

構造物のエネルギー収支に着目した準脆性材料 の破壊靱性評価に関する基礎的研究

Study for evaluating fracture-toughness in quasi-brittle materials based on the energy valance of structures

車谷 麻緒*・湯本 達也**・寺田 賢二郎***・京谷 孝史****・秋山 充良†
Mao KURUMATANI, Tatsuya YUMOTO, Kenjiro TERADA, Takashi KYOYA
and Mitsuyoshi AKIYAMA

*正会員 茨城大学 工学部 都市システム工学科 (〒 316-8511 茨城県日立市中成沢町 4-12-1)

**学生会員 東京工業大学大学院 理工学研究科 国際開発工学専攻 (〒 152-8552 東京都目黒区 2-12-1)

***正会員 東北大学大学院 工学研究科 土木工学専攻 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

****正会員 東北大学大学院 工学研究科 土木工学専攻 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

†正会員 東北大学大学院 工学研究科 土木工学専攻 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

In this paper, we study the fracture toughness of quasi-brittle materials by applying the analysis of crack propagation with the cohesive crack model based on the energy balance between deformation and cracking in a specimen. Owing to this feature, we can not only evaluate fracture energy as an intrinsic material property, but also simulate the size/scale effect behavior as a structural response automatically. After explaining the analysis method for crack propagations incorporated with the cohesive crack model, several numerical examinations for validation and verification are carried out. First, we demonstrate with both theoretical and numerical studies that macroscopic behavior of quasi-brittle materials is characterized by the energy balance of its structure. Second, we illustrate that the fracture energy is uniquely determined and independent of specimen size by evaluating the energy balance for 3-point bend test on differently-sized beam with a single-edge notch.

Key Words : energy balance, fracture process zone, fracture energy, cohesive crack model, size/scale effect in quasi-brittle materials

1. はじめに

ひび割れ進展を伴う準脆性破壊の特徴は、微細ひび割れが累積した「破壊進行領域」と呼ばれる、未破壊領域と完全開口破壊領域との中間領域が形成されることである。破壊進行領域では応力伝達が残存しており、ひび割れの開口に伴い徐々に応力伝達は消失していく。その応力（表面力）と開口変位の関係を規定したグラフは、引張軟化曲線と呼ばれている。引張軟化の開始応力が材料の引張強度 f_t 、引張軟化曲線下の面積が破壊エネルギー G_f であり、これらは引張軟化曲線に着目した f_t と G_f に対する一つ目の定義である（後の図-1を参照）。もう一つの視点として、ひび割れの形成に着目すると、材料の引張強度 f_t を破壊進行領域の発生応力、また破壊エネルギー G_f を単位面積の破壊面を形成するのに必要なエネルギーと見ることができる。 f_t と G_f は、ともに準脆性材料の破壊靱性を特徴付ける「材料の特性値」と考えられるので、準脆性材料の破壊靱性を定量的に評価するには、 f_t と G_f に関する上記の2通りの定義を満足する「材料としての f_t と G_f 」を精度良く求めればよい。

コンクリートの破壊靱性（破壊エネルギー）を評価する方法として、破壊靱性試験と呼ばれる切欠き梁の3点曲げ試験が広く採用されている^{1),2),3)}。RILEM法²⁾は、エネルギーに着目した破壊力学を背景に、破壊靱性試験から得られる荷重-変位曲線下の面積に重力による補正項を加えた後、破断面積でこれ除すことによ

り破壊エネルギーを簡易かつ定量的に評価する方法である。この方法は、評価の簡便性には優れるものの、実験方法に関する誤差がすべて評価に含まれてしまうので、算定した破壊エネルギーには、試験装置の影響や供試体の寸法依存性が指摘されている^{4)~9)}。より高度な引張軟化特性・破壊エネルギーの評価法として、試験結果を利用した逆解析による方法がある。これは、破壊靱性試験の結果から引張軟化曲線の外形を求める方法であり、 J 積分のエネルギー的性質に基づくものや¹⁰⁾、仮想ひび割れモデルを応用したものがある¹¹⁾。しかし、これらの既往の研究成果の多くは、上で説明した1つ目の視点の引張軟化曲線をベースとするものである。基本的には試験結果の利用を前提とするので、実験誤差が評価に含まれるだけでなく、同定された破壊エネルギーは構造の内部において、上で説明した2つ目の視点である「単位面積の破壊面を形成するのに必要なエネルギー」を満足しているとは限らない。供試体という形状・寸法の影響を含まない「材料としての f_t と G_f 」を評価するには、準脆性破壊のメカニズムにかかわる2つ目の視点を重視したボトムアップ式の解析法や評価法を検討する必要がある。

破壊エネルギーに関するもうひとつの考え方として、破壊エネルギーがそもそも領域内で一定ではないとする研究報告がある^{12),13)}。これは、局所的な破壊エネルギーを定義して、領域内部は一定で境界付近で低減するという仮定を基に、破壊エネルギーの寸法依存性を説明するものである。しかし、局所的な破壊エネルギー

の値や分岐点が材料種別や寸法とどのような関係にあるのかは明瞭ではない上、たとえそれが事実であったとしても、材料としての代表的な破壊エネルギーが定まるような評価体系が必要である。

線形破壊力学では、破壊進行領域での軟化挙動を含む準脆性破壊を再現できないことが示されている^{1),14)}。Hillerborg *et al.*¹⁵⁾は、開口変位に依存した結合力をひび割れ面に作用させることにより、コンクリートの非線形軟化挙動を再現可能な仮想ひび割れ・結合力モデル（総称して、Cohesive crack model）を提案した。Cohesive crack model を有限要素法（FEM）に組み込み、陰的なひび割れ進展解析アルゴリズムを採用すれば、構造物における内力・外力・破壊に関するエネルギーの収支を計算することができる。各エネルギーは構造物の形状や寸法によって収支が異なるので、エネルギー収支を計算するという事は構造物の形状・寸法の影響を考慮することになるが、これまで構造物のエネルギー収支に着目して、準脆性材料の破壊靱性を検討した例は見当たらない。

本論文は、構造物のエネルギー収支に着目した数値解析による、準脆性材料（コンクリート）の破壊靱性評価に関する基礎的研究である。第2節では、本研究で用いるひび割れ進展解析手法について説明する。第3節と第4節では、構造物のエネルギー収支に着目した準脆性材料の破壊靱性評価に関する数値検証例を取り上げる。まず、単純な一軸引張試験に対して、寸法効果を含む準脆性材料の見かけの応答が、構造物のエネルギー収支に基づいていることを理論解析と数値解析により説明する。次に、破壊靱性試験で用いられる切欠き梁の寸法効果を含む見かけの応答も、エネルギー収支の観点から評価可能であることを順解析と逆解析で検証する。第5節では、本研究の総括を行い、今後の展望について述べる。

2. 変形と破壊のエネルギー収支に着目した準脆性材料のひび割れ進展解析手法

本論文で用いる数値解析手法について説明する。はじめに、引張強度と破壊エネルギーをパラメータとする Cohesive crack model の導入方法と離散ひび割れ形成のモデル化を示した後、構造物のエネルギー収支に着目した準脆性破壊の数値解析法について述べる。

