

方向分離解法を用いたIDO法による拡散項の数値解析

Numerical simulation of diffusion term by interpolated differential operator method with directional splitting

荒木啓喜*・西藤潤**・田村武***

Hiroki ARAKI, Jun SAITO and Takeshi TAMURA

*学生会員 京都大学大学院工学研究科社会基盤工学専攻 (〒 615-8140 京都府京都市西京区京都大学桂 C)
 **正会員 博士(工学) 京都大学大学院工学研究科社会基盤工学専攻 (〒 615-8140 京都府京都市西京区京都大学桂 C)
 ***フェロー会員 工学博士 京都大学大学院工学研究科社会基盤工学専攻 (〒 615-8140 京都府京都市西京区京都大学桂 C)

We propose a new method combining directional splitting with Interpolated Differential Operator (IDO) scheme. To examine accuracy and efficiency of the methods, three simple problems are solved. Two problems of them are governed by diffusion equation and the other one is by advection-diffusion equation. Comparison of the method with other numerical schemes shows that the method preserves high accuracy, enables large time steps and requires less computational effort and memory. The directional splitting IDO scheme is simple and expected to have great potential for numerical solutions of various partial differential equations.

Key Words : *directional splitting, interpolated differential operator method, diffusion term, accuracy*

1. はじめに

Interpolated Differential Operator(IDO)法は, Aokiら^{1) 2) 3)}によって開発された偏微分方程式を高精度に解く数値解析手法である. IDO法の基本的な計算アルゴリズムは, 時間積分をテーラー展開によって行い, 時間に関する微分項を空間微分に置き換えるというものである. 微分の置き換えは支配方程式を介して行われ, この操作は微分オペレータ(Differential Operator)と呼ばれる. テーラー展開を高次まで行くと精度の高い時間積分が可能となるが, 一般に多次元の場合, 高階の時間微分を空間微分へ変換することができない. そのため, IDO法では時間方向に高精度な計算を行うため時間積分に関してはLeap-Frog法⁴⁾やRunge-Kutta法⁵⁾といった多段階積分法と組み合わせて用いられることが多い. しかし, 多段階積分法を用いると計算コストが増え, また安定計算に必要な時間ステップが小さくなるという問題が生じる.

本論文では, 拡散項を対象とし, 高精度かつ大きな時間幅で解析できるよう時間方向に多段階の積分を行わず, 方向分離とIDO法を組み合わせた方法を提案する. IDO法に対して方向分離の考えを導入すると, 多次元のIDO計算を複数の1次元IDO計算に分けることが可能となる. その結果, 高階の時間微分に対しても空間微分が可能となる. なお, 1次元の移流方程式に対してIDO法を適用するとCubic Interpolation Pseudo-Profile(CIP)法⁴⁾に帰着することが知られている¹⁾. CIP法解析では多次元問題において方向分離を用いた数値解析は多数行われている^{4) 6) 7) 8)}が, IDO

法に対して方向分離を適用した研究は見受けられない. なお, 拡散項をIDO法で計算するケースとして

- 移流拡散方程式の移流項をCIP法などの高精度解法で解く場合
- 移流方程式と拡散方程式の連成問題において, 移流方程式を高精度解法で解く場合

の2つが考えられる. 移流拡散方程式の計算は, Fractional Step法を用いて移流項と拡散項に分けて行われることがしばしばある. 移流項の計算をCIP法やIDO法などの高精度解法で解いた場合, 拡散項においても移流項の計算精度を保つために移流項計算と同等以上の計算精度が求められる. また, 移流方程式と拡散方程式の連成問題においても, 同様のことが言える. 例えば, 熱動弾性解析においては変位応力場は移流方程式(波動型偏微分方程式)で与えられ, 熱の場は拡散方程式(熱伝導方程式)で与えられる. このような場合においても, 変位応力場の計算を精度良く行うためには, 熱の場も精度良く解く必要がある. また, 拡散項の計算精度が移流項の計算精度に大きな影響を及ぼさない場合においても, 移流項をCIP法で解く場合, 未知数として空間の1回微分を用いることとなる. そのため, 拡散項においてもやはり同様に空間の1回微分を用いる必要があり, IDO計算が求められることがある. なお, 空間の1回微分を未知数とする拡散項を計算する手法としてはHermite型要素を用いた有限要素法があるが, 有限要素法では代数方程式の演算が必要であるため, 計算負荷がIDO法と比較して大きい.

