

2次元スカラー波動方程式のための 非直交スプライン wavelet を用いた時間域境界要素法

Time-Domain Boundary Element Method Using Non-orthogonal Spline Wavelets
for 2-D Scalar Wave Equation

紅露一寛*・菅波祐太**・古川 陽***・阿部和久****

Kazuhiro KORO, Yuta SUGANAMI, Akira FURUKAWA and Kazuhisa ABE

*正会員 博士(工学) 新潟大学准教授 大学院自然科学研究科(〒950-2181 新潟県新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)

**学生会員 新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程(〒950-2181 新潟県新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)

***学生会員 東京工業大学大学院理工学研究科修士課程(〒226-8502 横浜市緑区長津田町 4259 番地)

****正会員 工博 新潟大学教授 工学部建設学科(〒950-2181 新潟県新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)

The time-domain boundary element method using the non-orthogonal spline wavelets is developed for reducing the computational cost of the BE wave propagation analysis. The non-orthogonal spline wavelets are used for the discretization of the boundary integral equation. The time variation of the unknown potential and flux is approximated using the conventional scheme. The small matrix entries of the coefficient matrix are truncated with the Beylkin-type matrix compression scheme at before and after calculation of double boundary integral. The present BE analysis method has the numerical instability on the prescribed time step width which is observed in the conventional point-collocation time-domain BE analysis. This instability is considerable for the wavelet with the higher-order vanishing moments. The sparsity of the coefficient matrix generated at an each time step rises as the time step proceeds; the memory requirement of the present method can be reduced in comparison with the conventional BEM. The reduction of the computational work from the conventional BE analysis is difficult because of the sparse system of the conventional time-domain BEM.

Key Words : 2D scalar wave equation, time-domain BEM, non-orthogonal spline wavelet

1. はじめに

境界要素法(BEM)は、原則として境界上の離散化のみで対象とする問題の近似解を求めることができるため、有限要素法(FEM)に代表される領域型解法に比べ離散化方程式の自由度が小さくなる¹⁾。このことは提案当初こそBEMの利点として考えられたが、定常問題では離散化方程式の係数行列が密となるため、解析時の使用メモリの大きさと離散化方程式の求解計算の大きさがネックとなり、大規模問題への適用が困難と考えられてきた。そのため、この20年の間、このBEMの計算効率上の欠点を解消すべく、高速多重極展開法^{2),3)}に代表される高速解法の開発・実用化に関する研究が、国内外で精力的に進められてきた。

本研究で対象とするwavelet法は、境界積分方程式の離散化にwavelet基底を用いる方法で、waveletのゼロモーメント性(基底関数と所定次以下の単項式との直交性)により係数行列成分の大半を微小な成分とすることができ、それらを切り捨てることで係数行列をスパース化し、解析時の使用メモリの削減と計算時間の短縮を図る手法である^{4)–20)}。Wavelet法の定式化には2種類の手法が提案されており、境界積分方程式の未知量の近似基底にwavelet基底を用いるアプローチ^{5),6),7)}と、従来の境界要素法定式化の下で得られた離散化方

程式に対してwavelet変換を作用させることで、係数行列を大半が微小成分からなる行列に変換し、微小成分の切り捨てによって疎行列化するアプローチ^{8)–15)}とがある。前者は必要最小限の境界積分計算でスパースな係数行列を作成できる反面、複雑な境界形状への適応性の低さが弱点である。一方、後者は離散化後に得られる代数方程式にwavelet変換を作用させるために汎用性は高いが、変換に要する演算量の削減が課題となっている。さらに関連研究として、Poisson方程式を対象とした境界要素解析における高速多重極法・wavelet法による高速化効果の相互比較¹⁵⁾や、境界要素法の大規模解析を高効率で進めるためにwavelet変換を援用した並列化手法の構築¹⁶⁾、Poisson方程式の領域積分項を多重相反法で離散化する際にwavelet基底を適用し、解析時の計算効率を削減する試み¹⁷⁾などの成果が報告されている。

今日までの境界要素解析におけるwavelet法の研究では、境界要素解析の大規模問題の適用を視野に入れていることもあり、密な係数行列を疎行列化することでメモリ削減と計算時間の短縮の双方が期待できる定常問題(Laplace問題やPoisson問題、Helmholtz問題など)の境界要素解析への適用が大半を占めている。Ravnikらのグループは渦度と流速とを未知量とした境界要素流れ解析にwavelet法を適用している^{11)–14)}が、

その研究成果の多くは Poisson 方程式の近似解法として wavelet 法を用いているものとなっている。しかしながら、境界要素法は非定常熱伝導問題や非定常波動伝播問題にも適用することができ、今日まで種々の定式化が示されている^{1),2)}。

特に波動伝播問題は、境界積分方程式によって無限遠方への波動の放射が矛盾なく表現できることもあって、境界要素法の適用が有利となる問題の一つと考えられている。非定常波動伝播問題の境界要素法解析では、Fourier 変換を援用して定常応答の境界要素解の重ね合わせにより非定常の波動伝播現象を解析する方法と、波動方程式の時間域境界積分方程式を直接離散化して解く方法の2つが主要な解法として広く知られている^{1),2)}。特に、時間域境界積分方程式を用いる手法は、解析対象領域の一部に非線形性が発現するような問題にも比較的容易に適用可能であるものの、解析の際には時間に関する畳み込み積分計算が必要で、各時間ステップで $O(MN^2)$ (M : 時間ステップ数, N : 解析自由度) の行列・ベクトル積を実行する必要がある。そのため、解析自由度が小さい場合であっても、解析の時間ステップ数が多くなると膨大なメモリを消費し、多くの計算時間を要する問題点がある。

この計算効率上の問題点を解決することを目的として、Mansur らは畳み込み積分計算を効率化するアルゴリズムを提案している^{18),19)}が、単に畳み込み積分計算を効率化するのであれば、wavelet 法を適用し微小な係数成分の切り捨てることによっても実現可能であるものと思われる。なお、時間域境界積分方程式の離散化に wavelet 基底を用い、解析時の計算効率を改善する試みは、非圧縮粘性流れ解析を対象とした Ravnik ら¹¹⁾と、線形拡散問題を対象とした著者ら²⁰⁾によってなされているが、波動問題における検討例は報告されていない。

そこで本研究では、2次元スカラー波動問題の非定常波動伝播解析を対象に、時間域境界積分方程式を wavelet 基底を用いて離散化する時間域境界要素解析法を提案する。なお、当該手法は、時間についての離散化を従来法と同様に処理した上で、未知境界値の境界上の変動について非直交スプライン wavelet を用いた wavelet 級数で近似する。また、wavelet 基底を重み関数とした Galerkin 法を適用し、代数方程式を導出する。解析時の使用メモリの削減効果、および計算時間の短縮効果については、数値解析結果を通して従来法との比較・検討を行なう。さらに、選点法時間域境界要素法を用いた波動伝播解析において、時間刻み幅の設定に起因する数値不安定性が広く知られている²²⁾ことから、本論文で提案する境界要素解析法についても、同様の数値不安定性の発現の有無について検討する。

2. 時間域境界積分方程式

本研究では、2次元非定常スカラー波動問題について考える。当該問題の支配方程式、境界条件および初期条件を次式で与える。

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2} \ddot{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\text{in } \Omega) \quad (1)$$

$$u = \bar{u} \text{ (on } \Gamma_u), \quad q = \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q}, \quad (\text{on } \Gamma_q) \quad (2)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \quad \dot{u}(\mathbf{x}, 0) = v_0(\mathbf{x}), \quad (\text{in } \Omega) \quad (3)$$

ここで、 t は時刻、 \mathbf{x} は位置ベクトルである。また、 Ω は領域、 Γ は境界であり、 $\Gamma_u \cup \Gamma_q = \Gamma$ 、 $\Gamma_u \cap \Gamma_q = \emptyset$ なる部分境界 Γ_u 、 Γ_q からなるものとする。 u はスカラー波動ポテンシャル、 c は波動の伝播速度、 n は境界上の外向き法線方向を表わし、 ∇ はナブラ演算子、 $\dot{\cdot}$ は時間微分である。なお、 \bar{u} 、 \bar{q} 、 u_0 、 v_0 はいずれも既知量であるものとする。

