

4本直列不安定トラス構造の対称つり合いモードについて

The symmetrical equilibrium configurations of 4 series unstable truss structure

小野耕平*・西林加織**・田村武***・西藤潤****・吉川仁†

Kohei ONO, Kaori NISHIBAYASHI, Takeshi TAMURA, Jun SAITO and Hitoshi YOSHIKAWA

*京都大学大学院 学生 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒615-8540 京都市西京区京都大学桂 C)

**京都大学大学院 学生 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒615-8540 京都市西京区京都大学桂 C)

***フェロー 博士(工学) 京都大学大学院 教授 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒615-8540 京都市西京区京都大学桂 C)

****正会員 博士(工学) 京都大学大学院 准教授 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒615-8540 京都市西京区京都大学桂 C)

†正会員 博士(工学) 京都大学大学院 講師 情報学研究科複雑系科学専攻 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

When an external force is exerted on an unstable truss structure, it would probably change its configuration far from its initial state. The purpose of this study is to establish the theory of the equilibrium configuration of the symmetrical 4 series unstable truss structure under gravity. It is shown that the number of the symmetrical equilibrium configurations depends on the length of each members, and then the relationship between the length of each members and the number of the symmetrical equilibrium configurations is solved.

Key Words : *unstable truss structure, equilibrium configuration, symmetry, equilibrium equation, moment of force, geometrical condition*

1. 序論

一般にトラス構造を解析する場合、静定トラスあるいは不静定トラスといった「安定トラス」について扱うことが多い。これは、任意の外力が作用しても大きな変位を起こすことなくつり合い位置が定まるトラス構造を指している。実際、微小変形理論では初期位置とつり合い位置とが一致するものとして計算される。一方で、「不安定トラス」と呼ばれるトラス構造も存在している。不安定トラスは、任意の外力が作用したときその外力を支えることができず、初期の形状から大きく形を変えた状態でつり合うのが一般的である。なお、本論におけるトラス構造は剛体の梁をヒンジにより接続した構造とする。

この不安定トラスのつり合い位置に関する研究は少ない。建築構造の分野で田中・半谷¹⁾が不安定トラスの剛体変位について、また田波²⁾が荷重を受けた状態で実在するつり合い形状から、設計図面上における無荷重時の初期形状を求める構造解析について研究しているが、いずれも一般逆行列の概念というやや複雑に見える理論を用いて議論している。阿井ら³⁾⁴⁾⁵⁾はケーブル構造に関する形状決定解析を行ったが、これらも弾性カテナリー要素を用いた変位法解析や応力法解析などを用いている。さらに、川口・半谷⁶⁾は不安定トラスの安定化移行経路と名づけて、初期形状からつり合い形状へと至る経路についてポテンシャルエネルギーを用いて実験及び考察をした。こうしたなか、田村・西林⁷⁾が線形代数のより基礎的な手法を用いた、数値計算による不安定トラスのつり合い形状の探索方法を

確立した。これにより、様々な形状の不安定トラスについて任意の外力を与えたときのつり合い形状を簡単に探索することが可能になった。

本研究の目的は、不安定トラスのつり合い位置に関する理論の確立にある。ここでは、まず対称系で部材数が4本の直列トラス構造(4本トラス)を扱うことで、最も基礎的な理論を確立する。そのために、不安定トラスのつり合い形状を最も簡単に探索することができる田村・西林⁷⁾によって確立された数値計算法を用いて、4本トラスを重力下においたときのつり合い形状を探索する。そして、これらの形状について検証することにより不安定トラスのつり合い形状の特性を考察することとする。具体的には、

- 部材長さを設定し様々な初期形状を与えることで、数値計算を用いて何種類のどのようなつり合い形状が得られるのか
- 各部材長さと到達するつり合い形状の種類数との関係に関する理論的考察

をそれぞれ論ずることで、本研究の目的を達成することとする。

2. つり合い形状の種類探索

本研究の目的に即した初期形状の設定を定義し、その設定のもとポテンシャルエネルギーに関する理論と田村・西林⁷⁾によって確立された数値計算法を使ってつり合い形状を探索する。そして、そのつり合い形状をとりうる部材長さの条件を調べる。

2.1 問題の設定

トラスの形状として、次の条件 (i)~(v) を与える。

(i) 部材の本数は4本とする。

不安定トラスのつり合い位置に関する最も基礎的な理論の確立を行うことから、簡単のために4本トラスについて扱う。

(ii) トラスは対称系のみ扱う。

最も基礎的な理論の確立のため、まずは対称系のみとする。4本トラスなので対応する部材の長さを同じとする(左右の固定点(図における黒点)側から順次 l_1, l_2 とする)ことで、左右対称な形状とする。