2.1 Cohesive crack model の導入と応用

コンクリートはガラスなどの脆性材料とは異なり、軟化挙動を示す準脆性的な材料として知られている。軟化挙動とは、図-1 に示すように、ひび割れの生じていない未破壊領域と完全な開口破壊領域との中間に存在する破壊進行領域（Fracture Process Zone; FPZ）において、ひび割れ幅の増大に伴い応力伝達が消失していく現象である。

Hillerborg *et al.*¹⁵⁾が考案した Cohesive crack model は、FPZ での力学挙動をモデル化した代表的なものであり、図-1 のように FPZ の全体を単一の仮想ひび割れに置換し、FPZ での応力伝達を仮想ひび割れ面上の結合力

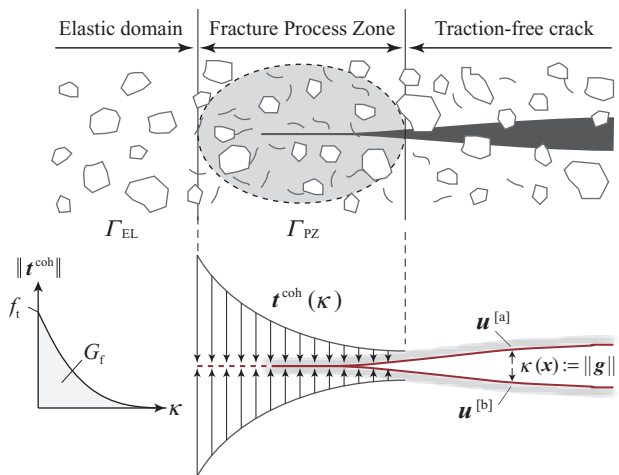


図-1 破壊進行領域と Cohesive crack model

（表面力）で代用するモデルである。この表面力の大きさは、開口変位と表面力の関係を表した引張軟化曲線により定められ、引張軟化曲線下の面積は破壊エネルギーと呼ばれている。このモデルは、線形破壊力学におけるひび割れ先端部での応力特異性を考慮することなく、準脆性材料のひび割れ進展問題に適用可能であることに加え、つり合い方程式に結合力の項を付与するだけであるので FEM と相性が良い。

既往の研究¹⁶⁾において、コンクリートやモルタルの引張軟化曲線は、引張強度と破壊エネルギーをパラメータとして、材料の種類によらず一本の曲線で代表可能であることが示されている。本研究では、次式で表されるような、引張強度と破壊エネルギーを材料パラメータとして直接考慮可能で、かつ実験結果と整合性の良い指数関数型の表面力-開口変位関係^{17),18)}を引張軟化則として与えることとする（詳細は付録 I を参照）。

$$\|t^{\text{coh}}\| = f_t \exp\left(-\frac{f_t}{G_f} \kappa\right) \quad \text{on } \Gamma_{\text{PZ}} \quad (1)$$

ここで、 Γ_{PZ} は破壊進行領域に相当する破壊面（図-1 参照）、 $\|t^{\text{coh}}\|$ は図-1 のように作用する結合力ベクトルの大きさ、 f_t は引張強度、 G_f は破壊エネルギー、 κ は載荷履歴における最大開口変位である。

ただし、第1節で述べたように、本論文における f_t と G_f は「材料としての引張強度と破壊エネルギー」である。すなわち、 f_t は割裂試験から定まるものではなく、 G_f は RILEM 法のように実験で得られる曲線下の面積から定めるものではない。これらは、引張軟化曲線から見れば、 f_t は引張軟化の開始応力、 G_f は引張軟化曲線下の面積、FPZ から見れば、 f_t は FPZ の発生応力、 G_f は単位面積の破壊面を形成するのに必要なエネルギーと定義される。なお、後述するが、本論文では実験結果等のグラフ曲線から逆解析的に定まる破壊エネルギーを、式(1)の G_f と区別して、 G_F と表記する。

Cohesive crack model において不連続面の開口を取り扱う際、本研究では不連続面における相対変位ベクトル g で開口変位を定義する。

$$g = u^{[a]} - u^{[b]} \quad \text{on } \Gamma_{\text{PZ}} (\Gamma_{\text{EL}}) \quad (2)$$

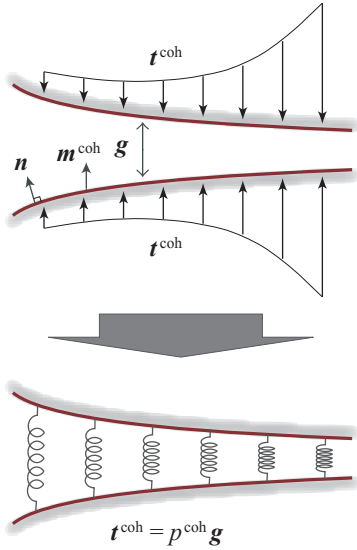


図-2 バネの反力でモデル化した Cohesive crack model

ここで、 $u^{[a]}$, $u^{[b]}$ は図-1 に示されるような不連続面（ひび割れ境界面）における変位ベクトルである． 相対変位ベクトル g を用いて，結合力ベクトル t^{coh} は次式で表される．

$$t^{\text{coh}} = \left\| t^{\text{coh}} \right\| \frac{g}{\|g\|} \quad (3)$$

Cohesive crack model を用いた一般的なひび割れ進展解析では，式 (1) で規定される結合力を分布外力による力学的境界条件と同様に扱っている^{15),17),18)}．しかし，表面力の付与は軟化型の数値解析とは相性が良くないことから，本研究では，図-2 および次式に示すように，Cohesive crack model で規定される結合力をバネの反力で書き換える¹⁹⁾．

$$t^{\text{coh}} = p^{\text{coh}} g \quad \text{on } \Gamma_{\text{PZ}} \quad (4)$$

ここで， p^{coh} は不連続面での相対変位方向の応力伝達（粘着）をモデル化するためのバネ剛性であり， $g \approx 0$ の場合には一般的なペナルティ法におけるペナルティ係数と同一視できる．本研究では，繰り返し計算¹⁹⁾により p^{coh} を近似することとし，式 (4) を次のように書き換えておく．

$$p^{\text{coh}} = \frac{\|t^{\text{coh}}\|}{\|g\|} \quad (5)$$

なお，本研究では，式 (1) における最大開口変位の履歴変数 κ は $\|g\|$ で定めることとする．

2.2 弱形式のつり合い方程式

本研究の主な解析対象は，切欠き梁の3点曲げ試験のようなひび割れ進展経路が既知の問題であるので，破壊面形成のモデル化には，簡易なひび割れ進展解析法として知られる，ひび割れ発生位置にインターフェイス要素を用いる離散ひび割れモデルを適用する．そして，インターフェイス要素にペナルティ法を適用するこ

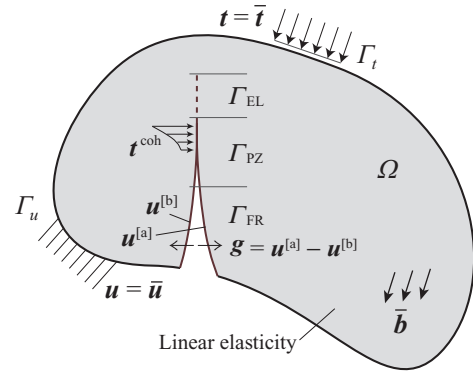


図-3 ひび割れを含む準脆性材料の物理問題

とにすれば，ひび割れ発生時点でペナルティ係数をバネ剛性とみなせるので，バネで近似した Cohesive crack model の式 (4) をそのまま利用することができる．すなわち，破壊進行領域が形成する前の弾性解析では，未破壊の弾性領域 Γ_{EL} をペナルティ法によるバネ剛性 \bar{p} で近似し，破壊判定後は破壊進行領域 Γ_{PZ} を Cohesive crack model に基づくバネ剛性 p^{coh} で近似することになる．