本研究で示す手法は, 精度良く計算するための条件として拡散係数が均質であることが求められるが, 自然

現象において拡散係数を一定とみなしてよいケースがしばしばあることを考えると、有用であると言えよう。

本論文では、2, 3章でそれぞれ1次元, 2次元拡散方程式におけるIDO解析について簡単に説明する。4章で本論文の提案する方向分離を用いたIDO法について説明する。5章では、数値解析例として2次元の拡散方程式および移流拡散方程式を解き、精度および安定性を検証した。また、他の解法とも比較を行い、本手法の有効性を確認した。そして、6章で結言を述べる。

2. 1次元拡散方程式のIDO解析

2.1 1次のテーラー展開による1次元IDO解析

1次元問題の拡散方程式は次式で与えられる。

$$\partial_t u = \alpha \partial_x^2 u \quad (1)$$

∂_t は時間に関する偏微分, ∂_x は空間 (ここでは x 方向) に関する偏微分を意味する。 α は拡散係数である。この式が1次元拡散方程式における微分オペレータとなる。

時刻 t における時間ステップを n , 時刻 $t + \Delta t$ における時間ステップを $n + 1$ とすると、時間ステップ $n + 1$ における値 u^{n+1} は次式で与えられる。

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \partial_t u^n + O(\Delta t^2) \quad (2)$$

ここで支配方程式 (1) を用いて時間微分を空間微分に置き換えると、次式を得る。

$$u^{n+1} = u^n + \xi \partial_x^2 u^n + O(\xi^2) \quad (3)$$

ここで $\xi = \alpha \Delta t$ である。

式 (3) から分かるように、 u^n を空間に関して2階以上の多項式で近似できれば、 u^{n+1} の値を求めることができる。そこで、点 i とその前後の点 $i - 1, i + 1$ の3つの値、つまり u_{i-1}, u_i, u_{i+1} を用いて2次の補間関数を作成する (図-1)。

$$u^n(x) = a(x - x_i)^2 + b(x - x_i) + u_i \quad (4)$$

式 (4) には明らかに $u^n(x_i) = u_i$ を満足する。係数 a, b は、

$$u^n(x_{i-1}) = u_{i-1}, \quad u^n(x_{i+1}) = u_{i+1} \quad (5)$$

を満足するように定める。

式 (3) に式 (4) を代入し、 ξ に関して2次以上の項を無視すると、 $x = x_i$ における u の値が次式で得られる。

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \quad (6)$$

なお、式 (6) は中心差分法を用いた計算に他ならない。以下では、紛らわしさを避けるため、本手法をIDO法ではなく、中心差分法と呼ぶこととする。

2.2 2次のテーラー展開による1次元IDO解析

一般に、IDO法はグリッド点の値 u だけでなく、空間の微分値 $\partial_x u$ を用いて高次元空間補間を行う。以下に、

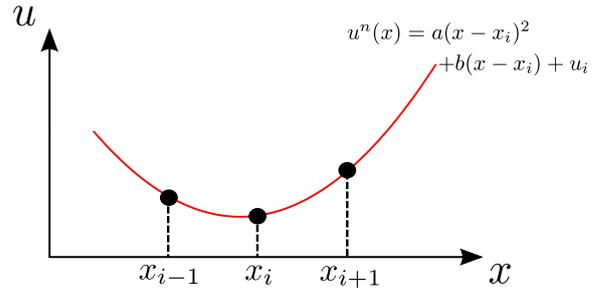


図-1 2次の補間関数のイメージ

5次多項式を用いた場合のIDO法の計算方法を示す。

まず、 u^{n+1} を時間に関して2次の項までテーラー展開すると、次式を得る。

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \partial_t u^n + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_t^2 u^n + O(\Delta t^3) \quad (7)$$

式 (7) に対して支配方程式 (1) を用いて時間微分を空間微分に置き換える操作を行うと、次式を得る。

$$u^{n+1} = u^n + \xi \partial_x^2 u^n + \frac{\xi^2}{2} \partial_x^4 u^n + O(\xi^3) \quad (8)$$

ここで、点 i とその前後の点 $i - 1, i + 1$ における値とその微分値、つまり $u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \partial_x u_{i-1}, \partial_x u_i, \partial_x u_{i+1}$ を用いて5次の補間関数を以下のように定める (図-2)。

$$u^n(x) = a(x - x_i)^5 + b(x - x_i)^4 + c(x - x_i)^3 + d(x - x_i)^2 + \partial_x u_i(x - x_i) + u_i \quad (9)$$