(iii) 固定点幅は2とする。

トラスの変形を有限とするための固定点を2点とり、その間隔を2とすることで部材の長さとの比を確認できるものとする。

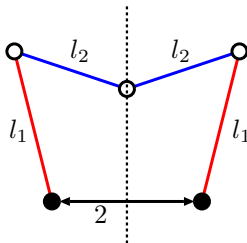


図-1 部材長さ l_1, l_2 、固定点幅2の対称な4本トラス

(iv) 外力は重力のみとする。

不安定トラスが変形するための外力として、重力のみを与える。すなわち、可動節点に接続された2つの部材長さの平均について、単位長さあたり単位の大さを重みとして、それぞれの可動節点にかける。

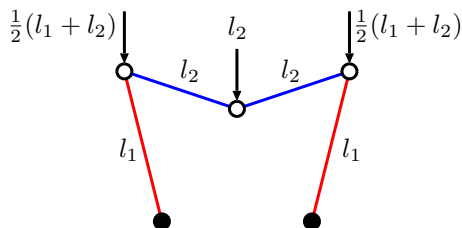


図-2 外力：部材長さを重みとした重力

(v) トラスの部材と各節点はそれぞれ透過する。

トラスの部材や各節点の奥行きを無視することで、数値計算中における可動節点の更新によって、部材や各節点が接触しないものとする。

2.2 つり合い形状の個数

つり合い形状を探索するにあたって、まず対称な4本トラスの部材長さ l_1, l_2 を与えたときのつり合い形状の個数を得るために、ある形状における重力のポテンシャルエネルギーについて考える。

例えば次の図-3 を考える。つり合い形状の探索は、

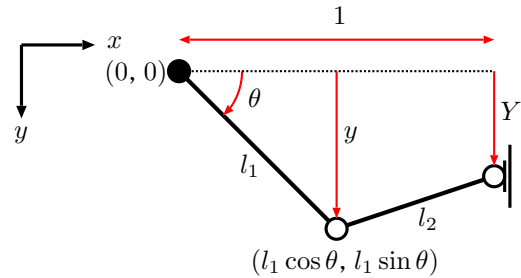


図-3 重力のポテンシャルエネルギー

重力のポテンシャルエネルギーが最小になるときの可動節点座標を求めることと等価である⁷⁾。しかしここでは、上の図のように y 軸の正の方向を下向きにとることで、次の制約条件付きの最大化問題を得る：

$$(l_1 + l_2)y + l_2 Y \rightarrow \max \quad (1)$$

$$\text{sub.to } (1 - l_1 \cos \theta)^2 + (Y - l_1 \sin \theta)^2 = l_2^2 \quad (2)$$

この問題を解くために、Lagrange の未定乗数法を使う。まず、Lagrange の未定乗数 λ を用いて、関数 f を

$$f(\theta, Y, \lambda) = (l_1 + l_2)l_1 \sin \theta + l_2 Y - \lambda \{ (1 - l_1 \cos \theta)^2 + (Y - l_1 \sin \theta)^2 - l_2^2 \} \quad (3)$$

と定義する。このとき関数 f は、変数 θ, Y, λ でそれぞれ偏微分したとき、その値が0になる：

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \theta} &= 0 \\ \Leftrightarrow (l_1 + l_2)l_1 \cos \theta - \lambda \{ 2(1 - l_1 \cos \theta)l_1 \sin \theta - 2(Y - l_1 \sin \theta)l_1 \cos \theta \} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial Y} &= 0 \\ \Leftrightarrow l_2 - 2\lambda(Y - l_1 \sin \theta) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \lambda} &= 0 \\ \Leftrightarrow (1 - l_1 \cos \theta)^2 + (Y - l_1 \sin \theta)^2 - l_2^2 &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

式(4)と式(5)を整理すると、

$$Y = l_1 \sin \theta + \frac{l_2 \tan \theta}{l_1 + 2l_2} (1 - l_1 \cos \theta) \quad (7)$$

となる。よって、式(7)を式(6)に代入すると、解くべき方程式

$$\left\{ 1 - \left(\frac{l_2 \tan \theta}{l_1 + 2l_2} \right)^2 \right\} (1 - l_1 \cos \theta)^2 - l_2^2 = 0 \quad (8)$$

が得られる。すなわち、部材の長さ l_1, l_2 を与えたうえで、図-3の角度 θ を変化させてこの式(8)が成立するとき、そのトラスの形状はつり合っていることがわかる。

ここで、つり合い形状の探索例として、 $l_1 = 7, l_2 = 5$ のときを考える。式(8)の左辺を $g(\theta)$ として、 l_1, l_2 の

値を式 (8) に代入し、 θ を $0^\circ \sim 360^\circ$ まで変化させると、そのときのグラフは次のようになる：

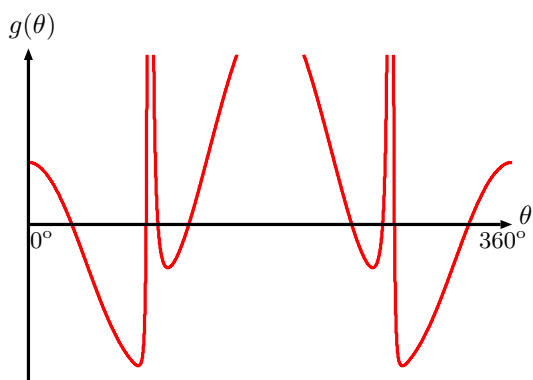


図-4 重力のポテンシャルエネルギーが極値を持つときの角度 θ ($l_1 = 7, l_2 = 5$)