式(1)-(3)の初期値境界値問題の時間域境界積分方程式は、 $\mathbf{y} \in \Gamma$ として次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{y})u(\mathbf{y}, \tau) &= \int_0^\tau \int_\Gamma u^*(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) q(\mathbf{x}, t) d\Gamma_x dt \\ &\quad - \int_0^\tau \int_\Gamma q^*(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) u(\mathbf{x}, t) d\Gamma_x dt \\ &\quad + \frac{1}{c^2} \int_\Omega u^*(\mathbf{x}, 0; \mathbf{y}, \tau) v_0(\mathbf{x}) d\Omega_x \\ &\quad - \frac{1}{c^2} \int_\Omega \dot{u}^*(\mathbf{x}, 0; \mathbf{y}, \tau) u_0(\mathbf{x}) d\Omega_x, \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $\alpha(\mathbf{y})$ は境界のなす角の大きさで定まる係数であり、境界が点 \mathbf{y} において滑らかな場合には $\alpha(\mathbf{y}) = 1/2$ となる。また、 u^* 、 q^* は基本解であり、2次元問題の場合には次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u^*(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) &:= \frac{c}{2\pi} \frac{H(c(\tau-t)-r)}{\sqrt{c^2(\tau-t)^2 - r^2}}, \\ q^*(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) &:= \frac{\partial u^*}{\partial n} \\ &= \frac{c}{2\pi} \frac{\partial r}{\partial n} \left[\frac{rH(c(\tau-t)-r)}{\{c^2(\tau-t)^2 - r^2\}^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\delta(c(\tau-t)-r)}{\sqrt{c^2(\tau-t)^2 - r^2}} \right], \end{aligned} \quad (5)$$

ただし、 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ であり、 $H(\cdot)$ は Heaviside 関数、 $\delta(\cdot)$ は Dirac のデルタ関数である。

なお、式(4)の時間域境界積分方程式に含まれる q^* の特異性を緩和する目的で、Mansur & Brebbia の正則化

手法²¹⁾を適用する．その結果，次の積分方程式を得る．

$$\begin{aligned}
\alpha(\mathbf{y})u(\mathbf{y}, \tau) &= \int_{\Gamma} \int_0^{\tau} u^*(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) q(\mathbf{x}, t) dt d\Gamma_x \\
&+ \int_{\Gamma} q_0^*(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) u(\mathbf{x}, 0) d\Gamma_x \\
&+ \int_{\Gamma} \int_0^{\tau} q_1^*(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) u(\mathbf{x}, t) dt d\Gamma_x \\
&+ \int_{\Gamma} \int_0^{\tau} q_2^*(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) \dot{u}(\mathbf{x}, t) dt d\Gamma_x \\
&+ \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} u^*(\mathbf{x}, 0; \mathbf{y}, \tau) v_0(\mathbf{x}) d\Omega_x \\
&- \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \dot{u}^*(\mathbf{x}, 0; \mathbf{y}, \tau) u_0(\mathbf{x}) d\Omega_x,
\end{aligned} \tag{6}$$

ここで， q_0^* ， q_1^* ， q_2^* は次式で定義する．

$$\begin{aligned}
q_0^*(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) &:= \frac{r}{2\pi c^2} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{H(c(\tau-t)-r)}{\tau \sqrt{\tau^2 - (r/c)^2}}, \\
q_1^*(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) &:= \\
&\frac{r}{2\pi c^2} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{H(c(\tau-t)-r)}{(\tau-t)^2 \sqrt{(\tau-t)^2 - (r/c)^2}}, \\
q_2^*(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) &:= \\
&\frac{r}{2\pi c^2} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{H(c(\tau-t)-r)}{(\tau-t) \sqrt{(\tau-t)^2 - (r/c)^2}},
\end{aligned} \tag{7}$$

なお， $u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) = 0$ ， $\dot{u}(\mathbf{x}, 0) = v(\mathbf{x}) = 0$ の場合には，式 (6) は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}
\alpha(\mathbf{y})u(\mathbf{y}, \tau) &= \int_{\Gamma} \int_0^{\tau} u^*(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) q(\mathbf{x}, t) dt d\Gamma_x \\
&+ \int_{\Gamma} \int_0^{\tau} q_1^*(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) u(\mathbf{x}, t) dt d\Gamma_x \\
&+ \int_{\Gamma} \int_0^{\tau} q_2^*(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) \dot{u}(\mathbf{x}, t) dt d\Gamma_x.
\end{aligned} \tag{8}$$

以下においては，式 (8) を離散化して解く場合における，wavelet 基底の導入方法について説明し，導入による計算効率の改善効果について検討する．ただし，時間域境界積分方程式の定式化における Mansur & Brebbia²¹⁾ の正則化手法の適用は，以下に示す wavelet 法の導入において必須ではないことを申し添えておく．

3. Wavelet 基底を用いた時間域境界積分方程式の離散化

先にも述べたように，本研究では，2次元スカラー波動問題の時間域境界積分方程式の離散化において wavelet 基底を導入し，境界要素解析の計算効率の改善効果について検討することを目的としている．時間域境界積分方程式の離散化においては，積分方程式の未知量の時間および境界上の変動を近似することが必要となる．Wavelet 基底は文献⁶⁾に示されているように，有界区間での関数近似の基底として用いることができるため，積分方程式の離散化への適用においては，

(i) 時間変動の近似への適用，

(ii) 境界上の未知量の変動の近似への適用，

(iii) 時間変動，境界上の変動の近似の双方への適用，の3通りのアプローチが考えられる．本研究では，境界要素解析における wavelet 法に関する既往の研究^{5,6,7)}を参考に，上記 (ii) の境界上の未知量の変動の近似，および時間方向の離散化後に得られる境界積分方程式の Galerkin 法離散化における重み関数として wavelet 基底を用いることとする．以下では，まず wavelet 基底を用いた関数近似について説明した上で，当該問題の時間域境界積分方程式の離散化について説明する．

3.1 Wavelet 基底と wavelet 級数

2次元境界要素解析において，境界値の分布を近似するためには，有界区間において1変数関数の近似が構成できればよい．そこで本小節では，wavelet 基底を用いた1変数関数 $f(x)$ の近似方法について述べる．

Wavelet 基底は scaling 関数 ϕ と wavelet ψ の2種類の関数からなる．ここで， $\phi(x)$ と $\psi(x)$ のサポートがともに $[0, 1]$ においてコンパクトであると仮定すると， ϕ と ψ は次式で与えられる階層構造を有する増大列 $\{V_k\}$ とその補空間 $\{W_k\}$ の基底を生成する．

$$\begin{aligned}
V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_k \subset \dots \subset L^2[0, 1], \\
V_{k+1} = V_k + W_k.
\end{aligned} \tag{9}$$

ここで，部分空間 V_k ， W_k の基底はそれぞれ $\phi_{k,j} = 2^{\frac{k}{2}} \phi(2^k x - j)$ ， $\psi_{k,j} = 2^{\frac{k}{2}} \psi(2^k x - j)$ で与えられる．なお，式 (9) において“+”は直和を表わす．

関数 $f(x)$ の近似 \tilde{f} は，基底 $\phi_{0,j}(x)$ ， $\psi_{k,j}(x)$ を用いた wavelet 展開によって次式で与えられる．

$$\begin{aligned}
f(x) &\approx \tilde{f}(x) \\
&:= \sum_{j=1}^{n_s} \hat{f}_{0,j} \phi_{0,j}(x) + \sum_{k=0}^{m_r} \sum_{j=1}^{n_k} \tilde{f}_{k,j} \psi_{k,j}(x),
\end{aligned} \tag{10}$$

ここで， $\hat{f}_{0,j}$ ， $\tilde{f}_{k,j}$ は展開係数であり， n_s ， n_k はそれぞれ基底関数 $\phi_{0,j}$ ， $\psi_{k,j}$ の個数である．また， m_r は wavelet 展開における上限階層数である．

本研究においては，基底関数として非直交スプライン wavelet⁶⁾を用いる．この場合，scaling 関数と wavelet はそれぞれ次式で与えられる．

$$\begin{aligned}
\phi(x) &:= \phi^m(x) \\
&= \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j \binom{m+1}{j} (x-j)_+^m, \\
\psi(x) &:= \psi_n^m(x) \\
&= \frac{\alpha_n^m}{m!} \sum_{j=0}^{m+n+1} (-1)^j \binom{m+n+1}{j} (2x-j)_+^m.
\end{aligned} \tag{11}$$

上式において， m は多項式次数であり， n はゼロモーメント次数である．また， α_n^m は ψ を規格化するための定数であり， $(\cdot)_+$ は切断べき関数であることを示す． ϕ と ψ はそれぞれ $(m+1)$ ， $(m+n+1)$ 個の区