式 (9) は次の関係を満たす。

$$u^n(x_i) = u_i, \quad \partial_x u^n(x_i) = \partial_x u_i \quad (10)$$

係数 a, b, c, d を次の関係を満たすように定める。

$$u^n(x_{i-1}) = u_{i-1}, \quad \partial_x u^n(x_{i-1}) = \partial_x u_{i-1} \quad (11)$$

$$u^n(x_{i+1}) = u_{i+1}, \quad \partial_x u^n(x_{i+1}) = \partial_x u_{i+1} \quad (12)$$

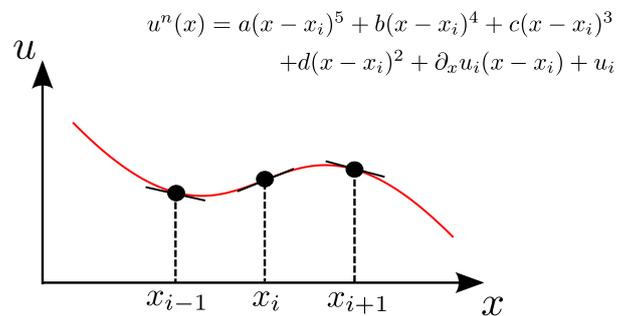


図-2 5次の補間関数のイメージ

式 (8) に式 (9) を代入し、 ξ に関して3次以上の項を無視すれば、 $x = x_i$ における u_i^{n+1} の値が求められる。

$$u_i^{n+1} = u_i^n + 2d\xi + 12b\xi^2 + O(\xi^3) \quad (13)$$

を得る。

微分値についても同様に計算可能である．式 (8) に対して空間微分をすると次式を得る．

$$\partial_x u^{n+1} = \partial_x u^n + \xi \partial_x^3 u^n + \frac{\xi^2}{2} \partial_x^5 u^n + O(\xi^3) \quad (14)$$

式 (14) に対して (9) を代入すると, $x = x_i$ における微分値

$$\partial_x u_i^{n+1} = \partial_x u_i^n + 6c\xi + 60a\xi^2 \quad (15)$$

を得る．

3. 2次元拡散方程式のIDO解析

3.1 1次のテーラー展開による2次元IDO解析

2次元問題における拡散方程式は次式で与えられる．

$$\partial_t u = \alpha (\partial_x^2 + \partial_y^2) u \quad (16)$$

u^{n+1} を時間に関して1次の項までテーラー展開すると式 (17) を得る．

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \partial_t u^n + O(\Delta t^2) \quad (17)$$

式 (17) に支配方程式 (16) を代入し, 時間微分を空間微分に置き換えると次式を得る．

$$u^{n+1} = \{1 + \xi (\partial_x^2 + \partial_y^2)\} u^n + O(\xi^2) \quad (18)$$

2次元のIDO法では値 u と1階微分 $\partial_x u$, $\partial_y u$ に加え, 2階微分 $\partial_x \partial_y u$ の値を用いて空間補間をする． $\partial_x u^{n+1}$, $\partial_y u^{n+1}$, $\partial_x \partial_y u^{n+1}$ は, 式 (18) を空間微分することにより得られる．

$$\partial_x u^{n+1} = \{1 + \xi (\partial_x^2 + \partial_y^2)\} \partial_x u^n + O(\xi^2) \quad (19)$$

$$\partial_y u^{n+1} = \{1 + \xi (\partial_x^2 + \partial_y^2)\} \partial_y u^n + O(\xi^2) \quad (20)$$

$$\partial_x \partial_y u^{n+1} = \{1 + \xi (\partial_x^2 + \partial_y^2)\} \partial_x \partial_y u^n + O(\xi^2) \quad (21)$$

となる．

5次の補間関数を作る計算をIDO計算と呼ぶこととすると, 本手法では, 補間関数 $u^n(x)$, $u^n(y)$, $\partial_x u^n(y)$, $\partial_y u^n(x)$ を求める4回のIDO計算を行う必要がある．

以下では, 他のIDO法と区別するため, 本小節で示したIDO法を素朴なIDO法と呼ぶこととする．

3.2 2次の項までテーラー展開したときの定式化

さて, ここで式 (17) の代わりに, 2次の項までテーラー展開した次式を考えよう．

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \partial_t u^n + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_t^2 u^n + O(\Delta t^3) \quad (22)$$

支配方程式 (16) を代入すると次式を得る．

$$u^{n+1} = \left\{ 1 + \xi (\partial_x^2 + \partial_y^2) + \frac{\xi^2}{2} (\partial_x^4 + 2\partial_x^2 \partial_y^2 + \partial_y^4) \right\} u^n + O(\xi^3) \quad (23)$$