本研究では，図-3 に示すような，ひび割れを含む準脆性材料の準静的なつり合い問題を対象とする．このような問題に対して，上で述べたペナルティ法と Cohesive crack model を考慮した弱形式のつり合い方程式は，次式で与えられる．

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla \delta u : \sigma \, d\Omega \\ & + \underbrace{\int_{\Gamma_{\text{EL}}} \bar{p} \delta g \cdot g \, d\Gamma}_{\text{Penalty term}} + \underbrace{\int_{\Gamma_{\text{PZ}}} p^{\text{coh}} \delta g \cdot g \, d\Gamma}_{\text{Cohesive crack term}} \\ & = \int_{\Omega} \delta u \cdot \bar{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta u \cdot \bar{t} \, d\Gamma \quad \forall \delta u \quad (\forall \delta g) \quad (6) \end{aligned}$$

ここで， σ は Cauchy 応力テンソル， Ω は物体領域， Γ_{EL} は未破壊の弾性境界（図-1 参照）， Γ_t は Neumann 境界， \bar{b} と \bar{t} はそれぞれデータとして与えられる物体力ベクトルと分布外力ベクトルである． \bar{p} はペナルティ係数であり，構成材料のヤング率の 10^4 倍程度の大きな実数を設定する．なお，本研究では，材料の挙動は線形弾性体に従うものとする．

2.3 破壊（離散ひび割れ形成）の判定

式 (6) で与えたペナルティ係数の本来の意味は，「変位拘束を課すための物理的に意味のない係数」であるが，相対変位を許容した時点で「相対変位を小さく抑えるための物理的に意味のある大きなバネ剛性」とみなすことができる．したがって，本研究ではペナルティ係数をバネ剛性と読みかえることとし，式 (4) と同様に，ここでのペナルティ法における拘束面上の表面力 λ は，バネ係数 \bar{p} の反力として次式により計算する．

$$\lambda = \bar{p} g \quad \text{on } \Gamma_{\text{EL}} \quad (7)$$

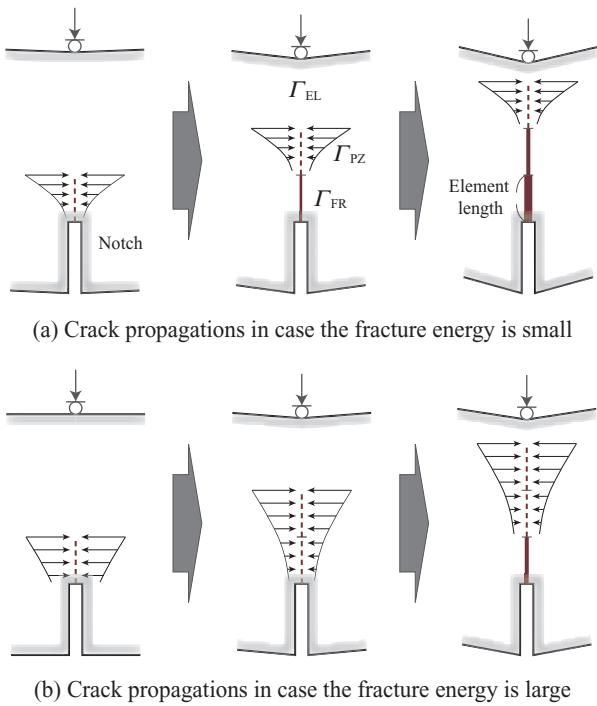


図-4 破壊エネルギーの大小に対するひび割れ進展の相違

本研究では、この表面力を用いて、破壊（離散ひび割れ）の発生基準を次のように定めることにする。

$$\lambda \cdot \mathbf{n} > 0 \text{ and } \|\lambda\| - f_t = 0 \quad (8)$$

ここで、 \mathbf{n} は Γ_{EL} , Γ_{PZ} における外向き単位法線ベクトルである。本研究では、FEMにおいて離散誤差を生じやすい応力を破壊の判定に用いないので、破壊判定に対するメッシュ依存性はほとんど生じない。

本論文において、破壊の判定は Γ_{EL} が Γ_{PZ} に移行することを意味する。すなわち、本論文における f_t の定義どおり、式 (8) が満たされれば、破壊進行領域が形成され、Cohesive crack modelに従って軟化応答が開始することになる。

2.4 エネルギー収支に着目したひび割れ進展解析

Cohesive crack modelを有限要素解析に組み込むことにより、構造内部における変形と破壊のエネルギー収支に基づいた破壊の数値解析が行える。これは、ひび割れ（破壊）の形成・進展によって消散するエネルギーの量は、付与された外力エネルギーと構造内部のひずみエネルギーとの収支によって決まることを意味する。したがって、ひび割れ進展領域のみ、あるいはCohesive crack modelのみの解析では不十分であり、外力・破壊・内力のエネルギーがすべて見積もられるよう、構造物の境界値問題として扱わなければならない。

構造物のエネルギー収支を評価可能な数値解析を行うには、外力・破壊・内力に関する仕事（エネルギー）の式を扱えばよい。すなわち、Cohesive crack modelを考慮した弱形式のつり合い方程式 (6) を一般的な固体の有限要素で離散化し、その離散化方程式を陰的なアルゴリズムで解けばよく、それによって得られた結果

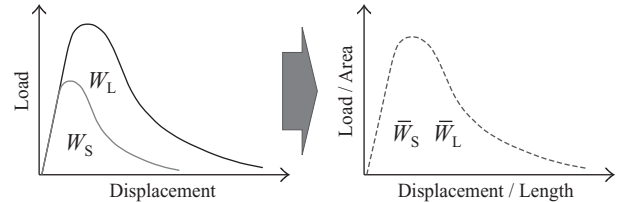
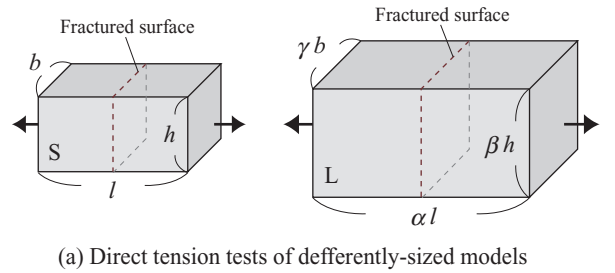


図-5 寸法・大きさの異なる要素モデルの直接引張試験

は、内力・破壊・外力に関するエネルギー収支を考慮したものとなる。

コンクリートのひび割れ解析では、しばしば破壊進行領域の大きさが問題となる^{21),22),23)}。これについては、明確な関係性が示されておらず、数値解析においては何らかの仮定を設ける必要がある。本研究では、図-4に示すように、ひび割れ境界面に配置する要素ごとに破壊進行領域が形成されるものとし、その大きさは、構造物の境界値問題を陰的に解くことによって、破壊と変形のエネルギー収支に基づいて決定される。すなわち、破壊進行領域の大きさは、ひび割れ境界要素の大きさと構造物のエネルギー収支に基づく陰的な数値解析により自動的に調節され、またメッシュ分割数にほとんど依存しない解を得ることができる¹⁹⁾。

