相互作用にせん断強度低減型の剛塑性構成式を誘導した。これにより全体安全率が求められる。
- 2) 斜面安定解析では2次元解析が用いられることが多い。しかし、補強材を考慮した2次元解析は補強材と地盤間の相互作用を合理的に表現できない問題があるため、2次元解析でありながら簡易的に補強材と地盤間の相互作用力を解析中に取り込む手法を提案した。
- 3) 提案した解析手法の補強土斜面の安定解析への適用性を調べるために、補強材長さ、補強材本数、周面摩擦力、受圧版の有無などを想定した事例解析を実施した。安全率の定性的変化及び得られる安全率と補強材軸力は合理的であると判断でき、本研究で提案した解析手法が補強斜面の安定性評価に適用可能なことを示した。
- 4) 補強材を用いた模型斜面の支持力実験を実施して、数値解析との比較を実施した。模型実験では、補強材と地盤材料間の摩擦が十分でないために、補強材による補強効果が補強材と地盤間の引抜け摩擦力による効果が小さく、補強材の曲げ耐力による影響が大きい結果となったが、解析手法の結果は定性的には実験結果を合理的に評価することを示した。模型実験方法などの更なる見直しを行い、解析手法を含めた総合的な検討を今後の課題としたい。

謝辞

本研究は長岡技術科学大学環境・建設系の防災環境研究室の多くの学生の支援を受けました。卒業生の難波雅史氏、井上由美子氏には特に解析手法の検討で多大なる支援をいただきました。ここに謝意を表します。

参考文献

- 1) Tamura, T., Kobayashi, S. and Sumi, T.: Limit analysis of soil structure by rigid plastic finite element method, Soil and Foundations, vol.24, No.1, pp.34-42, 1984
- 2) Tamura, T., Kobayashi, S. and Sumi, T.: Rigid Plastic Finite Element Method in Geotechnical Engineering Computational Plasticity, Current Japanese Material Research, pp.15-23, 1990.
- 3) Asaoka, A, Kodaka, T. and Pokharel, G.: Stability analysis of reinforced structure using rigid plastic finite element. method, Soils and Foundations, vol.34, No.1, pp.107-118, 1994.

- 4) 宮田喜壽・重久伸一：補強材の引張り強度の影響を考慮した補強土構造物の剛塑性有限要素解析，土木学会論文集，No.736，pp.83-92，2003.6.
- 5) 大塚 悟，宮田善郁，池本宏文，岩部 司：剛塑性有限要素法による斜面安定解析，地すべり，第38巻 第3号，pp.75-83，2001.
- 6) Ohtsuka,s.Inoue,Y. and Tanaka,T.:Rigid Plasticity Based Stability Analysis of Reinforced Slope, Proc. of International symposium on Earth Reinforcement, PP.447-450, 2007.
- (2010年3月9日 受付)