ここで, 式 (23) に現れる $\partial_x^2 \partial_y^2 u$ は小節 3.1 で得られる補間関数から計算することはできない．この計算を行うためには, より高階な微分が必要となり, メモリの使用量が増す．また, そのような微分値を用意したと

しても, その分だけ計算コストが増加する．

メモリや計算コストの増加を避けるため, 多次元のIDO法で, 時間の2階微分に対して微分オペレータを用いず, 多段階の時間積分と組み合わせて用いられることが多い．なお, 多段階積分を行わない場合, 時間方向に関しては1次のテーラー展開を積分をするだけであるので, 中心差分法による解析程度の精度しか得られない．

3.3 Leap Flog法を用いたIDO法による計算

IDO法において多段階時間積分を使う1つの例として, Leap-Flog法を組み合わせた解法を説明する．この方法では, まず, u^n から半分の時間ステップ進んだ $u^{n+\frac{1}{2}}$ を計算する．同様に微分値 $\partial_x u^{n+\frac{1}{2}}$, $\partial_y u^{n+\frac{1}{2}}$, $\partial_x \partial_y u^{n+\frac{1}{2}}$ も求める．そして, その得られた時間ステップ $n + \frac{1}{2}$ での値を用いて空間補間を行い, IDO法による計算を行う．計算のあらまは以下の通りである．

1. 時間ステップ $n + \frac{1}{2}$ の計算を行う．

$$u^{n+\frac{1}{2}} = \left\{ 1 + \frac{\xi}{2} (\partial_x^2 + \partial_y^2) \right\} u^n \quad (24)$$

2. 時間ステップ n , $n + \frac{1}{2}$ から $n+1$ の値を計算する．

$$u^{n+1} = u^n + \xi (\partial_x^2 + \partial_y^2) u^{n+\frac{1}{2}} \quad (25)$$

本手法では, 1つの時間ステップに対し, 2回に分けてIDO法による計算を行う．つまり, IDO計算は素朴なIDO法の2倍, すなわち8回必要となる．

4. 方向分離によるIDO法

4.1 理論的な背景

多段階の時間積分を用いると, 精度は向上するものの, 計算コストおよびメモリ使用量が増大するというデメリットがある．そこで, 計算時間を増やさず精度を向上させる手法として, IDO法に方向分離解法⁹⁾を導入する．方向分離を行うと, 多次元の従来法では計算できなかった2次の項まで近似計算が可能となる．

方向分離を行うために, まず, 式 (18) を x に関する微分作用素と y に関する微分作用素に分けて次のように表す．

$$u^{n+1} = \left(1 + \xi \partial_y^2 + \frac{\xi^2}{2} \partial_y^4 \right) \left(1 + \xi \partial_x^2 + \frac{\xi^2}{2} \partial_x^4 \right) u^n + O(\xi^3) \quad (26)$$

式 (26) の x , y に関する2つの微分作用素は式 (8) と同じ形をしていることから, 式 (26) の計算は1次元のIDO計算を用いてそれぞれの方向について解くことが可能となる．なお, この式変形では, 拡散係数が空間に関して一定であるという仮定を用いている．

解析手順は, まず x 方向について解き, その後 y 方向について解く． x 方向の計算で得られた値を中間の

値 u^* とする.

$$u^* = \left(1 + \xi \partial_x^2 + \frac{\xi^2}{2} \partial_x^4\right) u^n \quad (27)$$

続いて, 中間の値 u^* から次のステップの値 u^{n+1} を求める.

$$u^{n+1} = \left(1 + \xi \partial_y^2 + \frac{\xi^2}{2} \partial_y^4\right) u^* \quad (28)$$

x 方向, y 方向それぞれの計算では微分値の計算も必要になる. 微分値の計算法は以下に示すように 2 通りの方法が選択可能であり, 4.2 節, 4.3 節で説明する.

4.2 中心差分法と IDO 法を組み合わせる計算を行う方向分離解法

本節では, 中心差分法と IDO 法を組み合わせる, 微分値を計算する方法について述べる.