分多項式によって構成され、 ψ については次式で与えられる n 次のゼロモーメント条件を満足する。

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^p \psi(x) dx = 0, \quad (p = 0, 1, \dots, n-1). \quad (12)$$

なお、有限な区間上で与えられた非周期関数についての wavelet 展開を定義する場合、式 (11) の基底だけでは展開の完備性が保障できなくなる。そのため、これらの基底の他に境界 scaling 関数と境界 wavelet が別途必要となる。境界 scaling 関数・境界 wavelet の構成方法、およびゼロモーメント次数の選択上の制約については、文献⁶⁾を参照されたい。

3.2 時間に関する離散化

時間域境界積分方程式 (8) を離散化するにあたり、まず式中の時間積分の離散化について説明する。時間積分の離散化は、従来の時間域境界要素法^{1,2)}と同様、時間軸上に離散点 $t_p = p\Delta t$ ($p = 0, 1, \dots, \Delta t$: 時間刻み幅) を設け、この離散点間の任意の区間 $[t_{p-1}, t_p]$ ($p = 1, 2, \dots$) において、積分方程式中の未知量 $u(\mathbf{x}, t)$, $q(\mathbf{x}, t)$, $\dot{u}(\mathbf{x}, t)$ の時間変動が次式で近似できるものとする。

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &\approx \frac{t_p - t}{\Delta t} u(\mathbf{x}, t_{p-1}) + \frac{t - t_{p-1}}{\Delta t} u(\mathbf{x}, t_p) \\ &= \frac{t_p - t}{\Delta t} u(\mathbf{x})^{(p-1)} + \frac{t - t_{p-1}}{\Delta t} u(\mathbf{x})^{(p)}, \\ q(\mathbf{x}, t) &\approx q(\mathbf{x}, t_p) = q(\mathbf{x})^{(p)}, \\ \dot{u}(\mathbf{x}, t) &\approx \frac{u(\mathbf{x})^{(p)} - u(\mathbf{x})^{(p-1)}}{\Delta t}, \end{aligned} \quad (13)$$

なお、式 (13) の u については線形補間近似、 q については後退方向区間一定近似、 \dot{u} については後退差分近似でそれぞれ近似していることになる。

式 (8) の時間積分を時間軸上の離散点間の積分に細分した上で、式 (13) を式 (8) に代入し、時刻 $\tau = t_L = L\Delta t$ において式 (8) が成り立つことを仮定する。その結果、 $u^{(L)}(\mathbf{y}) = u(\mathbf{y}, t_L)$, $q^{(L)}(\mathbf{y}) = q(\mathbf{y}, t_L)$ として次の境界積分方程式を得る。

$$\begin{aligned} &\alpha(\mathbf{y})u^{(L)}(\mathbf{y}) - \int_{\Gamma} U_L^{*(L)}(\mathbf{x}; \mathbf{y})q^{(L)}(\mathbf{x})d\Gamma_x \\ &\quad - \int_{\Gamma} Q_{1,L}^{*(L)}(\mathbf{x}; \mathbf{y})u^{(L)}(\mathbf{x})d\Gamma_x \\ &= \sum_{p=1}^{L-1} \int_{\Gamma} U_p^{*(L)}(\mathbf{x}; \mathbf{y})q^{(p)}(\mathbf{x})d\Gamma_x \\ &\quad + \sum_{p=1}^{L-1} \int_{\Gamma} Q_{1,p}^{*(L)}(\mathbf{x}; \mathbf{y})u^{(p)}(\mathbf{x})d\Gamma_x \\ &\quad + \sum_{p=1}^L \int_{\Gamma} Q_{2,p}^{*(L)}(\mathbf{x}; \mathbf{y})u^{(p-1)}(\mathbf{x})d\Gamma_x. \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、 $U_p^{*(L)}$, $Q_{1,p}^{*(L)}$, $Q_{2,p}^{*(L)}$ は次式で定義する。

$$\begin{aligned} U_p^{*(L)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{t_{p-1}}^{t_p} \frac{H(c(t_L - t) - r)}{\sqrt{(t_L - t)^2 - (r/c)^2}} dt, \\ Q_{1,p}^{*(L)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) &:= \frac{(L - p + 1)r}{2\pi c^2} \frac{\partial r}{\partial n} \\ &\quad \int_{t_{p-1}}^{t_p} \frac{H(c(t_L - t) - r)}{(t_L - t)^2 \sqrt{(t_L - t)^2 - (r/c)^2}} dt, \\ Q_{2,p}^{*(L)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) &:= \frac{(p - L)r}{2\pi c^2} \frac{\partial r}{\partial n} \\ &\quad \int_{t_{p-1}}^{t_p} \frac{H(c(t_L - t) - r)}{(t_L - t)^2 \sqrt{(t_L - t)^2 - (r/c)^2}} dt. \end{aligned} \quad (15)$$

3.3 境界積分方程式の離散化

次に、式 (14) の境界積分方程式の離散化について考える。本研究では、境界値関数を wavelet 級数で近似した上で、近似基底として用いた scaling 関数・wavelet を重み関数とした Galerkin 法を適用し、最終的に数値的に解くべき連立一次方程式を導出する。

まず、式 (10) を参考に、式 (14) の境界値関数である $u^{(p)}(\mathbf{x})$, $q^{(p)}(\mathbf{x})$ を次の wavelet 級数で近似する。

$$\begin{aligned} u^{(p)}(\mathbf{x}) &\approx \tilde{u}^{(p)}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N U_i^{(p)} w_i(\mathbf{x}) \\ &:= \sum_{j=1}^{n_s} \hat{u}_j^{(p)} \phi_{0,j}(\mathbf{x}) + \sum_{k=0}^{m_r} \sum_{l=1}^{n_w(k)} \tilde{u}_{k,l}^{(p)} \psi_{k,l}(\mathbf{x}), \\ q^{(p)}(\mathbf{x}) &\approx \tilde{q}^{(p)}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N Q_i^{(p)} w_i(\mathbf{x}) \\ &:= \sum_{j=1}^{n_s} \hat{q}_j^{(p)} \phi_{0,j}(\mathbf{x}) + \sum_{k=0}^{m_r} \sum_{l=1}^{n_w(k)} \tilde{q}_{k,l}^{(p)} \psi_{k,l}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、 $p = 0, 1, \dots$ とし、 $\phi_{0,j}$ は scaling 関数、 $\psi_{k,l}$ は wavelet であり、 $\hat{u}_j^{(p)}$, $\tilde{u}_{k,l}^{(p)}$, $\hat{q}_j^{(p)}$, $\tilde{q}_{k,l}^{(p)}$ は展開係数である。 $U_i^{(p)}$, $Q_i^{(p)}$ はそれぞれ $u^{(p)}$, $q^{(p)}$ の展開係数をまとめたものであり、 $w_i(\mathbf{x})$ は ϕ_j または $\psi_{k,l}$ で与えられる基底関数である。 N は w_i の総数である。

式 (16) を (14) に代入することで生じる残差 $r(\mathbf{y})$ を次式で定義し、

$$\begin{aligned} r(\mathbf{y}) &:= \alpha(\mathbf{y})\tilde{u}^{(L)}(\mathbf{y}) \\ &\quad - \int_{\Gamma} U_L^{*(L)}(\mathbf{x}; \mathbf{y})\tilde{q}^{(L)}(\mathbf{x})d\Gamma_x \\ &\quad - \int_{\Gamma} Q_{1,L}^{*(L)}(\mathbf{x}; \mathbf{y})\tilde{u}^{(L)}(\mathbf{x})d\Gamma_x \\ &\quad - \sum_{p=1}^{L-1} \int_{\Gamma} U_p^{*(L)}(\mathbf{x}; \mathbf{y})\tilde{q}^{(p)}(\mathbf{x})d\Gamma_x \\ &\quad - \sum_{p=1}^{L-1} \int_{\Gamma} Q_{1,p}^{*(L)}(\mathbf{x}; \mathbf{y})\tilde{u}^{(p)}(\mathbf{x})d\Gamma_x \\ &\quad - \sum_{p=1}^L \int_{\Gamma} Q_{2,p}^{*(L)}(\mathbf{x}; \mathbf{y})\tilde{u}^{(p-1)}(\mathbf{x})d\Gamma_x. \end{aligned} \quad (17)$$