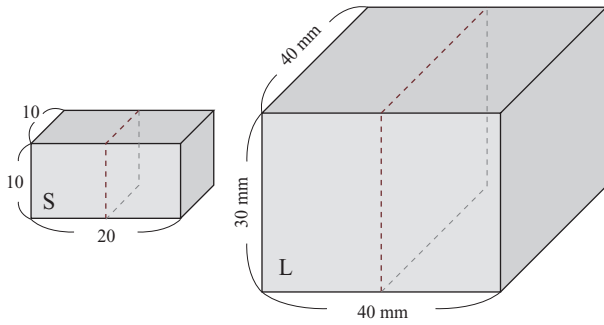
本研究で採用するひび割れ進展解析法は、各種コンクリートの準脆性破壊挙動を適切に再現できることを、付録IIに示しておく。

3. 理論解析と数値解析による準脆性破壊のエネルギー的考察

本節では、直接引張問題を対象に、寸法効果を含む準脆性材料の見かけの応答が、構造物のエネルギー収支に基づいていることを理論解析と数値解析により検証する。具体的には、材料の破壊靱性が同じであっても、構造物の寸法や大きさによって見かけの応答が異なることを、理論解析を通じてエネルギー収支の観点から考察するとともに、本研究で採用した数値解析手法がその一連のプロセスを自然に再現可能であることを例示する。

3.1 検討対象

解析対象は、図-5(a)に示すような単純な要素モデルの直接引張問題である。大きさの異なるSとLの2つのモデルを対象とし、それぞれの破壊靱性を比較・検



	Model S	Model L-1	Model L-2
Young's modulus (MPa)	20000	20000	20000
Poisson's ratio	0.20	0.20	0.20
Tensile strength (MPa)	2.0	2.0	2.0
Fracture energy (N/mm)	0.10	0.10	0.20

図-6 寸法・大きさの異なる直接引張試験の数値解析モデル

討する。各モデルともに、中央部のみで破壊面が形成されると仮定し、引張り以外の変形は起こらないものとする。

3.2 理論解析

理論解析では、破壊の詳細には着目せず、大きさの異なる S と L が中央部のみで準脆性破壊を起こし、図-5(b) のような荷重-変位関係が得られたとし、中央部での破壊に関するエネルギー収支について解析する。まず、大きさの影響を打ち消すため、図-5(b) のように、荷重-変位関係を見かけの応力-ひずみ関係に変換する。それぞれの曲線で囲まれる面積、すなわち外力による仕事の関係式は次のように表される。

$$\bar{W}_S = \frac{1}{bhl} W_S, \quad \bar{W}_L = \frac{1}{\alpha\beta\gamma bhl} W_L \quad (9)$$

ここで、 W_* は外力エネルギー（外力仕事）、 \bar{W}_* は単位体積当たりの外力仕事（外力エネルギー密度）である。

簡単のため、外力による仕事はすべてひび割れの形成に消費されるものと仮定する。単位面積の破壊面（ひび割れ）を形成するのに必要なエネルギーが材料の破壊エネルギーであるので、これに破壊面積を掛けることにより、エネルギーの関係式は次のようになる。

$$(\text{外力仕事}) = (\text{破断面積}) \times (\text{破壊エネルギー}) \quad (10)$$

すなわち、それぞれの破壊エネルギーを G_f^S, G_f^L とすると、上式は次の関係となる。

$$W_S = bh G_f^S, \quad W_L = \beta\gamma bh G_f^L \quad (11)$$

式 (9) と (11) から、外力エネルギー密度と破壊エネルギーとの関係は次のように表される。

$$\bar{W}_S = \frac{1}{l} G_f^S, \quad \bar{W}_L = \frac{1}{\alpha l} G_f^L \quad (12)$$

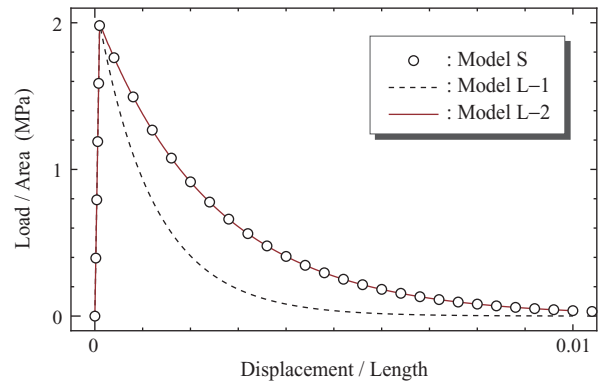


図-7 直接引張試験における見かけの荷重-変位関係

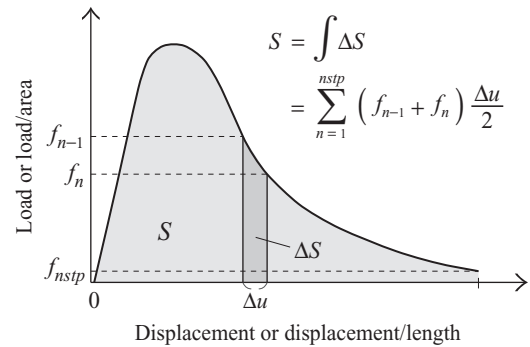


図-8 台形公式による積分と消散エネルギー

エネルギーの収支に着目して、上式の関係式を次の2通りで解釈することにする。

$$G_f^S = G_f^L \Rightarrow \bar{W}_L = \frac{1}{\alpha} \bar{W}_S \quad (13)$$

$$\bar{W}_S = \bar{W}_L \Rightarrow G_f^L = \alpha G_f^S \quad (14)$$

すなわち、単純な一軸引張問題において、破壊特性は荷重方向の幾何形状の比 α のみに依存しており、それぞれの関係式 (13), (14) は次のことを意味している。

- ① 寸法 l が α 倍のとき、破壊エネルギーが同じであれば供試体の靱性能は $1/\alpha$ 倍となる、
- ② 寸法 l が α 倍のとき、破壊エネルギーも α 倍すれば同じ破壊靱性が得られる。

次節の数値解析において、①と②の結果を検証する。

3.3 数値解析

理論解析から得られた①と②の結果を数値解析で検証する。解析モデルと材料パラメータを図-6に示す。モデルの幾何形状については、 $(l, h, b) = (20, 10, 10)$ 、 $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 4)$ とし、モデル S を基準に①に対応する L-1 と②に対応する L-2 の計3ケースの数値解析を行う。3ケースともに、低次の六面体要素（2要素）を用いてモデル化し、強制変位 0.4 mm を与える一軸引張り問題を設定する。

数値解析結果として、見かけの応力-ひずみ関係を図-7に示す。まず、モデル S と L-1 は前節の①に対応しており、両者の結果には靱性能の相違が見取れる。

これらは材料パラメータが同一で寸法のみが異なることから、いわゆる「寸法効果」をモデルの幾何形状の相違のみで再現したことになる。ただし、本手法が再現する寸法効果は、準脆性材料の破壊力学における巨視的な寸法効果であり²⁰⁾、供試体実験で考察されるような変形の不均一性や境界条件の影響による寸法効果ではない。