この方法では, x 方向の計算において, u^* および $\partial_x u^*$ の値は IDO 法によって求め, $\partial_y u^*$ の値については中心差分法を用いる. 同様に, y 方向では, u^{n+1} および $\partial_y u^{n+1}$ の値は IDO 法によって求め, $\partial_x u^{n+1}$ の値の計算は中心差分法を用いる. このように, 中心差分法を用いることで, $\partial_x \partial_y u$ の値を用いずに解析を行うことが可能である. その結果, 素朴な IDO 法や Leap-Flog を用いた IDO 法と比べて未知変数の数が $3/4$ となり, メモリの節約が図れる. 部分的に中心差分法による計算を用いるため, 計算精度の低下が考えられるが, 5. 節の数値計算結果が示すように, 解の精度には大きな影響を与えないことが分かっている.

計算のおおまかな流れは以下の通りである.

1. x 方向について計算を行う.

$$u^n, \partial_x u^n \xrightarrow{\text{1D-IDO}} u^*, \partial_x u^* \quad (29)$$

$$\partial_y u^n \xrightarrow{\text{1D-FDM}} \partial_y u^* \quad (30)$$

2. y 方向について計算を行う.

$$u^*, \partial_y u^* \xrightarrow{\text{1D-IDO}} u^{n+1}, \partial_y u^{n+1} \quad (31)$$

$$\partial_x u^* \xrightarrow{\text{1D-FDM}} \partial_x u^{n+1} \quad (32)$$

本計算手法では, IDO 計算は x 方向, y 方向それぞれ 1 回ずつの計 2 回のみですむ.

方向分離解法を用いた CIP 法で, $\partial_x \partial_y u$ の値を使わない場合, その計算方法は M 型 CIP 法と呼ばれる. そこで本研究でもこれに倣い, 本手法を M 型 IDO 法と呼ぶこととする. なお, M 型 CIP 法では, 部分的に線形補間を使っているが, 本手法と同様に精度の大きな低下は見られない.

4.3 すべて IDO 法で計算する方向分離解法

本節では, 微分値の計算を IDO 法のみで行う方法について述べる.

$\partial_x \partial_y u$ の値を未知変数として与え, すべて IDO 法で計算可能となる. 4.2 節で示した 2 次元 IDO 解析と同

様に求めることができる. 計算のおおまかな流れは以下の通りである.

1. x 方向について計算を行う.

$$u^n, \partial_x u^n \xrightarrow{\text{IDO}} u^*, \partial_x u^* \quad (33)$$

$$\partial_y u^n, \partial_x \partial_y u^n \xrightarrow{\text{IDO}} \partial_y u^*, \partial_x \partial_y u^* \quad (34)$$

2. y 方向について計算を行う.

$$u^*, \partial_y u^* \xrightarrow{\text{IDO}} u^{n+1}, \partial_y u^{n+1} \quad (35)$$

$$\partial_x u^*, \partial_x \partial_y u^* \xrightarrow{\text{IDO}} \partial_x u^{n+1}, \partial_x \partial_y u^{n+1} \quad (36)$$

本計算手法では, IDO 計算は x 方向, y 方向それぞれ 2 回ずつの計 4 回必要となる.

方向分離解法を用いた CIP 法では, $\partial_x \partial_y u$ の値を使う場合, その計算方法を C 型 CIP 法と呼ぶ. そこで本研究でもこれに倣い, C 型 IDO 法と呼ぶこととする.

5. 数値計算結果

比較のため, 次の問題を以下の数値解析法によって解き, 精度および安定性について検証を行った.

1. 中心差分法
2. 素朴な IDO 法
3. IDO 法 + Leap Flog 法
4. M 型 IDO 法
5. C 型 IDO 法

ここで素朴な IDO 法に対する M 型 IDO 法, C 型 IDO 法の優位性が定量的に示されれば, 今後多次元問題で素朴な IDO 法を使用していくメリットはなくなる.

誤差の評価は次式で行うものとする.

$$err = \frac{\sum_{(i,j) \in S} |u_{\text{num}} - u_{\text{ana}}|}{\sum_{(i,j) \in S} |u_{\text{ana}}|} \quad (37)$$

式 (37) において, u_{num} は数値解析解, u_{ana} は理論解を表す. また, S は誤差の評価を行う領域, (i, j) は格子点を示す.

5.1 計算結果 1

次式は 2 次元の拡散方程式 (16) を満足する.

$$u(x, y, t) = \frac{1}{4\pi t} \exp\left\{-\frac{(x^2 + y^2)}{4\alpha t}\right\} \quad (38)$$

式 (38) で $t = 0.01$ を初期条件として与え, $t = 0.02$ における誤差を計算する. 拡散係数 $\alpha = 1$ とした. 解析領域は $[-2, 2] \times [-2, 2]$ とし, 境界における誤差の影響を無視するため, 誤差評価を行う領域を $S = [-1, 1] \times [-1, 1]$ とした. 時間幅は安定して解析できるよう $\Delta t = 0.05\Delta x^2/\alpha$ と十分小さく取った. なお, 本章では, 空間的になめらかな関数を初期条件として与えているが, いずれもも拡散方程式を解いているので, 空間的になめらかな問題を考えるだけで十分であるといえる.