式 (17) の残差に関し、次式の Galerkin 条件を課す。

$$\int_{\Gamma} r(\mathbf{y}) w_i(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (18)$$

その結果、境界値 $u^{(L)}$, $q^{(L)}$ の近似解を求めるための、次の連立一次方程式を得る。

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{1,L}^{(L)} \mathbf{u}^{(L)} + \mathbf{G}_L^{(L)} \mathbf{q}^{(L)} &= \sum_{p=1}^{L-1} \mathbf{G}_p^{(L)} \mathbf{q}^{(p)} \\ &+ \sum_{p=1}^{L-1} \mathbf{H}_{1,p}^{(L)} \mathbf{u}^{(p)} + \sum_{p=1}^L \mathbf{H}_{2,p}^{(L)} \mathbf{u}^{(p-1)}, \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、 $\mathbf{u}^{(p)}$, $\mathbf{u}^{(p-1)}$, $\mathbf{q}^{(p)}$ はそれぞれ、展開係数 $U_i^{(p)}$, $U_i^{(p-1)}$, $Q_i^{(p)}$ ($i = 1, 2, \dots, N$) を成分に持つベクトルであり、 $\mathbf{G}_p^{(L)}$, $\mathbf{H}_{1,p}^{(L)}$, $\mathbf{H}_{2,p}^{(L)}$ はそれぞれ、次式で定義する係数成分 $g_{p,ij}^{(L)}$, $h_{1,p,ij}^{(L)}$, $h_{2,p,ij}^{(L)}$ を成分に持つ係数行列である。

$$\begin{aligned} g_{p,ij}^{(L)} &:= \int_{\Gamma} w_i(\mathbf{y}) \int_{\Gamma} U_p^{*(L)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) w_j(\mathbf{x}) d\Gamma_{\mathbf{x}} d\Gamma_{\mathbf{y}}, \\ h_{1,p,ij}^{(L)} &:= \delta_{Lp} \int_{\Gamma} \alpha(\mathbf{y}) w_i(\mathbf{y}) w_j(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}}, \\ &+ \int_{\Gamma} w_i(\mathbf{y}) \int_{\Gamma} Q_{1,p}^{*(L)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) w_j(\mathbf{x}) d\Gamma_{\mathbf{x}} d\Gamma_{\mathbf{y}}, \\ h_{2,p,ij}^{(L)} &:= \int_{\Gamma} w_i(\mathbf{y}) \int_{\Gamma} Q_{2,p}^{*(L)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) w_j(\mathbf{x}) d\Gamma_{\mathbf{x}} d\Gamma_{\mathbf{y}}. \end{aligned} \quad (20)$$

4. 係数行列成分の切り捨て手法

前節において、2次元スカラー波動問題の時間域境界要素法における wavelet 基底の適用方法について説明した。境界要素法における wavelet 基底の適用の最大の目的は、wavelet のゼロモーメント性によりその大きさが微小となった係数行列成分を切り捨てて 0 とみなし、係数行列を疎行列化することにある。そこで本節では、係数行列成分の切り捨て方法について述べる。

4.1 係数成分の切り捨て判定条件

係数行列成分の切り捨て判定は、 $U_p^{*(L)}$ を被積分関数として得られた係数成分 $g_{p,ij}^{(L)}$ の大きさに基づき実行する。ただし、wavelet 基底を用いた境界要素解析では、境界積分の計算に多くの時間を要する⁶⁾ため、切り捨て対象成分の境界積分計算を回避する目的で、境界積分の計算前に判定を行う事前切り捨て判定と、境界積分計算後に判定を行う事後切り捨て判定を併用することで、可能な限り効率よく疎行列化した係数行列を生成する。

事前切り捨て判定は、係数成分 $g_{p,ij}^{(L)}$ の近似評価値 $\bar{g}_{p,ij}^{(L)}$ を用い、次式の条件を満足した成分について切り捨てを実行し、当該係数成分を 0 と置き換えることとする。

$$\bar{g}_{p,ij}^{(L)} < \kappa \cdot g_{ref}, \quad (21)$$

ここで、 κ は切り捨て基準値であり、 g_{ref} は行列 $\mathbf{G}_p^{(L)}$ ($p = 1, 2, \dots$) の成分の代表値である。近似評価値 $\bar{g}_{p,ij}^{(L)}$ の評価方法については、次小節で説明することとする。

式 (21) の事前切り捨て判定条件を満たさない成分については、式 (20) の係数成分の計算を実行する。その上で得られた係数成分 $g_{p,ij}^{(L)}$ に基づき、再度事後切り捨て判定を実行する。切り捨て対象成分は、次の判定条件を満たす係数成分とする。

$$|g_{p,ij}^{(L)}| < \kappa \cdot g_{ref}. \quad (22)$$

4.2 係数成分の近似評価式

係数成分の近似評価値 $\bar{g}_{p,ij}^{(L)}$ を構成するために、次の係数成分 $g_{p,ij}^{(L)}$ について考える。

$$g_{p,ij}^{(L)} = \int_{\Gamma} w_i(\mathbf{y}) \int_{\Gamma} U_p^{*(L)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) w_j(\mathbf{x}) d\Gamma_{\mathbf{x}} d\Gamma_{\mathbf{y}}. \quad (23)$$

式 (23) の境界積分を $-1 \leq \xi \leq 1$, $-1 \leq \eta \leq 1$ で計算するように無次元座標を定義する。 $d\Gamma_{\mathbf{y}} = J_i(\xi) d\xi$, $d\Gamma_{\mathbf{x}} = J_j(\eta) d\eta$ を考慮し、ヤコビアンを $J_i(\xi) \approx J_i(\xi = 0) := \bar{J}_i$, $J_j(\eta) \approx J_j(\eta = 0) := \bar{J}_j$ で近似すると、式 (23) は次式で表すことができる。

$$g_{p,ij}^{(L)} \approx \bar{J}_i \bar{J}_j \int_{-1}^1 w_i(\xi) \int_{-1}^1 U_p^{*(L)}(\xi, \eta) w_j(\eta) d\eta d\xi, \quad (24)$$

さらに、基底 w_i , w_j のゼロモーメント性を考慮すると、式 (24) の絶対値は次のように近似できる。

$$\begin{aligned} |g_{p,ij}^{(L)}| &\approx \frac{\bar{J}_i \bar{J}_j}{n_i! n_j!} \left| \left(\frac{\partial r}{\partial \xi} \right)^{n_i} \right|_{\xi=0} \\ &\cdot \left| \left(\frac{\partial r}{\partial \eta} \right)^{n_j} \right|_{\eta=0} \cdot \left| \frac{\partial^{n_i+n_j} U_p^{*(L)}}{\partial r^{n_i+n_j}} \right|_{\xi=\eta=0} \\ &\cdot \left| \int_{-1}^1 \xi^{n_i} w_i(\xi) d\xi \right| \cdot \left| \int_{-1}^1 \eta^{n_j} w_j(\eta) d\eta \right|. \end{aligned} \quad (25)$$

ここで、 n_i , n_j はそれぞれ w_i , w_j のゼロモーメント次数であり、

$$\begin{aligned} \beta_i &:= \int_{-1}^1 \xi^{n_i} w_i(\xi) d\xi, \quad \beta_j := \int_{-1}^1 \eta^{n_j} w_j(\eta) d\eta, \\ \left| \left(\frac{\partial r}{\partial \xi} \right)^{n_i} \right|_{\xi=0} &\approx \bar{J}_i^{n_i}, \quad \left| \left(\frac{\partial r}{\partial \eta} \right)^{n_j} \right|_{\eta=0} \approx \bar{J}_j^{n_j}, \end{aligned} \quad (26)$$

とすると、式 (25) より、 $|g_{p,ij}^{(L)}|$ の近似評価値 $\bar{g}_{p,ij}^{(L)}$ は次式で与えることができる。

$$\begin{aligned} |g_{p,ij}^{(L)}| &\approx \bar{g}_{p,ij}^{(L)} \\ &:= \frac{|\beta_i| |\beta_j| \bar{J}_i^{1+n_i} \bar{J}_j^{1+n_j}}{n_i! n_j!} \cdot \left| \frac{\partial^{n_i+n_j} U_p^{*(L)}}{\partial r^{n_i+n_j}} \right|_{\xi=\eta=0}. \end{aligned} \quad (27)$$

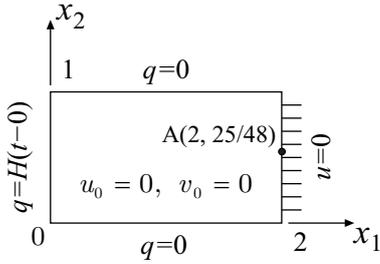


図-1 解析条件.