$g(\theta) = 0$, すなわち式 (8) を満たす θ が 8 点あることから、8 種類のつり合い形状があることがわかる。また、このときの各 θ の前後における $g(\theta)$ の正負によって、各つり合い形状におけるポテンシャルエネルギーが、極小値をとるか極大値をとるかがわかる。ポテンシャルエネルギーが極小値をとるとき、このつり合い形状は安定なつり合い形状であると言える、極大値をとるとき、不安定なつり合い形状であると言える。

2.3 数値計算によるつり合い形状の探索

ここでも、部材長さとして $l_1 = 7, l_2 = 5$ を考える。上記ポテンシャルエネルギーについて極小値をとるときの θ を与え、数値計算によるつり合い形状の探索を行うと、図-5 の 4 種類の安定なつり合い形状が得られた。

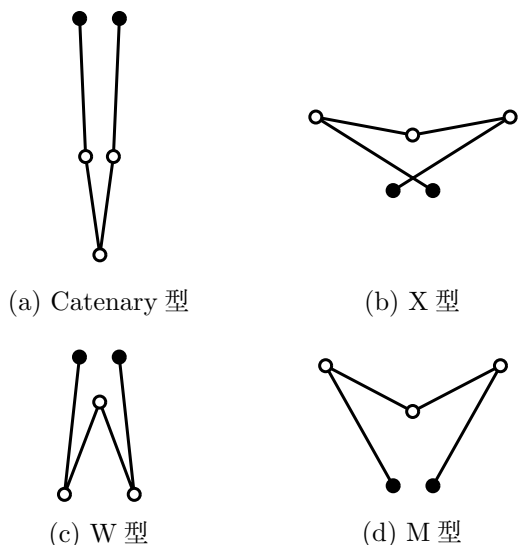


図-5 安定なつり合い形状 ($l_1 = 7, l_2 = 5$)

これらは、各節点を微小に動かしてももとのつり合い形状に到達することからも、安定なつり合い形状で

あることが確認できる。それぞれの形状の名称を次のように定義する。

(a) Catenary 型

Catenary (懸垂線) とは、2 点で固定した伸びないひもなど(この場合は剛体トラス)を吊り下げたときにできる形状で、図 5(a) がそれであり、この形状を Catenary 型と定義する。

(b) X 型

図-5(b) の形状は、固定点から伸びた部材がそれぞれ交差していることから、これを X 型と定義する。

(c) W 型

図-5(c) の形状は、そのまま「W」の形をしているので、これを W 型と定義する。

(d) M 型

図-5(d) の形状も、W 型同様「M」の形をしていることから、これを M 型と定義する。

また、これらの安定なつり合い形状に対して、ポテンシャルエネルギーが極大値をとるときの θ を与え、数値計算によるつり合い形状の探索を行うと、図-6 の 4 種類の不安定なつり合い形状が得られた。これらは、各節

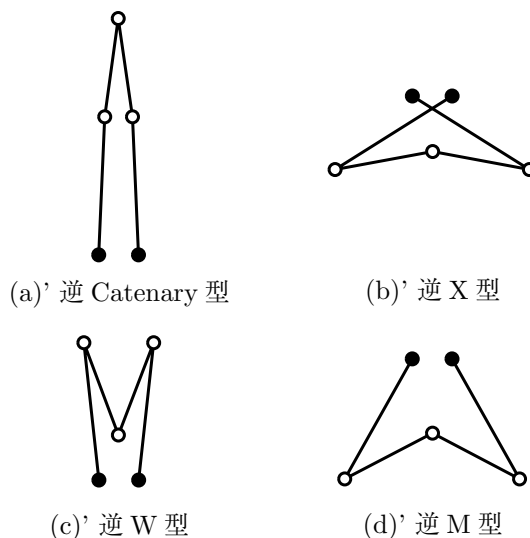


図-6 不安定なつり合い形状 ($l_1 = 7, l_2 = 5$)

点を微小に動かすと、もとの形状ではなく上記 (a)~(d) のどれかに到達することから、不安定なつり合い形状であることが確認できる。さらに、これらの形状は、安定なつり合い形状のそれぞれを上下反転させた形状となっていることがわかる。つまり、安定なつり合い形状が存在するときそれに対応する不安定なつり合い形状が必ず存在するということだが、このことは、図-4 の $g(\theta)$ のグラフが $\theta = 180^\circ$ で左右対称なことからも理解できる。そこで、不安定なつり合い形状の名称についてもそれぞれ対応する安定なつり合い形状の名称

から

- (a) Catenary 型 → (a)' 逆 Catenary 型
- (b) X 型 → (b)' 逆 X 型
- (c) W 型 → (c)' 逆 W 型
- (d) M 型 → (d)' 逆 M 型

と定義する. もちろん, 逆 W 型は「M」の形を, 逆 M 型は「W」の形をしている.