数値計算によって得られた誤差の値と格子間隔の関係を図-3に示す。横軸に格子間隔 Δx を取り、縦軸に計算誤差を取る両対数グラフとなっている。

中心差分法と素朴な IDO 法に関しては 2 次の計算精度であるのに対し、M 型 IDO 法と C 型 IDO 法は Leap-Flog を用いた IDO 法と同様に 4 次の精度を示している。M 型 IDO 法は Leap-Flog を用いた IDO 法と同程度の精度であり、C 型 IDO 法はそれよりもわずかではあるが精度が高い。なお、この空間 4 次精度はエルミート型要素を用いた有限要素法と同等の精度である¹⁰⁾。

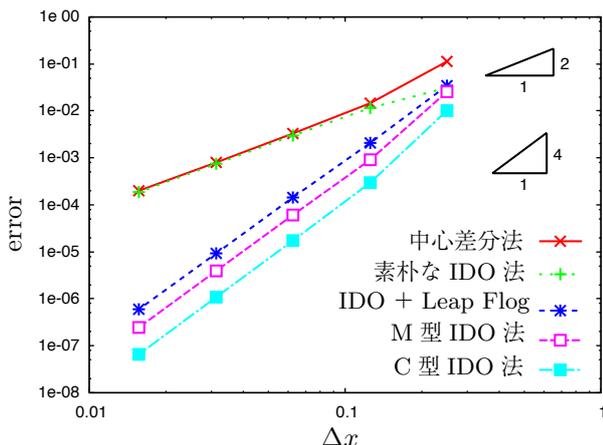


図-3 格子間隔と計算誤差の関係

5.2 計算結果 2

次式は空間に関して周期的な関数であり、拡散方程式を満足する式である。

$$u(t, x, y) = \exp(-\alpha(k_x^2 + k_y^2)t) \sin k_x x \cos k_y y \quad (39)$$

$t = 0$ を初期条件として与え、 $t = 0.01$ において誤差評価をする。数値解析では周期境界条件を導入し、解析領域を $[-1, 1] \times [-1, 1]$ とした。誤差評価を行う領域は解析領域と同じである。式 (39) 中の係数は $k_x = k_y = \pi$ 、拡散係数は $\alpha = 1.0$ とした。この問題においても、時間ステップは $\Delta t = 0.05\Delta x^2/\alpha$ とした。

解析の結果得られた計算誤差と格子間隔の関係を結果を図-4に示す。この結果より、計算例 1 と同様に、中心差分法および素朴な IDO 法と比べると、Leap-Flog 法を用いた IDO 法、M 型 IDO 法、C 型 IDO 法の方が計算精度が高いことが分かる。この計算例においても C 型 IDO 法はわずかであるが、Leap-Flog を用いた IDO 法よりも高い精度が得られた。

続いて、数値計算の安定性を評価するため、安定性のパラメータ $\mu (\equiv \alpha\Delta t/\Delta x^2)$ を変えることで計算誤差がどのように変化するかを調べた。安定性のパラメータ μ を変化させるため、 Δt の値を変えて、計算を行った。計算結果を図-5に示す。中心差分法および素朴な IDO 法では、安定性のパラメータ μ による計算誤差の違い

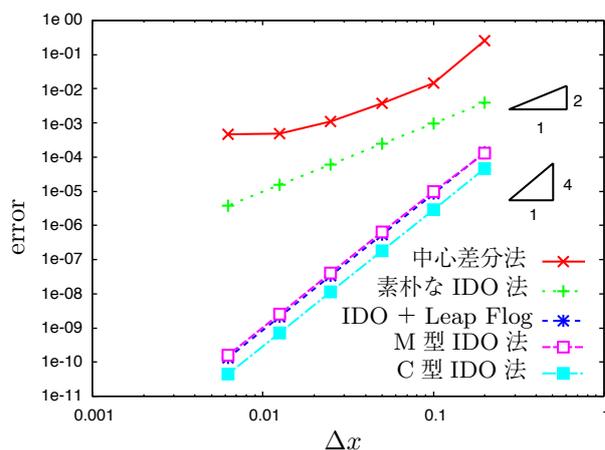


図-4 格子間隔と計算誤差の関係

はほとんど見られなかった。それに対し、Leap-Flog 法を用いた IDO 法ではおよそ $\mu = 0.09$ 以上、M 型 IDO 法では $\mu = 0.17$ 以上、C 型 IDO 法では $\mu = 0.21$ 以上で計算が安定しないことが示された。C 型 IDO 法ではこれより、方向分離型の IDO 法では、Leap-Flog 法を用いた IDO 法よりも大きな時間ステップで問題が解けることが示された。