5. 解析手法の有効性の検討

2次元スカラー波動問題の時間域境界積分方程式の離散化において wavelet 基底を用いる方法の計算効率の改善効果を検討する目的で、具体的な数値例を対象とした時間域境界要素解析を試みた。

解析例は、図-1に示す境界条件・初期条件の下で行った。波動の伝播速度は $c=1$ としている。解析例は幅2、高さ1の長方形領域の内部で、両端で反射を繰り返しながら波が水平方向に行き来する問題で、厳密解は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 u(x_1, t) = & H(ct - x_1) \cdot (ct - x_1) \\
 & - H(ct + x_1 - 4) \cdot (ct + x_1 - 4) \\
 & - H(ct - 4 - x_1) \cdot (ct - 4 - x_1) \\
 & + H(ct + x_1 - 8) \cdot (ct + x_1 - 8),
 \end{aligned} \quad (28)$$

ただし、 $0 \leq t \leq T$ ($T = 8/c$) とし、

$$u(x_1, t + kT) = u(x_1, t), \quad (k: \text{正の整数}). \quad (29)$$

なる周期 T の周期性を有している。

解析に際しては、非直交スプライン wavelet として区間一定関数から構成されるものを用いた。ゼロモーメント次数は、 $n=1$ 、 $n=3$ の2種類の wavelet を採用した。 $n=1$ の場合には Haar wavelet に一致し、基底は正規直交性を有することになる。境界値関数の近似に当たっては、 $n=1$ 、 $n=3$ の場合で解析自由度が同数となり、いずれの scaling 関数のサポート長が同一となるように、今回の解析では18個の scaling 関数を用いて wavelet 級数展開を定義した。なお、従来法との比較のために、境界値を区間一定関数で近似し Galerkin 法または選点法で離散化した場合の時間域境界要素解析もあわせて行なった。その際、時間に関する離散化については、3.2節で示した手法と同様に行なった。

離散化後に得られる連立一次方程式の求解には、対角スケーリング前処理付き GMRES 法を用いることとした。その際、リスタート値は50に設定した。

5.1 解析精度・安定性の検討

Wavelet 基底を用いて時間域境界積分方程式を近似的に解く本手法の場合、従来の時間域境界要素法とは異なり、wavelet 基底のサポートは互いに重複するものが

存在し、階層レベルに応じてサポートの大きさも異なっている。従来の選点法時間域境界要素法では、解析の安定化の要請から時間ステップ幅の設定範囲の下限が境界要素長に依存して定まる²²⁾ことも考慮し、以下ではまず、本手法で得られた近似解およびその誤差に及ぼす時間刻み幅の影響について検討する。

解析においては、解析時間を $0 \leq t \leq 2T$ とし、所定の空間解像度の下で時間刻み幅の設定に関する数値安定性について調べることにした。Wavelet 級数の最高階層を $m_r = 2$ に設定し、境界上の自由度は $N = 18 \cdot 2^{m_r+1} = 144$ で与えた。時間刻み幅 Δt は、当該の離散化条件の下では近似解が一定値をとる区間の長さが $l_{ref} = 1/24$ で与えられることを留意し、 $\Delta t = \beta l_{ref}/c$ を用い β の値を所定値に定めることで設定した。具体的には、 $\beta = 0.3, 0.5, 0.7, 1.0$ として解析を行なった。係数行列成分の切り捨てについては、本小節の解析においては実行しないこととした。なお、誤差 $e(t)$ についてはポテンシャルについて検討し、従来法、wavelet 法とも、次式で評価することとした。

$$e(t) := \sum_{i=1}^N |\tilde{u}(\mathbf{x}_i, t) - u_{true}(\mathbf{x}_i, t)| \ell_i, \quad (30)$$

ここで、 \tilde{u} は境界要素解、 u_{true} は厳密解、 ℓ_i は近似解が一定値をとる区間の長さである。また、 \mathbf{x}_i は近似解の一定区間の代表点座標である。

まず、解析各時刻でのポテンシャル u の誤差を図-2に示す。なお、選点法で $\beta = 0.3$ の場合、および wavelet 法 ($n=3$) で $\beta = 0.3$ の場合は、解が発散したため、計算途中までの結果を図示している。通常の間一定要素を用いた場合、 β が大きい (Δt が大きい) ほど選点法・Galerkin 法の離散化手法の違いが解の誤差に及ぼす影響が小さく、wavelet 基底を用いた場合も従来法とほぼ同一の誤差の時刻歴を示す。一方、 β を0.5とした場合、選点法による離散化では近似解の誤差が Galerkin 法の場合よりも悪化し、さらに β の値を小さくした $\beta = 0.3$ の場合には、選点法では $t = 2T = 16$ に到達する前に境界要素解が発散した。これは、今日広く知られている、時間刻み幅を過小な値に設定することに起因する選点法時間域境界要素法の不安定化現象²²⁾と思われる。それに対し、通常の間一定要素で Galerkin 法離散化を採用した場合には、文献²²⁾で指摘されているように、このような不安定化現象は観測されていない。

本研究で提案する wavelet 法では、離散化に Galerkin 法を採用していることもあり、 $\beta \geq 0.5$ なる時間刻み幅とした場合には、通常の間一定要素・Galerkin 法を採用した場合の誤差の時間変動とほぼ同一となった。この傾向は、wavelet 基底のゼロモーメント次数によらないことが解析結果から確認できる。 $\beta = 0.3$ とした場合では、 $n=1$ では従来法に比べて誤差の高周波変動が若干大きくなっているが、時間変動の傾向自体は従来法

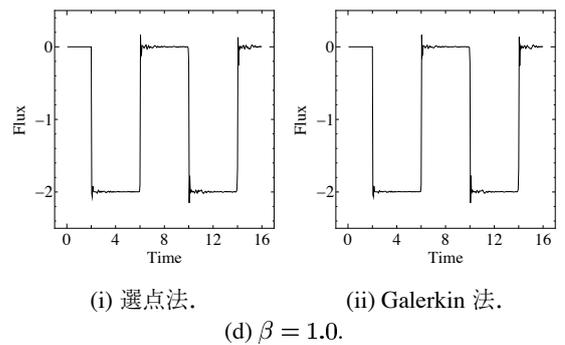
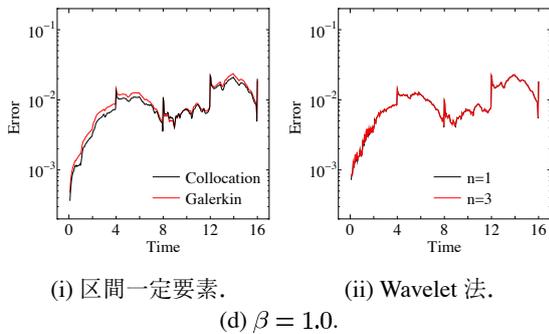
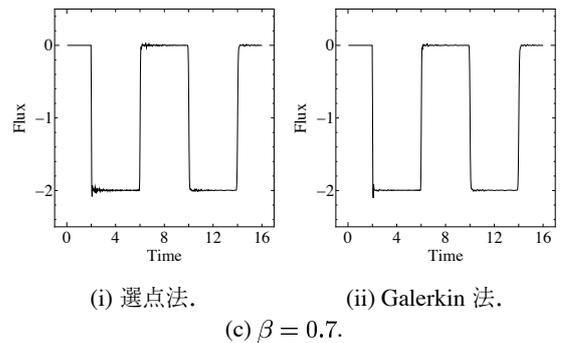
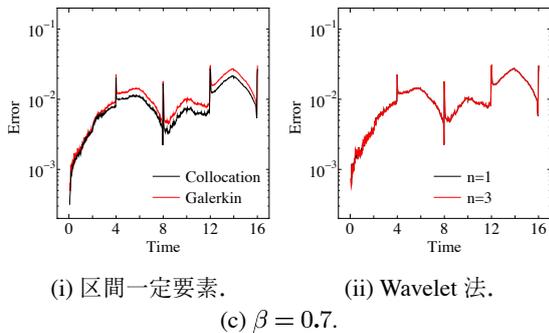
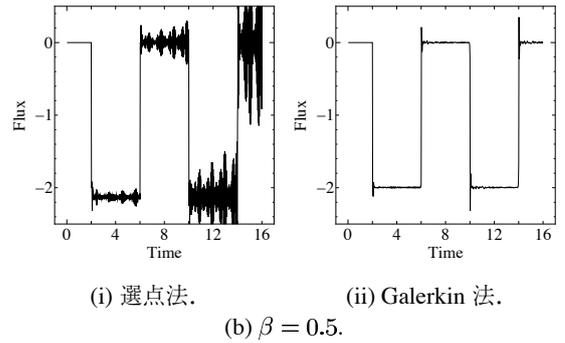
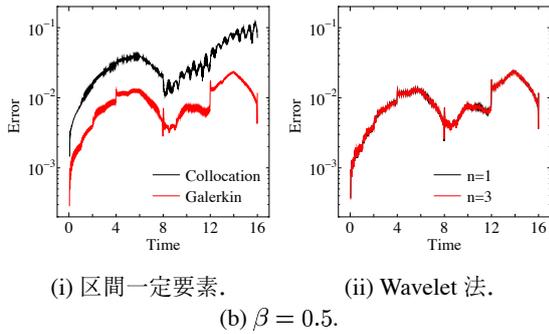
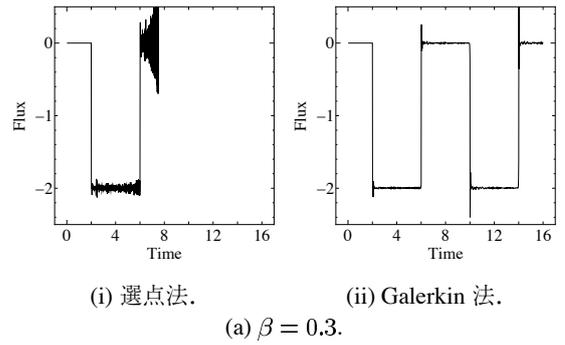
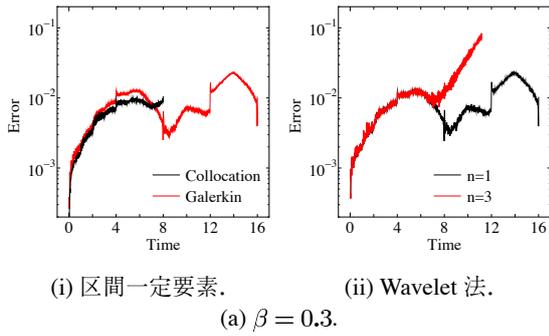