また, l_1, l_2 の値をそれぞれ与えて図-4 のように $g(\theta)$ のグラフを描くことで, 4 本の対称な直列トラス構造には最大で 8 種類のつり合い形状 (4 種類の安定なつり合い形状と, 4 種類の不安定なつり合い形状) が存在することがわかる. そして, これらのつり合い形状は, 数値計算において与える初期形状によって異なる. さらに, 各部材の長さによっては到達するつり合い形状の個数も異なっている. つまり, 到達するつり合い形状の個数は各部材長さに因っていると言える. そこで, 各部材長さがそれぞれいくらのときに何種類のつり合い形状に到達し得るのか, ということについて解析的に求める.

2.4 部材の長さかつり合い形状の種類

ここでは, 見つけた 4 種類のつり合い形状 (特に記述がない場合, 安定なつり合い形状を指すとき「安定な」を省略する) を, 長さ l_1, l_2 の条件がどのようなときにとり得るのかを調べる. そのために, それぞれの形状からつり合い状態を考慮して条件式を立て, そこから l_1, l_2 の条件式, あるいはそれぞれの形状をとる境界式を求める. なお, 本論では特に l_1, l_2 がそれぞれ 10 以下に限定して表すものとする.

(1) Catenary 型

対称系であることから, 次の図-7 のように形状の半分だけを見ればよい. 図中の l_i は部材 i の長さ, S_i は

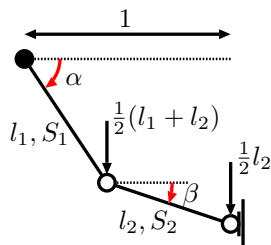


図-7 Catenary 型のつり合い状態

部材 i の部材力を, α, β はそれぞれ水平軸からの角度を表している. このとき, つり合い形状であることから以下の条件式が成り立つ:

(i) 力のつり合い

最下点で, 外力 (重力) と部材力による鉛直方向の

つり合い式

$$S_2 \sin \beta = \frac{1}{2} l_2 \quad (9)$$

が成り立つ.

(ii) 力のモーメントのつり合い

固定端まわりの力のモーメントを見ると, つり合い式

$$\frac{1}{2} (l_1 + l_2) l_1 \cos \alpha + S_2 \sin \beta l_1 \cos \alpha = S_2 \cos \beta l_1 \sin \alpha \quad (10)$$

が成り立つ.

(iii) 幾何条件

固定端の幅が 2 であることから, 幾何条件式

$$l_1 \cos \alpha + l_2 \cos \beta = 1 \quad (11)$$

が成り立つ.

式 (9) と式 (10) から変数 S_2 を消去し, $a = \frac{l_2}{l_1}$ とおくと

$$\tan \alpha = \frac{l_1 + 2l_2}{l_2} \tan \beta = \frac{1 + 2a}{a} \tan \beta \quad (12)$$

が得られ, これを式 (11) に適用し, $T = \tan^2 \beta (\geq 0)$ とおくことで

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + (1 + 2a)^2 T}} + \frac{1}{\sqrt{1 + T}} = \frac{1}{l_2} \quad (13)$$

とできる. このとき式 (13) の左辺を T の関数 $h(T)$ と定義して, 関数 $h(T)$ をグラフ化すると, 任意の a において図-8 のような形をとる.

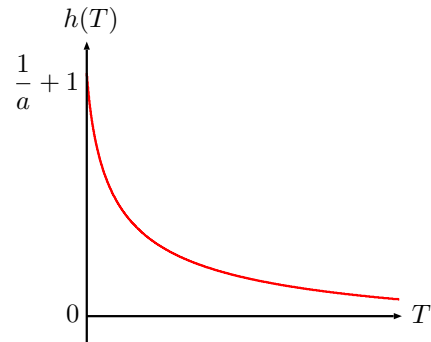


図-8 Catenary 型における $h(T)$ グラフ

$h(T) = \frac{1}{l_2}$ と $l_2 > 0$ であることから, Catenary 型のつり合い形状をとる (上記条件式 (i)~(iii) を満足する) のは, 式 (13) の T の関数 $h(T)$ が正のときであることがわかる. 図 8 から, 任意の a において, すなわち l_1 と l_2 の比がいくらであっても Catenary 型をとる. さらに, 具体的な部材長さの条件 (Catenary 型の存在範囲) を得るためにとり得る部材長さの境界を調べる. 関数 $h(T)$ が最大値をとるとき, 式 (13) より l_2 が最小値をとることから境界式を得る. 図-8 から $h(T)$ が最大

値をとるのは $T = 0$ のときで

$$h(T) \leq h(0) = \frac{1}{a} + 1 \quad (14)$$

となる. よって式 (13) から $h(T) = \frac{1}{l_2}$ であることより, Catenary 型をとり得る各部材長さの条件は

$$l_1 + l_2 \geq 1 \quad (15)$$

とできる. つまり, Catenary 型の存在範囲は図-9 のとおりである. すなわち, 部材の長さが両端に届いていればどのような部材の長さであっても Catenary 型をとり得る.