①の考察によれば、寸法 l が α 倍されると靱性能は $1/\alpha$ 倍となっているので、次にモデル S と L-1 の靱性能の相違を定量的に比較する。比較方法としては、図-8 に示すように、見かけの応力-ひずみ曲線下の面積を台形公式で計算することにより、準脆性破壊によって消散されたエネルギー密度を求める。台形積分により求めたモデル S のエネルギー密度を \bar{S}_S 、モデル L-1 のエネルギー密度を \bar{S}_{L-1} とし、両者の比を計算すると、

$$\frac{\bar{S}_{L-1}}{\bar{S}_S} = \frac{2.49829 \dots \times 10^{-3}}{4.99632 \dots \times 10^{-3}} = 0.50003 \dots \approx \frac{1}{\alpha}$$

となり、①の結果を正しく再現していることが分かる。また、モデル S の体積と破壊面積を V_S, A_S 、モデル L の体積と破壊面積を V_L, A_L とし、破壊エネルギーの定義から、破壊によって消散されたエネルギーを破壊面積で除すと、

$$\begin{aligned} \frac{\bar{S}_S \times V_S}{A_S} &= \frac{4.99632 \dots \times 10^{-3} \times 2000}{100} \\ &= 0.099926 \dots \approx 0.1 \text{ N/mm} \\ \frac{\bar{S}_{L-1} \times V_L}{A_L} &= \frac{2.49829 \dots \times 10^{-3} \times 48000}{1200} \\ &= 0.099932 \dots \approx 0.1 \text{ N/mm} \end{aligned}$$

となり、両者ともに材料パラメータとして与えた破壊エネルギーを再生していることが分かる。このように、構造物のエネルギー収支に着目した本研究のひび割れ進展解析法は、材料パラメータとしての破壊エネルギーと対象構造物の有限要素モデルを用いて、形状・寸法の影響を加味した構造物の見かけの応答の相違を再現することができる。

一方、モデル S と L-2 は前節の②に対応しており、両者の結果は完全に一致したものとなっている。モデル S と L-1 の比較で見たように、材料パラメータが同じであれば寸法効果が発現するが、L-2 は破壊エネルギーを 2 倍にしたことにより、寸法効果による脆性化が相殺されている。すなわち、前節の②の考察どおりの結果となっている。このように、材料の破壊エネルギーと構造の寸法効果は密接な（従属の）関係にあり、準脆性材料の「材料としての靱性能」を適切に評価するには、破壊エネルギー（材料）と寸法効果（構造）を適切に捉える必要があり、本研究のようなエネルギー収支に着目した評価が望ましいと言える。

4. エネルギー収支に着目した切欠き梁の 3 点曲げ試験の数値実験

2 つ目の検証例として、ここでは、破壊靱性試験として広く採用されている切欠き梁の 3 点曲げ試験を取り

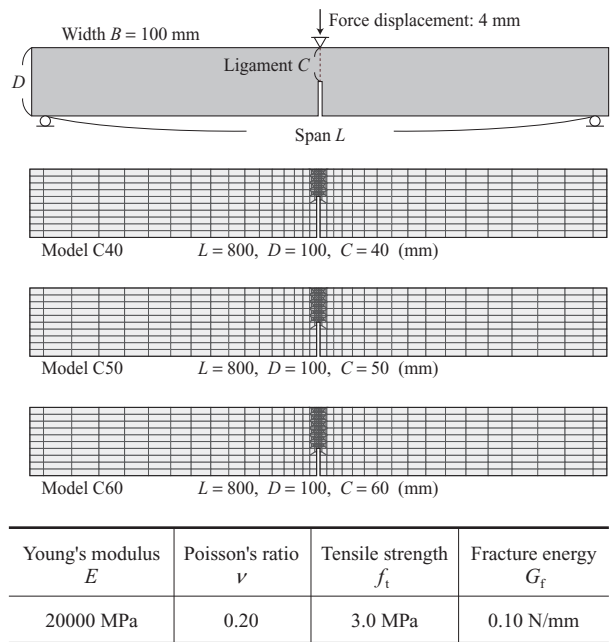


図-9 切欠き長さの異なる梁の 3 点曲げ試験

上げ、その準脆性破壊におけるエネルギー的性質について検討する。また、エネルギー収支の観点から、供試体の寸法・大きさによる影響と材料の破壊靱性・破壊エネルギーとの関係性についても考察する。

4.1 切欠き長さの異なる梁供試体

破壊エネルギーの定義は、単位の破壊面（ひび割れ）を形成するのに必要なエネルギー、または形成する際に消散されるエネルギーである。J 積分のエネルギー的性質を応用した既往の研究¹⁰⁾によれば、切欠き長さがわずかに異なる 2 体の梁供試体の 3 点曲げ試験を行い、消散エネルギーの差と切欠き長さの差を利用して、コンクリートの引張軟化特性を求める方法が提案されている。ここでは、その J 積分のエネルギー的性質を参照し、切欠き梁の 3 点曲げ試験の数値実験を行い、準脆性破壊におけるエネルギー的性質について検討・考察する。

(1) 解析対象と条件

解析対象は、図-9 に示すような、RILEM 法²⁾に準じた切欠き梁の 3 点曲げ問題とする。梁のスパン L ・高さ D ・幅 B は一定で、切欠き長さのみが異なる 3 つのモデルを対象とする。使用した有限要素は双一次四辺形要素である。同図に示す材料パラメータを設定し、変位制御によるひび割れ進展解析を行う。

(2) 解析結果と考察

数値解析結果のグラフを図-10 に示す。図中 (a) は載荷点における荷重-変位関係を表しており、(b) は荷重-変位関係から寸法の影響を取り除くためにスパンとリガメント面積で正規化したものである。これらの曲線下の面積が変形と破壊によって消散されたエネルギーであるので、図-8 で示した台形積分を利用して、エネルギー収支と破壊エネルギーについて検討する。

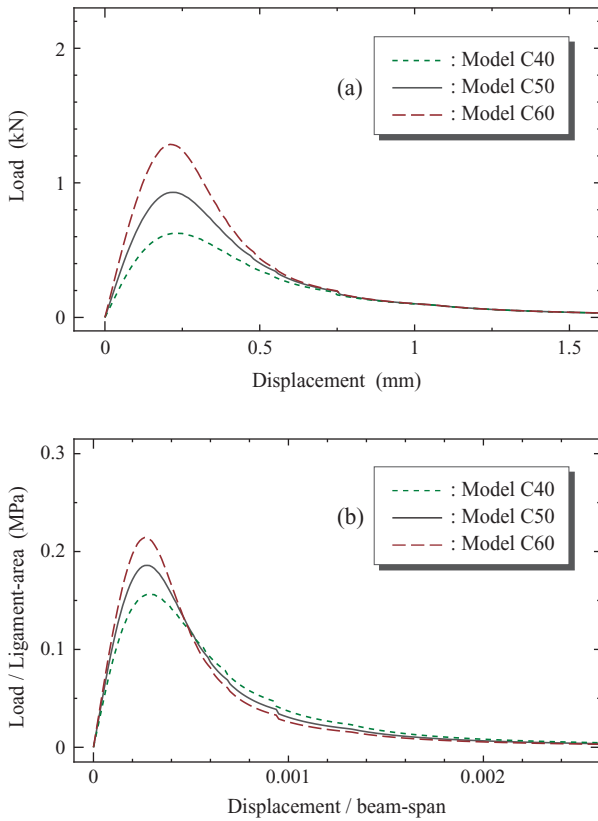


図-10 切欠き長さの異なる梁に対する荷重-変位関係と正規化した見かけの荷重-変位関係

図-10(a)の荷重-変位関係を対象に、台形積分で計算した消散エネルギーをリガメント面積で除すことにより、各モデルの見かけの破壊エネルギー G_F は次のように評価される。本論文では、このように逆解析的に求められる見かけの破壊エネルギーを G_F と表記し、式(1)の G_f とは区別することとする。