図-2 ポテンシャル u に関する誤差 $e(t)$ の時刻歴.

図-3 点 A(2, 25/48) におけるフラックス q の時刻歴 (区間一定要素を使用).

と同様である。しかしながら $n = 3$ の場合には、解析を安定に進めることができず、解析途中で解が発散し、従来法の選点法離散化の場合のような、解析の不安定化が確認された。この原因は現時点では不明であるが、wavelet 基底のゼロモーメント性を大きくすると基底のサポートが大きくなり、その結果、係数行列の成分構成・性質が変化することで、時間域境界要素解析を不安定化させている可能性も考えられる。また、数値計算を倍精度実数演算により行なっているが、桁落ち等計算過程での何らかの精度低下が原因となっているこ

とも否定できない。そのため、この原因の解明については、今後の検討課題としたい。

次に、図-1 中に示した A 点 (2, 25/48) におけるフラックス q の値の時刻歴を図-3 (従来の区間一定要素)、図-4 (wavelet 法) に示す。点 A におけるフラックス q の時刻歴からも、区間一定要素・選点法では $\beta \leq 0.5$ の範囲でフラックスに高周波の振動が生じて解析が不安定化しているのに対し、区間一定要素・Galerkin 法に

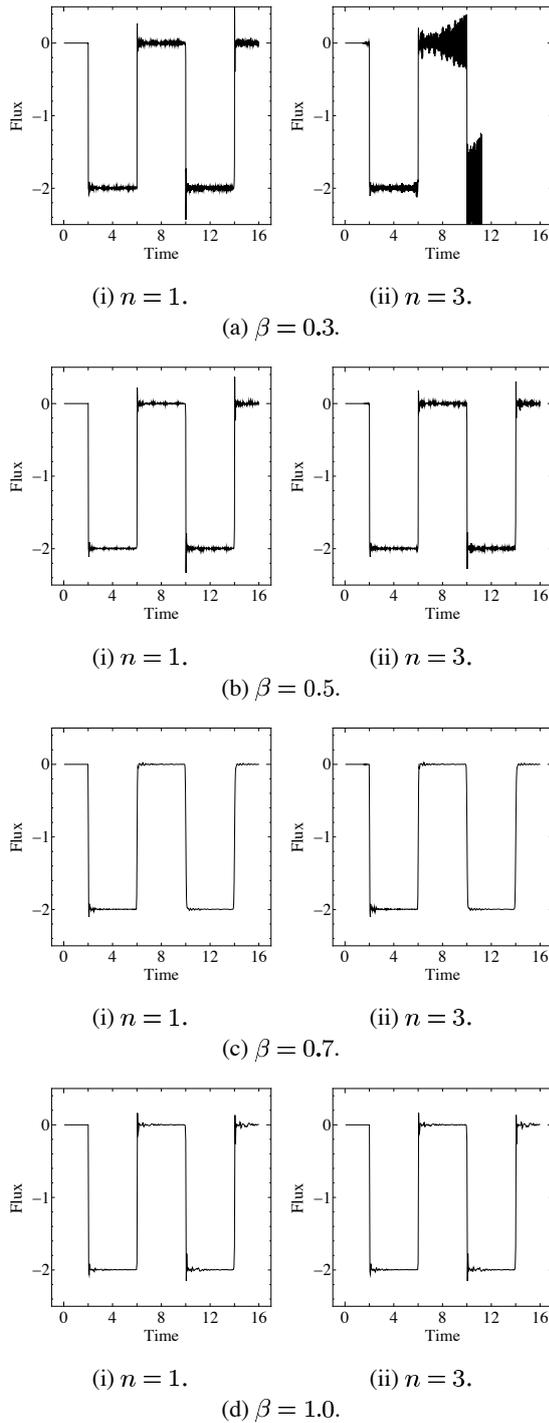


図-4 点 A(2, 25/48) におけるフラックス q の時刻歴 (区間一定非直交 wavelet を使用)。

よる離散化は小さな Δt の下でも安定に解析を実行できていることが確認できる。関数基底に wavelet を用いた場合、境界上の関数近似は区間一定要素のみを用いた場合と全く同一となるにも関わらず、 Δt の下限に関する数値安定性については区間一定要素・Galerkin 法の場合と比べて低下する傾向にある。特に、ゼロモード次数が高次の非直交スプライン wavelet を用いた場合、解の不安定化が明確であることが確認できる。

5.2 使用メモリの削減効果

先述のように、本研究で提案する wavelet 基底を用いた時間域境界要素法では、離散化により得られた係数行列の微小成分を切り捨てることにより、解析時の使用メモリを削減し、さらには計算時間の短縮を図る。そこで以下では、本手法による時間域境界要素解析において係数成分の切り捨てを実行した際の使用メモリの削減効果、および計算時間の短縮効果について検討する。本小節では、使用メモリについて検討する。

境界要素解析は、前小節と同様、図-1の解析領域・境界条件、および $u_0 = 0$, $v_0 = 0$ なる初期条件で定義される2次元スカラー波動問題を対象として行った。境界値の離散化においては、同一サポート長の区間一定 scaling 関数を18個配置した上で、最高階層を $m_r = 3$ として wavelet 級数近似を定義し、 u と q の近似に用いた。この場合、解析自由度は $N = 18 \cdot 2^{m_r+1} = 288$ なる。時間刻み幅 Δt は、 $\Delta t = \beta \cdot l_{ref}/c$ ($\beta = 1$) で与えた。 l_{ref} については、当該の離散化条件では $l_{ref} = 1/48$ となっている。

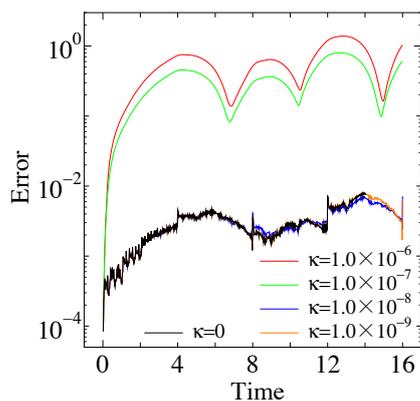
比較のために、従来の区間一定要素・選点法または Galerkin 法離散化を採用した時間域境界要素解析も実行した。要素長や時間刻み幅は wavelet を用いた場合と同条件としている。なお、既往の研究では、時間に関する畳み込み積分計算を効率化するために、式(19)右辺の行列・ベクトル積の一部を省略したり、文献¹⁸⁾のように、より少ない乗算回数で行列・ベクトル積の値を近似評価する方法を採用することがある。しかし本研究では、従来法の解析においてこれらの効率化手法は適用しないこととした。