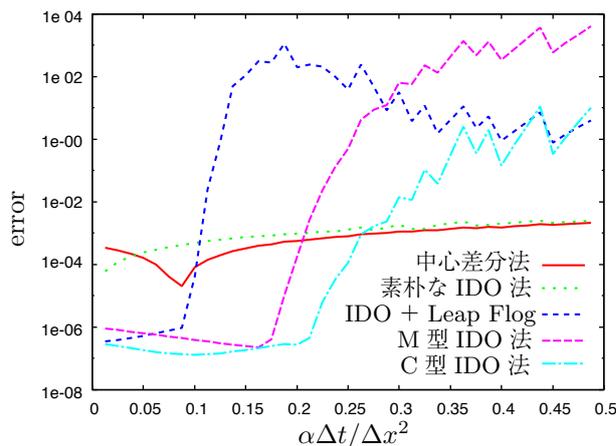


図-5 拡散数と計算誤差の関係

5.3 計算結果 3

本節では、移流拡散方程式における拡散項の計算精度を検証を行った。次式で与えられる 2 次元移流拡散方程式を対象とする。

$$\partial_t u = c_x \partial_x u + c_y \partial_y u + \alpha (\partial_x^2 + \partial_y^2) u \quad (40)$$

問題として、直線的に移流しつつ拡散する以下の関数関数を考える。

$$u(x, y, t) = \frac{\sigma}{\sigma + 4\alpha t} \exp\left\{\frac{-|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c|^2}{\sigma + 4\alpha t}\right\} \quad (41)$$

$$\mathbf{x}_c = \begin{cases} c_x t - x_0 \\ c_y t - y_0 \end{cases} \quad (42)$$

解析領域は $[-1, 1] \times [-1, 1]$ とし、この領域で誤差評価を行う。初期条件として、式 (41) で $t = 0$ を代入した分布を与える。初期の中心位置 $(x_0, y_0) = (0.25, 0.25)$ とし、標準偏差 $\sigma = 0.01$ 、拡散係数 $\alpha = 5.0 \times 10^{-3}$ とする。移流速度 c_x, c_y はそれぞれ $c_x = 1.0$ 、 $c_y = 1.0$ とする。時間幅は安定して解析ができるように $\Delta t = 0.02\Delta x^2/\alpha$ と十分小さくとった。移流項の計算は 3 次精度である M 型 CIP 法⁴⁾を用いた。拡散項については、中心差分法と M 型 IDO 法を用いた。中心差分法では、値 u だけでなく、空間の微分値 $\partial_x u, \partial_y u$ に関してそれぞれ個別に計算を行った。なお、素朴な IDO 法や C 型 IDO 法は空間に関する 2 回微分の値 $\partial_x \partial_y u$ を必要とするが、M 型 CIP 法ではその値を用いないため、これらを組み合わせて計算することはできない。誤差の計算は、時刻 $t = 0.5$ において数値解析結果をこの問題の解である式 (41) と比較することで行った。その解析結果を図 6 に示す。この図よりで中心差分法を用いて解析した計

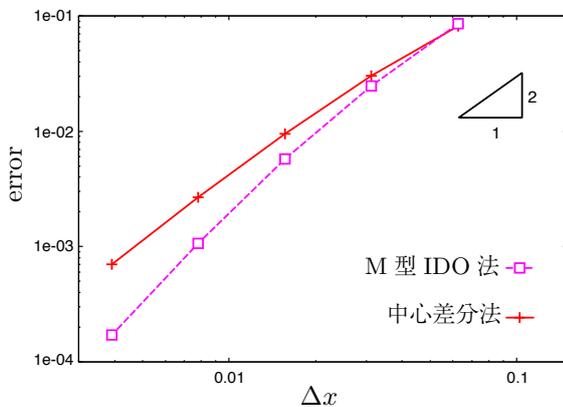


図-6 格子間隔と計算誤差の関係

算精度がおおよそ 2 次精度となるのに対し、M 型 IDO 法を用いて解析した計算精度はおおよそ 2.6 次精度となった。これより、M 型 IDO 法を用いて解析すると中心差分法を用いて解析した場合よりも高い計算精度が得られることが分かった。このように CIP 法と組み合わせて解析を行う場合には、中心差分法では CIP 法の計算精度の高さをいかしきれなくなると言える。これにより、本論文で提案する M 型 IDO 法の有用性が示された。