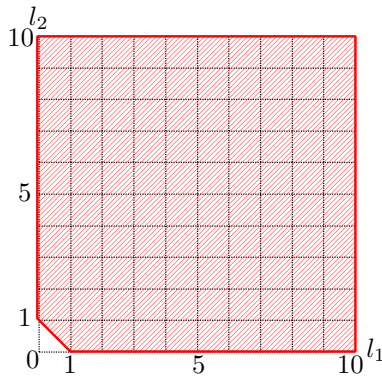


図-9 Catenary 型の存在範囲

(2) X 型

Catenary 型と同様にして, 図-10 から以下の条件式を立てる:

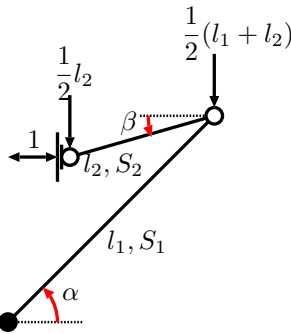


図-10 X 型のつり合い状態

(i) 力のつり合い

$$S_2 \sin \beta = \frac{1}{2} l_2 \quad (16)$$

(ii) 力のモーメントのつり合い

$$\frac{1}{2}(l_1 + l_2)l_1 \cos \alpha + S_2 \sin \beta l_1 \cos \alpha = S_2 \cos \beta l_1 \sin \alpha \quad (17)$$

(iii) 幾何条件

$$l_1 \cos \alpha = l_2 \cos \beta + 1 \quad (18)$$

式 (16) と式 (17) から変数 S_2 を消去し, $a = \frac{l_2}{l_1}$ とおくと

$$\tan \alpha = \frac{l_1 + 2l_2}{l_2} \tan \beta = \frac{1 + 2a}{a} \tan \beta \quad (19)$$

が得られ, これを式 (18) に適用し, $T = \tan^2 \beta$ とおくことで

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + (1 + 2a)^2 T}} - \frac{1}{\sqrt{1 + T}} = \frac{1}{l_2} \quad (20)$$

とでき, 式 (20) の左辺を T の関数 $h(T)$ とおく. 先に述べたとおり, $h(T)$ が正のとき対応する l_1, l_2 でトラスは X 型をとる. そのため $a \geq 1$ のときは, 常に $h(T) \leq 0$ となるので考慮しない. よって, T の関数 $h(T)$ を $a < 1$ のときのみグラフ化すると, 図-11 のようになる.

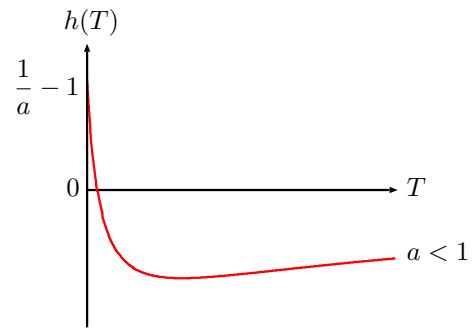


図-11 X 型における $h(T)$ グラフ

図-11 より X 型をとり得る境界は, 関数 $h(T)$ が最大値をとる, すなわち l_2 が最小値をとる $T = 0$ のときであるから

$$h(T) \leq h(0) = \frac{1}{a} - 1 \quad (21)$$

とできる. よって式 (20) から $h(T) = \frac{1}{l_2}$ であることより, X 型をとり得る各部材長さの条件は

$$l_1 \geq l_2 + 1 \quad (22)$$

とできる. 以上を図に表すと, 図-12 となる. これは, $a < 1$ すなわち $l_1 > l_2$ を満足している.

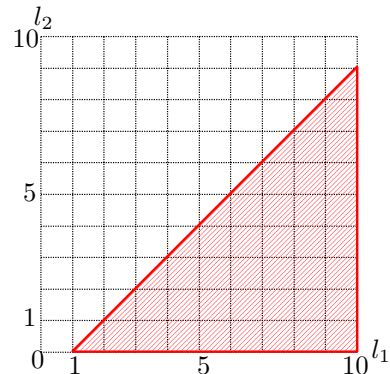


図-12 X 型の存在範囲

(3) W型

Catenary型, X型と同様にして, 図-13 から以下の条件式を立てる:

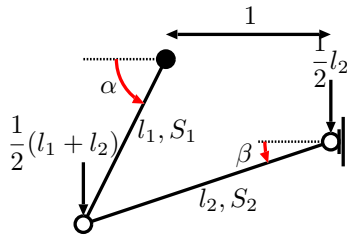


図-13 W型のつり合い状態

(i) 力のつり合い

$$S_2 \sin \beta + \frac{1}{2} l_2 = 0 \quad (23)$$

(ii) 力のモーメントのつり合い

$$\frac{1}{2}(l_1 + l_2)l_1 \cos \alpha + S_2 \cos \beta l_1 \sin \alpha = S_2 \sin \beta l_1 \cos \alpha \quad (24)$$