まず、wavelet 基底を利用した場合における係数切り捨ての実現可能性を検討する目的で、切り捨て実行時におけるポテンシャル u の誤差 $e(t)$ の時刻歴を図-5に示す。なお、図中「 $\kappa = 0$ 」は、wavelet により関数近似を導入しているが、係数の切り捨ては実行しない場合の結果であることを示している。

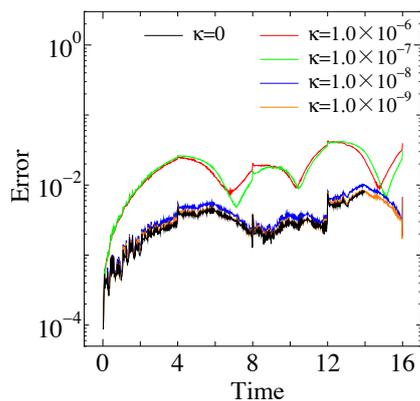
解析結果より、 $n = 1$, $n = 3$ のいずれの区間一定非直交 wavelet を用いた場合でも、所定値以下の切り捨て基準値の下では、切り捨てを実行しない場合と同程度の誤差を示している。一方、ある閾値を上回る切り捨て基準値 κ を与えて解析を実行すると、誤差が増大している。以上の結果から、当該問題の時間域境界要素解析においても、閾値以下の切り捨て基準値を与えて切り捨てを実行することで、近似解の精度を損ねることなく係数行列を疎行列化し、解析時の使用メモリを削減できる可能性があることがわかる。

次に、各解析時刻(計算時の各時間ステップ)で追加・生成される係数行列の圧縮率を図-6に示す。なお、圧縮率(%)は次式で求めた値を図示している。

$$\text{Compression rate (\%)} := \frac{M_{store}}{N^2} \cdot 100, \quad (31)$$



(a) $n = 1$.



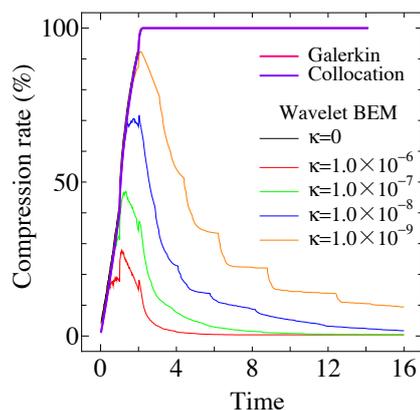
(b) $n = 3$.

図-5 ポテンシャル u の誤差 $e(t)$ の時刻歴 ($N = 288, \beta = 1, \ell_{ref} = 1/48$).

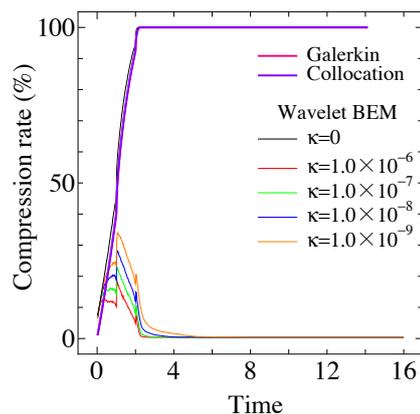
ただし、 N は解析自由度、 M_{store} は当該ステップで新たに作成される係数行列の保存成分数である。解析においては、計算第 1 ステップでは離散化により得られる連立 1 次方程式 (19) 左辺の係数行列の計算を行い、第 2 ステップ以降では式 (19) 右辺の畳み込み積分計算に用いる係数行列が作成されている。そのため、図中の結果も第 1 ステップでは式 (19) 左辺の係数行列、第 2 ステップ以降は畳み込み積分計算のために各ステップで追加生成される式 (19) 右辺の係数行列の圧縮率をそれぞれ示している。

今回の解析では、従来法（区間一定・選点法，区間一定・Galerkin 法）においても，因果律の要請から係数行列成分が明らかに 0 となるものについては，保存することなく境界要素解析を行なっている。そのため，図-6 に示した従来法の 2 種類の解析結果は，非直交スプライン wavelet を用いて $\kappa = 0$ の場合の解析結果と概ね一致している。

本論文の提案手法で切り捨てを実行した際には， $n = 1$ ， $n = 3$ のいずれの場合も，解析の初期段階では因果律の要請から係数行列の圧縮率は低く，時間の経過とともに単調に上昇していく。これは，解析時間の経過は領



(a) $n = 1$.

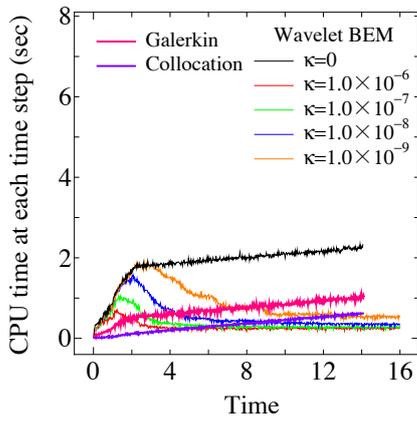


(b) $n = 3$.

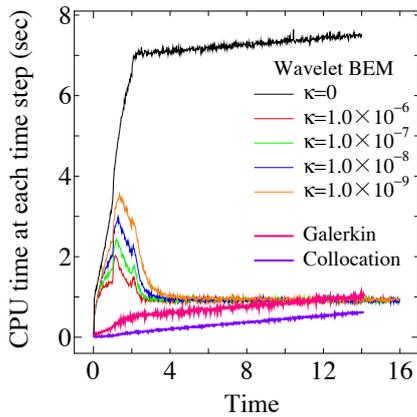
図-6 各解析時刻（各時間ステップ）で追加・生成される係数行列の圧縮率 ($N = 288, \beta = 1, \ell_{ref} = 1/48$).

域内の波動の伝播領域の拡大をもたらすため，係数行列成分の非ゼロ成分が増加するためである。解析初期段階での圧縮率の単調増加傾向は，設定した切り捨て基準値が小さいほど長時間継続し，大きな切り捨て基準値を設定するほど早い時刻で圧縮率が上昇から低下に転ずる。いずれの切り捨て基準値の下でも，時間が経過するほど係数行列の圧縮率が向上することから，解析対象とする時間が長時間にわたる問題ほど，wavelet 基底の適用が使用メモリの削減に対して効果的であることがわかる。

また， $n = 1$ の場合では，切り捨て基準値の設定値の大小が係数行列の圧縮率に及ぼす影響は大きく，切り捨て基準値を 10 倍にすると圧縮率が 20~30% も低下する場合も見受けられた。一方， $n = 3$ の場合では切り捨て基準値の違いが係数行列の圧縮率に与える影響は小さく，解析時間が $t = 4$ となる段階では，切り捨て基準値の設定値によらず圧縮率は概ね下限値に収束した結果を得た。このことから，実際の境界要素解析において，解析精度を低下させない範囲内で係数行列の圧縮性能が最大となる「最適な」切り捨て基準値を定める



(a) $n = 1$.



(b) $n = 3$.