$$G_F^{C40} = \frac{3.92199 \cdots \times 10^2}{40 \times 100} = 0.09804 \cdots \approx 0.1 \text{ N/mm}$$

$$G_F^{C50} = \frac{4.92555 \cdots \times 10^2}{50 \times 100} = 0.09851 \cdots \approx 0.1 \text{ N/mm}$$

$$G_F^{C60} = \frac{5.92683 \cdots \times 10^2}{60 \times 100} = 0.09878 \cdots \approx 0.1 \text{ N/mm}$$

数値解析結果から逆解析的に求めた見かけの破壊エネルギー G_F は、材料パラメータとして与えた $G_f = 0.1 \text{ N/mm}$ を精度良く再現していることが見て取れる。前節の結果と比較して、破壊エネルギー G_F に誤差が含まれる理由は、直接引張試験と比較して3点曲げ試験では、荷重点付近でのひび割れ幅の開口が進まないからである。変位量を大きくして数値解析を進めれば、より高精度な G_F を再生することができる。

次に、 J 積分のエネルギー的性質を利用して、各モデルの消散エネルギーの差を切欠き長さの差で除すことによって、破壊エネルギーを計算する。上の値を用いて、モデル C50 と C40 から求めた破壊エネルギー G_F^{50-40} とモデル C60 と C50 から求めた破壊エネルギー G_F^{60-50} は、次のように計算される。

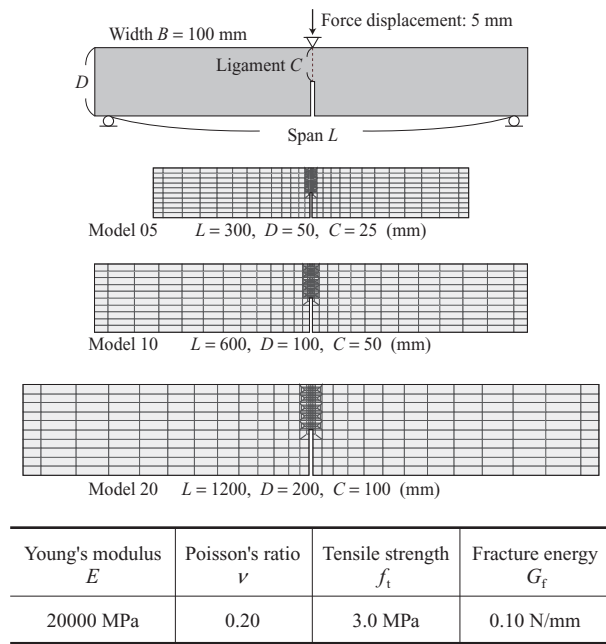


図-11 大きさの異なる切欠き梁の3点曲げ試験

$$G_F^{50-40} = \frac{4.92555 \times 10^2 - 3.92199 \times 10^2}{(50 - 40) \times 100} = 0.10035 \cdots \approx 0.1 \text{ N/mm}$$

$$G_F^{60-50} = \frac{5.92683 \times 10^2 - 4.92555 \times 10^2}{(60 - 50) \times 100} = 0.10012 \cdots \approx 0.1 \text{ N/mm}$$

これらの値は、上記の値と比較すると、より高精度で材料パラメータの破壊エネルギー G_f を再生していることが分かる。これは、供試体の切欠き長さの差と消散エネルギーの差を利用して、擬似的なひび割れ進展を再現したことにより、 J 積分におけるエネルギー解放量、すなわち破壊エネルギーの定義に近いエネルギー量を見積もったからである。

4.2 大きさの異なる梁供試体

準脆性材料は、構造物の幾何形状が同じであっても、その大きさによって見かけの挙動が異なるといった「寸法効果」の発現が知られている。ここでは、大きさの異なるモデルを対象に、準脆性破壊における寸法効果とエネルギー収支の関係について考察する。

(1) 解析対象と条件

解析対象は、図-11に示すような、切欠き梁の3点曲げ問題とする。梁の幅 B を一定とし、スパン L ・高さ D ・切欠き長さ C を相似的に変化させた3つのモデルを対象とする^{4),7)}。有限要素メッシュはすべて同じであり、単純に大きさのみが異なるモデルである。使用した有限要素は双一次四辺形要素である。同図に示す材料パラメータを設定し、変位制御によるひび割れ進展解析を行う。

(2) 解析結果と考察

数値解析結果のグラフを図-12に示す。図中(a)は載荷点における荷重-変位関係を表しており、(b)は荷

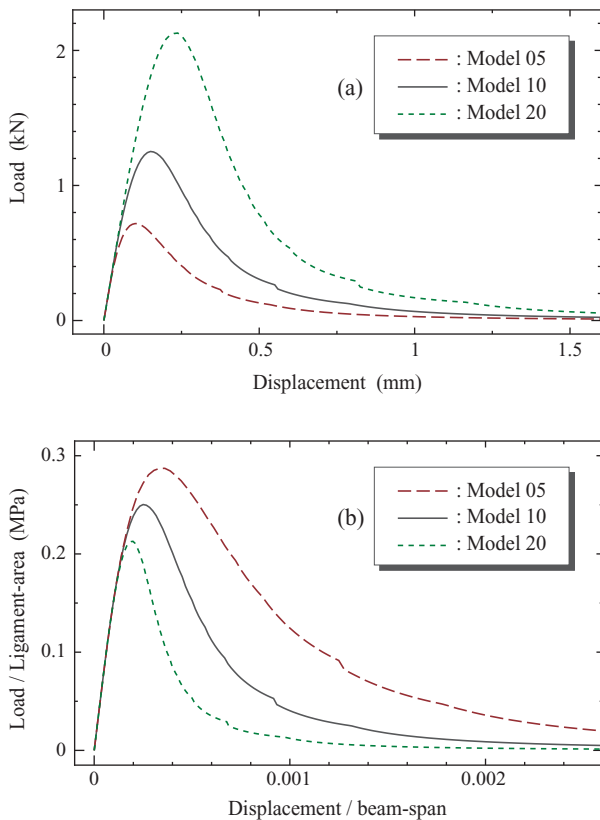


図-12 大きさの異なる切欠き梁に対する荷重-変位関係と正規化した見かけの荷重-変位関係

重-変位関係から寸法の影響を取り除くためにスパンとリガメント面積で正規化したものである。図-12(b)において、小さいモデルほど高強度・高靱性であるといった寸法効果が再現されている。与えている材料パラメータは3モデルともに共通であり、本研究で採用した数値解析手法はメッシュ寸法に依存しないので¹⁹⁾、有限要素モデルの違いのみを用いて、寸法効果を含む構造物の挙動を再現したことになる。