(iii) 幾何条件

$$l_1 \cos \alpha + 1 = l_2 \cos \beta \quad (25)$$

式(23)と式(24)から変数 S_2 を消去し, $a = \frac{l_2}{l_1}$ とおくと

$$\tan \alpha = \frac{l_1 + 2l_2}{l_2} \tan \beta = \frac{1 + 2a}{a} \tan \beta \quad (26)$$

が得られ, これを式(25)に適用し, $T = \tan^2 \beta$ とおくことで

$$\frac{1}{\sqrt{1+T}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + (1+2a)^2 T}} = \frac{1}{l_2} \quad (27)$$

ができ, 式(27)の左辺を T の関数 $h(T)$ とおく. そして, T の関数 $h(T)$ をグラフ化すると, $a < 1, a = 1, a > 1$ の3つの場合において図-14 のようになる.

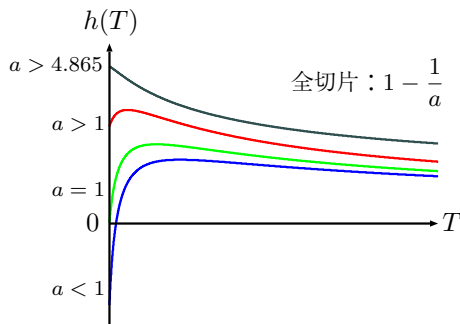


図-14 W型における $h(T)$ グラフ

図-14 より, $a < 1$ の一部と $a = 1$ における $h(0)$ を除いて $h(T) > 0$ である (対応する部材の長さ l_1, l_2 で W型が存在する) ことがわかるが, 長さ条件を得るための

関数 $h(T)$ の最大値をグラフから判ずることができない. そこで, 式(27)を T で微分し極値を求めることで, 関数 $h(T)$ の最大値を求める:

$$h'(T) = -\frac{1}{2(1+T)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(1+2a)^2}{2(a^2 + (1+2a)^2 T)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{(1+2a)^{\frac{4}{3}} - a^2}{(1+2a)^2 - (1+2a)^{\frac{4}{3}}} \quad (28)$$

これを式(27)に代入することで $h(T)$ の最大値 h_{\max} が

$$h_{\max} = \frac{\{(1+2a)^{\frac{2}{3}} - 1\}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(1+2a)^2 - a^2}} \quad (29)$$

とできるので, l_2 の最小値について

$$l_2 \geq \frac{\sqrt{(1+2a)^2 - a^2}}{\{(1+2a)^{\frac{2}{3}} - 1\}^{\frac{3}{2}}} \quad (30)$$

で表される. このとき a がとりうる範囲について, 式(28)と $T \geq 0$ より

$$(1+2a)^{\frac{4}{3}} \geq a^2 \quad (31)$$

とでき, これを解くことで a の最大値がおよそ

$$a \simeq 4.865 \quad (32)$$

であることがわかる. つまり, $a \leq 4.865$ の場合 $T \neq 0$ の範囲で式(29)を関数 $h(T)$ の最大値とできる. さらに a がそれ以上の値をとるとき, 図-14 における $a > 4.865$ のグラフのように $T = 0$ において関数 $h(T)$ が最大値をとる. このときの

$$h(0) = 1 - \frac{1}{a} = \frac{1}{l_2}$$

$$\Leftrightarrow l_2 = l_1 + 1 \quad (33)$$

と式(30)により, 図-15 ができる.

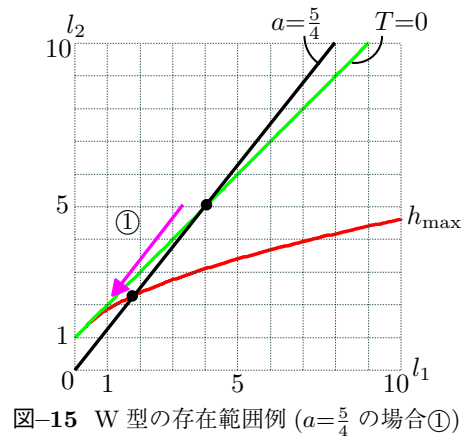


図-15 W型の存在範囲例 ($a = \frac{5}{4}$ の場合①)

図-15 の, 境界である h_{\max} から上の領域で, W型のつり合い形状をとり得るのは Catenary型や X型と同様だが, W型の場合 $h(0)$ と h_{\max} が異なる場合があることから, さらに考慮すべきことがある. そのための例として, ここでは $a = \frac{5}{4}$ を挙げる. このときの T の関数 $h(T)$ のグラフは図-16 である.