6. おわりに

本研究では、方向分離解法と IDO 法という既存の 2 つ手法を組み合わせ、方向分離型 IDO 法という新しい数値解析手法を提案した。手法そのものは単純であるが、以下の点で優れた解法であると言える。

- IDO 計算に方向分離を適用すると、2 次元問題においても 4 次精度の計算が可能である。
- 多段解の時間積分法を用いた IDO 法と比較して、

安定条件が大きい、つまり、分離解法を用いると同じ精度でも時間幅が大きく取れる。

- 方向分離型 IDO 法を用いると、多段解の時間積分法を用いた IDO 法と比較して、少ない計算量で同程度の精度を得ることが可能である。Leap-Frog の時間積分では 1 ステップあたり、1 次元の IDO 計算を 8 回行うが、M 型 IDO 法では 2 回の IDO 計算と 2 回の中心差分計算、C 型 IDO 法では 4 回の IDO 計算だけで完了する。
- M 型 CIP 法では $\partial_x \partial_y u$ の値は計算に用いない。一方で、従来の IDO 計算では $\partial_x \partial_y u$ の値を必要とする。そのため、移流項の計算を M 型 CIP 法、拡散項の計算を従来の IDO 法で解くことはできなかった。しかしながら、本論文で示した M 型 IDO 法は、 $\partial_x \partial_y u$ の値を必要としないため、M 型 CIP 法と組み合わせて用いることが可能となる。

本研究の今後の発展は以下の通りである。

- 今回は簡単な例題を解くに留まったが、今後他の問題を解くことで方向分離型 IDO 法の計算精度、安定性についてより詳細に検証し、また他の数値解法との比較を行いたい。
- 多くの問題は本論文で示した非保存型の定式化で高精度な計算が可能である。しかし、長時間にわたって計算を行う場合や波形が急激に変化する問題を取り扱う場合においては保存性が重要な役割を果たすことがある。そこで今後は保存性を考慮した IDO 法を用いて精度や安定性について検証したい。

参考文献

- 1) Aoki, T. : Interpolated Differential Operator (IDO) scheme for solving partial differential equations, *Computer Physics Communications*, Vol. 102, No. 1-3, pp. 132-146, 1997.
- 2) Imai, Y. and Aoki, T. : Stable coupling between vector and scalar variables for the IDO scheme on collocated grids, *Journal of Computational Physics*, Vol. 215, No. 1, pp. 81-97, 2006.
- 3) Sakurai, K., Aoki, T., Lee, W. and Kato, K. : Poisson equation solver with fourth-order accuracy by using interpolated differential operator scheme, *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 43, No. 6-7, pp. 621-630, 2002.
- 4) 矢部孝, 尾形陽一, 内海隆行: CIP 法, 森北出版, 2003.
- 5) Yoshida, H., Aoki, T. and Utsumi, T. : Improvement of accuracy and stability in numerically solving hyperbolic equations by IDO (interpolated differential operator) scheme with Runge-Kutta time integration, *Electronics and Communications in Japan (Part III Fundamental Electronic Science)*, Vol. 87, No. 2, pp. 33-42, 2004.
- 6) Ogata, Y., Yabe, T. and Odagaki, K. : An accurate numerical scheme for Maxwell equation with CIP-method of characteristics, *Commun. Comput. Phys.*, Vol. 1, No. 2, pp. 308-331, 2006.
- 7) Yabe, T., Xiao, F. and Utsumi, T. : The constrained interpolation profile method for multiphase analysis,

- Journal of Computational Physics*, Vol. 169, No. 2, pp. 556–593, 2001.
- 8) 肖鋒, 小野寺直幸, 伊井仁志: 計算流体力学-CIP マルチモーメント法による手法, コロナ社, 2009.
- 9) Strang, G. : On the construction and comparison of difference schemes, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, pp. 506–517, 1968.
- 10) 丸岡晃, 小保内啓太, 奥村弘 : 移流拡散問題における Semi-Lagrange Galerkin 法, *ながれ:日本流体力学会誌*, Vol. 27, pp. 143–152, 2008.

(2010年3月9日 受付)