次に、変形と破壊に関するエネルギー収支と破壊エネルギーについて検討する。図-12(a)の荷重-変位関係を対象に、台形積分で計算した消散エネルギーをリガメント面積で除すことにより、各モデルの見かけの破壊エネルギー G_F は次のように評価される。

$$G_F^{05} = \frac{2.49493 \cdots \times 10^2}{25 \times 100} = 0.09979 \cdots \approx 0.1 \text{ N/mm}$$

$$G_F^{10} = \frac{5.00978 \cdots \times 10^2}{50 \times 100} = 0.10019 \cdots \approx 0.1 \text{ N/mm}$$

$$G_F^{20} = \frac{1.00876 \cdots \times 10^3}{100 \times 100} = 0.10087 \cdots \approx 0.1 \text{ N/mm}$$

各モデルは、見かけの応答として寸法効果を示していたが、解析結果の消散エネルギーから逆解析的に破壊エネルギーを求めると、各モデルともに材料パラメータである破壊エネルギー G_F を精度良く再生している。すなわち、構造物のエネルギー収支を計算することにより、破壊エネルギーを含む材料パラメータと供試体に即した幾何形状の有限要素メッシュを設定するだけ

で、材料の破壊靱性（破壊エネルギー）と構造物の挙動（寸法効果）の両方を自動的に評価可能である。したがって、供試体実験の結果は、供試体という形状・寸法の影響を含む見かけの応答に過ぎないので、例えば、実験結果の荷重-変位関係に数値解析結果をキャリブレートすれば、材料としての破壊靱性（引張強度と破壊エネルギー）を同定することができる。

5. おわりに

ひび割れ進展を伴う準脆性材料（コンクリート）の破壊の特徴は、破壊進行領域を形成し、軟化挙動を示すことである。加えて、この破壊進行領域の存在により、準脆性材料で構成される構造物の力学挙動は、その形状や寸法の影響を含んだ挙動となることが知られている。準脆性材料の破壊靱性を評価するには、供試体実験の応答結果を利用することになるが、実験結果には供試体という構造物の影響が含まれている。構造物の形状や寸法の相違は、内力・外力・破壊によるエネルギーの収支に反映されるので、エネルギー収支を計算すれば構造物の形状・寸法の影響を考慮できることになるが、これまで構造物のエネルギー収支に着目して、準脆性材料の破壊靱性を検討した例は見当たらなかった。

本論文では、構造物の破壊と変形に関するエネルギー収支に着目し、これを計算可能なひび割れ進展解析手法を用いた準脆性材料の破壊靱性評価について検討した。そして、寸法効果を含む準脆性材料の見かけの応答が、構造物のエネルギー収支に基づいていることを理論解析と数値解析により検証した。さらに、破壊靱性試験で用いられる切欠き梁の3点曲げ試験における寸法効果を含む見かけの応答も、エネルギー収支の観点から説明可能であることを順解析と逆解析で検証した。

本論文で示した数値解析・評価法は、材料を均質とみなし、またひび割れ進展経路を一直線（一平面）と仮定したので、実際の非均質な材料・力学挙動を陰的に扱った巨視的な破壊靱性評価と位置づけられる。今後の課題として、材料の非均質性やひび割れ挙動の不均一性を考慮した、微視的なアプローチの必要性・適用性を議論する必要がある。また、本研究のような数値解析の立場から見た、供試体実験の試験方法の在り方についても検討していく予定である。

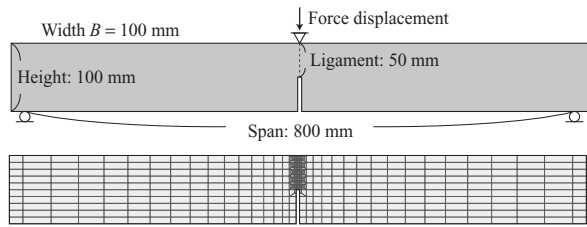
謝辞

本研究は、第一著者が日本学術振興会の特別研究員であった期間に行われ、特別研究員奨励費の援助を受けました。ここに記して感謝いたします。

I. 引張軟化則の定式化

本研究では、準脆性材料（コンクリート）の引張軟化曲線 $f(x)$ を決定するに際し、実験結果との整合性が良い指数関数型を採用する。具体的には、まず、 A と B を定数、 x を開口変位とする次式を仮定する。

$$f(x) = Ae^{(-Bx)} = A \exp(-Bx) \quad (\text{I.1})$$



	E (kgf/cm ²)	f_T (kgf/cm ²)	G_F (kgf/cm)
Plain mortar	290000	35.1	0.0831
Plain concrete	250000	33.7	0.165
Polymer (10%) mortar	210000	42.5	0.106
Polymer (15%) mortar	190000	51.2	0.129
Steel fiber (1%) concrete	250000	38.0	4.47
Steel fiber (2%) concrete	300000	40.3	8.46

図-13 各種コンクリート材料を用いた切欠き梁の3点曲げ試験と破壊靱性の評価値

図-1を参照し、引張軟化の開始応力が f_t であるので、 $f(0) = f_t$ より、 $A = f_t$ となる。そして、引張軟化曲線下の面積が破壊エネルギー G_F であるので、

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \left[-\frac{A}{B} \exp(-Bx) \right]_0^{\infty} = G_F \quad (I.2)$$

より、 $B = f_t/G_F$ となる。以上より、本論文で用いる引張軟化則 $f(x)$ は次式で与えられる。

$$f(x) = f_t \exp\left(-\frac{f_t}{G_F} x\right) \quad (I.3)$$

II. 各種コンクリート材料への適用例

ここでは、既往の供試体実験の結果¹⁶⁾を対象に、実際のコンクリート材料に対する本評価法の適用例を示す。

II.1 解析・評価の対象

解析対象は、図-13に示すような、文献¹⁶⁾で行われた切欠き梁の3点曲げ試験である。供試体は、RILEM法²⁾に準じており、モルタル、コンクリート、混入率10%と15%のポリマーモルタル、混入率1%と2%の鋼繊維補強コンクリートの計6ケースの準脆性材料を対象としている。図中の E はヤング率、 f_T は引張強度、 G_F は破壊エネルギーであり、これらは文献¹⁶⁾において計測・評価された参考値である。数値解析では、同図に示す有限要素メッシュを与えて、平面応力条件下の変位制御によるひび割れ進展解析を行う。また、実際に行われた実験を模擬するため、本節の数値解析においては、密度を 2000 kg/m^3 とする重力項を考慮する。