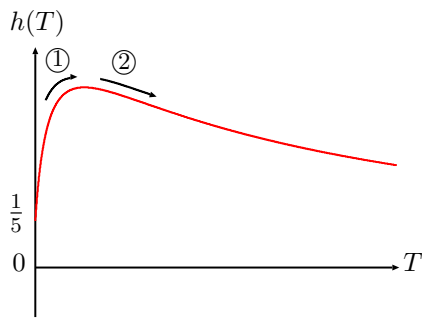


図-16 W型における $h(T)$ グラフ ($a=\frac{5}{4}$)

このとき図-16より任意の $T(\geq 0)$ においてW型のつり合い形状をとることがわかる。また、図-15では $l_2 = \frac{5}{4} l_1$ の線が描け、この線が $T=0$ における l_1, l_2 のグラフ ($T=0$ の線) や h_{\max} における l_1, l_2 のグラフ (h_{\max} の線) と交わることがわかる。まず、図-16における $T=0$ を考えると、図-15で対応しているのは $l_2 = \frac{5}{4} l_1$ の線と $T=0$ の線との交点である座標 (4, 5) である。ここで、図-16の①のように T を h_{\max} の線へ向けて増加させると、式 (27) より $h(T)$ が増加するにしたがって l_2 が減少するので、図-15では①のように対応する l_1, l_2 が座標 (4, 5) から直線 $l_2 = \frac{5}{4} l_1$ 上を h_{\max} の線へ向けて変化する。

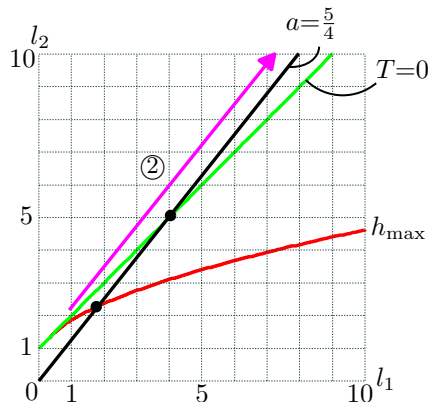


図-17 W型の存在範囲例 ($a=\frac{5}{4}$ の場合②)

そして、図-16の T を h_{\max} の位置からさらに②の方向へ増加させると、式 (27) より $h(T)$ が減少するにしたがって l_2 が増加するので、図-17では対応する l_1, l_2 が h_{\max} の線上から②の方向へ変化していく。すなわち、図-16の T が 0 から増加するにしたがって、図-15、図-17の l_1, l_2 は直線 $l_2 = \frac{5}{4} l_1$ 上を①、②と変化する。つまり、図-15、図-17において h_{\max} の線から上の領域での l_1, l_2 にはW型が存在することは前述のとおりだが、さらに h_{\max} の線と $T=0$ の線に囲まれた領域 (赤色の領域) における l_1, l_2 を与えると、 $T = \tan^2 \beta$ が異なる、すなわち形状が異なる2種類のW型に到達し得ることがわかる。以上から、W型の存在範囲は図-18となる。2種類のW型とあるのは、1つは安定なW型を、

もう1つは安定なM型に対する不安定なW型 (逆M型) を表している。

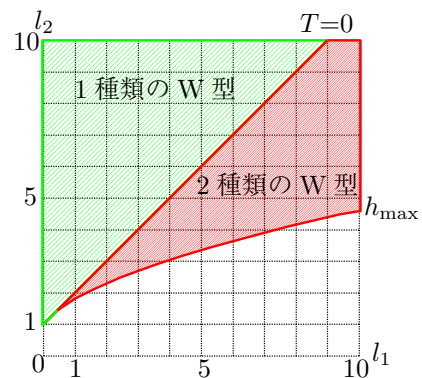


図-18 W型の存在範囲

(4) M型

これまでと同様に、図-19から以下の条件式を立てる：

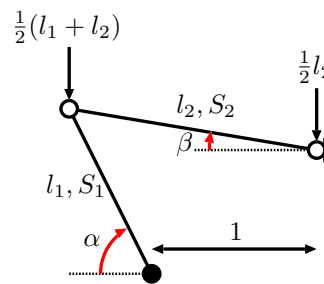


図-19 M型のつり合い状態

(i) 力のつり合い

$$S_2 \sin \beta = \frac{1}{2} l_2 \quad (34)$$

(ii) 力のモーメントのつり合い

$$\frac{1}{2}(l_1 + l_2) l_1 \cos \alpha + S_2 \sin \beta l_1 \cos \alpha = S_2 \cos \beta l_1 \sin \alpha \quad (35)$$

(iii) 幾何条件

$$l_1 \cos \alpha + 1 = l_2 \cos \beta \quad (36)$$

式 (34) と式 (35) から変数 S_2 を消去し、 $a = \frac{l_2}{l_1}$ とおくと

$$\tan \alpha = \frac{l_1 + 2l_2}{l_2} \tan \beta = \frac{1 + 2a}{a} \tan \beta \quad (37)$$

が得られる。式 (36) と式 (37) は、式 (25) と式 (26) とそれぞれ同じ形をしている。すなわち、W型とM型の境界は同一であることがわかる。つまり、先の図-15における h_{\max} の線から上の領域においてM型が存在し、その中でも h_{\max} の線と $T=0$ の線に囲まれた領域 (赤色

の領域)では形状が異なる2種類のM型(安定なM型と、安定なW型に対する不安定なM型(逆W型))が存在する。よって、M型の存在範囲は図-20となる。

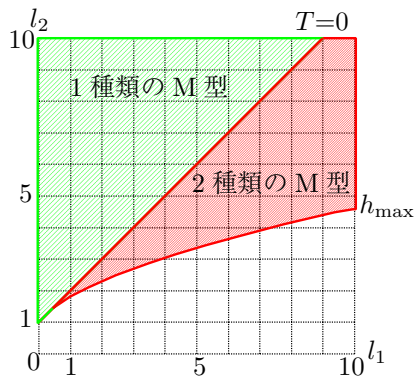


図-20 M型の存在範囲

(5) つり合い形状の種類数マップ

(1)項~(4)項によって、それぞれのつり合い形状をとり得る部材の長さ l_1, l_2 の条件が得られた。最後にこれまでに得られた図をまとめて図-21とする。

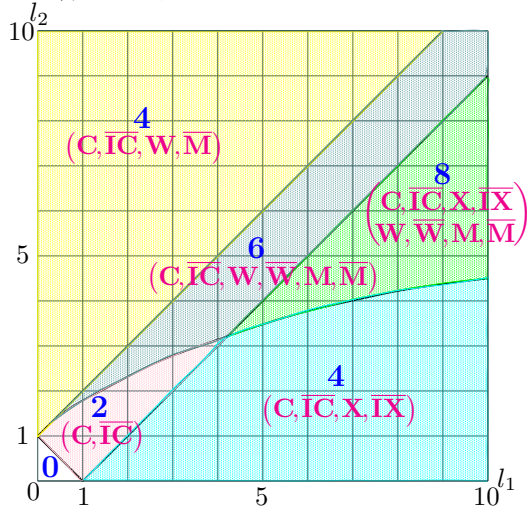


図-21 つり合い形状の個数マップ

図中の青い数字はその領域内の部材長さで与えられるつり合い形状の個数を、その下にあるかっこ内の記号はそれぞれとり得るつり合い形状の種類；

- C → Catenary 型, \bar{C} → 逆 Catenary 型
- X → X 型, \bar{X} → 逆 X 型
- W → W 型, \bar{W} → 逆 W 型
- M → M 型, \bar{M} → 逆 M 型

を表している。つり合い形状の種類は最大で8種類あるが、これまでも論じてきたとおり、安定なつり合い形状4種類(Catenary型,X型,W型,M型)に対して、それぞれ対応する不安定なつり合い形状4種類(逆Catenary型,逆X型,逆W型,逆M型)が常に存在する。つまり、安定なつり合い形状のみを考える場合、図中の青い数字のそれぞれ半数を見ればよい。

もちろん、図-21の各領域におけるつり合い形状の個数については、2.2節の理論から検証することができる。

3. 結論

本研究により、対称な4本トラスという条件のもと、各部材長さとしてトラス構造を重力下においたとき到達するつり合い形状の個数との関係を求めることができた。具体的には、対称な4本トラスにおいて有限変形のため設けた固定点幅に対する各部材長さを設定し、様々な初期形状から数値計算によって重力下においたところ、安定なつり合い形状4種類(Catenary型,X型,W型,M型)と不安定なつり合い形状4種類(逆Catenary型,逆X型,逆W型,逆M型)の計8種類のつり合い形状を発見した。これらのつり合い形状の安定性についても各形状におけるポテンシャルエネルギーから論じた。そして、各つり合い形状における条件式から、部材長さとしてつり合い形状との関係を解析的に求め、これを2次元マップにまとめた。不安定トラス構造の理論に関する最も基礎的な研究として、今回対称な4本トラスについて扱ったが、今後部材数の拡張や非対称性を考慮に入れるなどすることにより、更に不安定構造に関する理論の確立に努めたい。

参考文献

- 1) 田中尚, 半谷裕彦: 不安定トラスの剛体変位と自己応力, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp. 2581-2582, 10 1984.
- 2) 田波徹行: 解の存在条件に基づく構造解析, 日本建築学会構造系論文集, Vol. 73, No. 625, pp. 399-404, 3 2008.
- 3) 阿井正博, 西岡隆, 奥村敏恵: ケーブル構造に関する一理論解析, 土木学会論文報告集, pp. 17-32, 4 1977.
- 4) AI, M., OHSUMI, Y.: The Elastic Catenary as a Displacement-Method Element, *Structural Engineering / Earthquake Engineering*, Vol. 661, pp. 27-32, 10 2000.
- 5) AI, M., IMAI, H.: A Shape-Finding Analysis of Suspended Structures on the Displacement-Method Equilibrium, *Structural Engineering / Earthquake Engineering*, Vol. 21, pp. 27-41, 1 2004.
- 6) 川口健一, 半谷裕彦: 不安定トラスの安定化移行経路に関する考察, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp. 1137-1138, 10 1989.
- 7) 田村武, 西林加織: 不安定トラス構造のつりあい形状の探索に関する基礎的研究, 応用力学論文集, Vol. 11, pp. 361-368, 8 2008.

(2010年3月9日 受付)