II.2 適用結果と考察

ヤング率・引張強度・破壊エネルギーを変化させて、試行計算の繰り返しによるキャリブレーションを行った。実験結果¹⁶⁾の荷重-変位関係とキャリブレーション

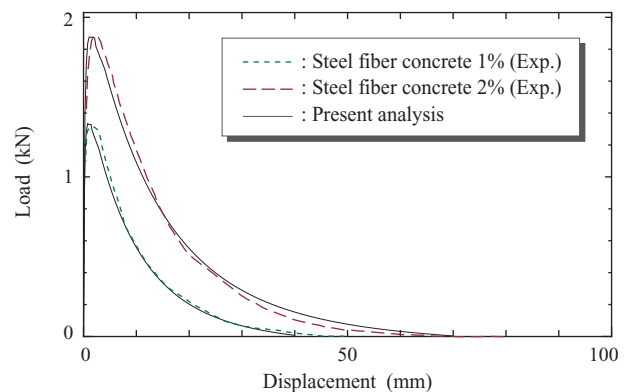
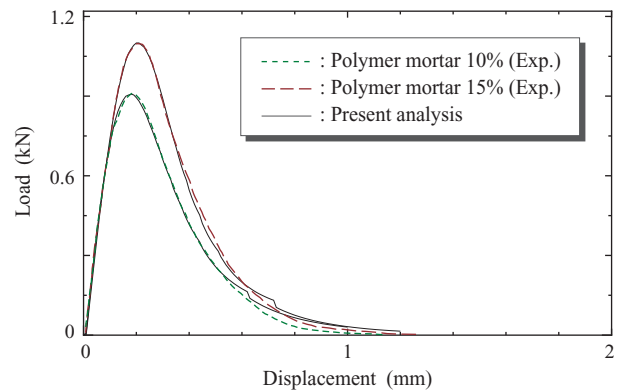
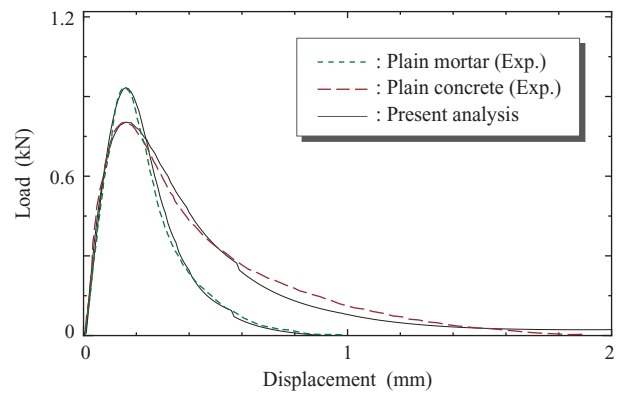


図-14 実験結果の荷重-変位関係に対する数値解析によるキャリブレーションの結果

により得られた荷重-変位関係を図-14に示す。6ケースすべてにおいて、数値解析により得られた結果は実験結果¹⁶⁾と非常によく一致しており、本研究で採用したひび割れ進展解析法は各種コンクリート材料に適用可能であることが分かる。

表-1は、キャリブレーションにより最終的に決定された材料パラメータ、すなわち構造物のエネルギー収支を計算して得られた、材料としての引張強度 f_t と破壊エネルギー G_F を表している。表-1の値は、図-13の参考値とほぼ同様であり、数値計算によるキャリブレーションで決定した材料パラメータは妥当な結果であるといえる。

表-1 キャリブレーションにより決定された破壊靱性値

	E (MPa)	f_t (MPa)	G_f (N/mm)
Plain mortar	28000	3.5	0.072
Plain concrete	33000	2.3	0.110
Polymer (10%) mortar	28000	3.0	0.095
Polymer (15%) mortar	26000	4.0	0.110
Steel fiber (1%) concrete	30000	2.6	4.200
Steel fiber (2%) concrete	30000	3.6	8.400

参考文献

- 1) P.E. Petersson: Fracture energy of concrete: Method of determination, *Cem. Concr. Res.*, Vol.10, pp.78–89, 1980.
- 2) RILEM Draft Recommendation (50-FMC): Determination of the fracture energy of mortar and concrete by means of three-point bend tests on notched beams, *Mater. Struct.*, Vol.18, pp.285–290, 1985.
- 3) JCI 基準：切欠きはりをを用いたコンクリートの破壊エネルギー試験方法, JCI-S-001-2003.
- 4) S. Mindess: The effect of specimen size on the fracture energy of concrete, *Cem. Concr. Res.*, Vol.14, pp.431–436, 1984.
- 5) A. Hillerborg: Results of three comparative test series for determining the fracture energy G_F of concrete, *Mater. Struct.*, Vol.18, pp.407–413, 1985.
- 6) V. Guinea, J. Planas and M. Elices: Measurement of the fracture energy using three-point bend tests: Part I – Influence of experimental procedures, *Mater. Struct.*, Vol.25, pp.212–218, 1992.
- 7) Q. Jueshi and L. Hui: Size effect on fracture energy of concrete determined by three-point bending, *Cem. Concr. Res.*, Vol.27, pp.1031–1036, 1997.
- 8) S.H. Kwon, Z. Zhao and S.P. Shah: Effect of specimen size on fracture energy and softening curve of concrete: Part II. Inverse analysis and softening curve, *Cem. Concr. Res.*, Vol.38, pp.1061–1069, 2008.
- 9) 村上 聖, 平居孝之: RILEM 法による破壊エネルギーの試験体寸法依存性に関する考察, 日本建築学会構造系論文報告集, Vol.585, pp.1–6, 2004.
- 10) V.C. Li, C.-M. Chan and C.K.Y. Leung: Experimental determination of the tension-softening relations for cementitious composites, *Cem. Concr. Res.*, Vol.17, pp.441–452, 1987.
- 11) 橋高義典, 上村克郎, 中村成春: コンクリートの引張軟化曲線の多直線近似解析, 日本建築学会構造系論文報告集, Vol.453, pp.15–25, 1993.
- 12) K. Duan, X.-Z. Hu and F.H. Wittmann: Thickness effect on fracture energy of cementitious materials, *Cem. Concr. Res.*, Vol.33, pp.499–507, 2003.
- 13) K. Duan, X. Hu and F.H. Wittmann: Size effect on specific fracture energy of concrete, *Engng. Fract. Mech.*, Vol.74, pp.87–96, 2007.
- 14) A. Hillerborg: The theoretical basis of a method to determine the fracture energy G_F of concrete, *Mater. Struct.*, Vol.18, pp.291–296, 1985.
- 15) A. Hillerborg, M. Modéer and P.-E. Petersson: Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements, *Cem. Concr. Res.*, Vol.6, pp.773–782, 1976.
- 16) 六郷恵哲, 岩佐正徳, 鈴木泰生, 小柳 治: 各種コンクリートの破壊力学パラメータ, コンクリート工学年次論文集, Vol.11, No.1, pp.247–252, 1989.
- 17) G.N. Wells and L.J. Sluys: A new method for modelling cohesive cracks using finite elements, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.50, pp.2667–2682, 2001.
- 18) J. Mergheim, E. Kuhl and P. Steinmann: A finite element method for the computational modelling of cohesive cracks, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.63, pp.276–289, 2005.
- 19) 車谷麻緒, 寺田 賢二郎: Cohesive crack モデルに対する陽的近似アルゴリズムの提案とその性能評価, 土木学会論文集 A, Vol.64, No.3, pp.627–638, 2008.
- 20) 車谷麻緒, 寺田 賢二郎: 材料内部の微細ひび割れ形成に着目した準脆性材料の寸法効果発現メカニズム, 土木学会論文集 A, Vol.65, No.1, pp.216–227, 2009.
- 21) F.H. Wittmann, H. Mihashi and N. Nomura: Size effect on fracture energy of concrete, *Engng. Fract. Mech.*, Vol.35, pp.107–115, 1990.
- 22) H. Mihashi and N. Nomura: Microcracking and tension-softening properties of concrete, *Cem. Concr. Compos.*, Vol.17, pp.91–103, 1992.
- 23) K. Otsuka and H. Date: Fracture process zone in concrete tension specimen, *Engng. Fract. Mech.*, Vol.65, pp.111–131, 2000.

(2010年3月9日)