図-7 各解析時刻（各時間ステップ）での計算時間の推移。

際には、低次のゼロモーメント性を有する wavelet を用いる場合ほど、切り捨て基準値を正確に定める必要がある。逆に、高次ゼロモーメント性を有する wavelet を用いる場合には、切り捨て基準値の最適値から過小な値に設定してもある程度の行列圧縮性能が期待できる。

5.3 計算時間の短縮効果

境界要素解析において wavelet 基底を導入することの利点は、解析時の使用メモリの削減と、計算時間の短縮にある。使用メモリの削減については、時間域境界要素法の離散化において wavelet 基底を用いることで一定の削減効果が期待できることが、前小節の検討により確認できた。そこで以下では、計算時間の短縮効果について検討する。

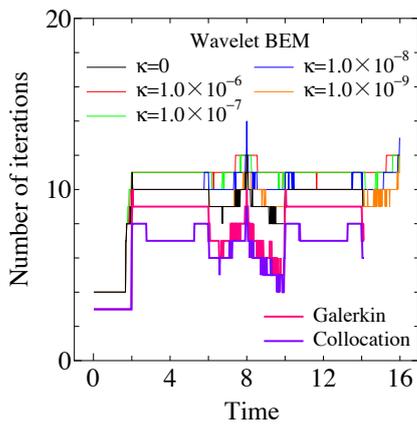
各解析時刻（各解析ステップ）において、計算に要した時間を図-7 に示す。なお、比較のために、区間一定要素を用い Galerkin 法または選点法で離散化した場合の計算時間もあわせて示す。紙面の都合上省略しているが、計算に要する時間の内訳は、従来法・wavelet 法ともに係数行列の作成と畳み込み積分計算のための行列・ベクトル積がほぼ 100% を占めている。従来法で

も係数行列が密となるのは畳み込み積分計算に用いる係数行列であり、連立一次方程式の未知量の係数からなる行列は従来法・wavelet 法とも疎行列となる。今回の解析例では方程式の元数も $N = 288$ と小さいこともあり、各解析時刻での連立一次方程式の求解には計算時間の測定限界（1/100(sec)）程度のごくわずかな処理時間しか要しなかった。なお、連立一次方程式の規模が大きくなった場合、求解計算にもある程度の計算時間を要することとなり、その処理時間の長短は求解に用いる反復解法の収束性に依存する。そのため、求解計算のために用いた GMRES 法の収束性については、次小節で検討することとする。

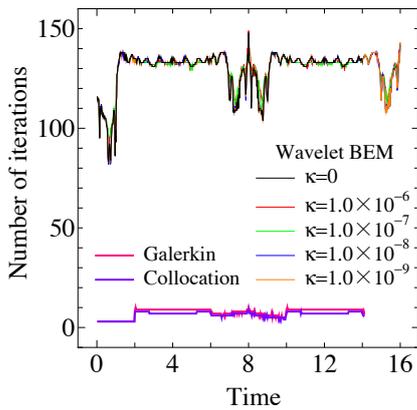
上述のように、図-7 に示した計算時間は、結果的に係数行列の作成と時間方向の畳み込み積分計算の処理時間を示している。解析結果より、区間一定要素を用いた従来法では、解析時間がある程度経過すると全ての係数成分が生成されることになるが、計算時間は単調増加を続けている。そのため、従来法では係数計算の負荷だけでなく、時間に関する畳み込み積分計算のための行列・ベクトル積に要する演算量の増加にも注意が必要であることがわかる。

一方、wavelet 基底を用いた場合には、係数行列の圧縮率の時刻歴と計算時間の時刻歴とが同様のグラフ形状を示す上、切り捨て実行時には各解析時刻での計算時間は横ばいとなっていることから、図示した計算時間の大半は二重の境界積分計算を要する係数行列成分の作成に要していることがわかる。これは、本研究で用いた wavelet がスプライン関数を用いて定義されたものであり、境界積分の際には積分区間をスプライン区間で細分割して計算する必要があるためである。Wavelet 基底のゼロモーメント次数が大きいほど、切り捨て基準値を小さい値に設定した場合ほど、計算時間は長くなる傾向にある。解析の初期段階のように、係数行列のスパース性が基本解の因果律によってもたらされる場合には、wavelet 法の適用による係数行列の疎行列化の効果が低く、従来法と比べても非常に多くの計算量を要することがわかる。解析時間の経過とともに係数行列の切り捨て対象成分が増加してくると、4 節で示した係数行列成分の事前切り捨てにより切り捨て成分に関する不要な境界積分計算が省略され、計算時間は増加から減少に転じ、 $n = 1$, $n = 3$ の双方で各々一定値に漸近していくことが分かる。ただし、この計算時間の漸近値も従来法の計算時間と比べて同程度かそれ以上の水準にとどまっているため、当該問題の時間域境界要素解析では、wavelet 基底の利用による従来法からの計算時間の短縮効果は Laplace 問題に代表される定常問題ほどは期待できないと結論付けることができる。

定常問題では、従来法では密行列であった係数行列が wavelet 基底の適用によって疎行列となり、連立方程式の求解計算も直接法から反復法に変更でき、反復解



(a) $n = 1$.



(b) $n = 3$.

図-8 各解析時刻（各時間ステップ）での GMRES 法の反復回数.

もわずかな反復回数で収束解に到達する。その結果、連立方程式の求解に要する計算量を大幅に削減できることで、解析全体の計算時間の短縮が期待できる。しかし、基本解の因果律から従来法でも係数行列が疎となる非定常問題の時間域境界要素解析では、スカイライン法や反復解法を用いるなどすれば短時間で解を求めることができる。そのため、微小係数成分の切り捨てによる計算時間の短縮効果が係数 1 成分の計算量の増加を凌ぐものとはならない状況にあることが、上述のような計算時間の短縮効果の低さの理由と考えられる。

5.4 反復解法の収束性の検討

最後に、解析各時刻（各時間ステップ）における、離散化方程式（連立一次方程式）の求解に要する計算時間の時刻歴を図-8 に示し、反復解法（GMRES 法）の収束性について検討する。解析結果より、高次ゼロモーメント性を有する wavelet を用いた場合ほど、反復解の収束が緩慢になることがわかる。これは、ゼロモーメント次数の大きな wavelet ではサポートが互いに重複する基底の数が増加し、係数行列の帯幅が拡大すること

で、反復解の収束性が悪化したものと考えられる。特に、 $n = 3$ とした場合には、Haar wavelet ($n = 1$) の場合と比べ、反復回数が 10 倍程度まで増加しており、大規模問題へ適用する際には注意を要する。ただし、反復解法の収束は、文献⁶⁾でも示されているように、不完全 LU 分解等の他の前処理手法へ変更することで大幅な改善が可能であると思われる。

6. おわりに

本研究では、2次元スカラー波動問題の時間域境界要素解析を対象に、境界積分方程式の離散化に wavelet 基底を用いる手法の適用による計算効率の改善効果について検討した。Wavelet 基底には区間一定非直交 wavelet を用い、ゼロモーメント次数の選択が解析の安定性や計算効率に及ぼす影響について明らかにした。

簡単な解析例を対象とした境界要素解析を行なった結果、時間刻み幅の設定に起因する解析の安定性については、低次ゼロモーメント性を有するものについては従来の Galerkin 法並みの安定性を有することが確認できた。しかし、ゼロモーメント次数を $n = 3$ に設定した場合には、時間刻み幅を小さくすると従来の選点法解析の場合と同様、解が発散する傾向を示した。この原因の解明については、今後の検討課題としたい。

また、解析時間の経過とともに新たに生成される係数行列成分のスパース性が高まり、使用メモリの削減効果に対しては wavelet 基底のゼロモーメント次数の高次化が有効であることが確認できた。しかし、解析の初期段階では基本解の因果律により従来法でも疎な係数行列が得られるため、wavelet 基底の適用による使用メモリの削減効果はあまり期待できないことが分かった。計算時間の短縮については、当該問題の時間域境界要素解析では、従来法および wavelet 法ともに連立一次方程式の求解に大きな計算量を要しないため、係数行列成分の生成および畳み込み積分計算の時間短縮が計算時間の短縮に直結する。Wavelet 法では微小な係数成分の切り捨てを実行することで、畳み込み積分計算の計算量を削減することは可能である。しかし、事前切り捨て判定の実行によって不要な境界積分計算を省略しても、係数 1 成分あたりに要する計算量が従来法よりも数倍も大きくなるため、各解析時刻（各時間ステップ）での計算時間の大半を占める係数行列成分の生成に要する計算量を大幅に削減することは難しいことが分かった。

なお、本研究では切り捨て基準値を予め所定値に設定した上で、各々の設定値の下で解の誤差や解析の安定性、計算効率の改善効果について検討してきた。しかし、実際の解析では、近似解の精度が損なわれない範囲内で最大の「最適な」切り捨て基準値を事前に見出し、それを用いて境界要素解析を行うことが計算効

率上最も有利である。しかし、当該問題における切り捨て基準値の最適値を探索・設定する実用的な手法は提案されておらず、実用化における検討課題の一つとなっている。また、上述の解析では、時間依存しない切り捨て基準値を用いて解析を進めてきたが、問題設定によっては解の精度が大きく時間変動することも考えられる。この場合、時間経過とともに解析精度に見合う切り捨て基準値を逐次設定・利用することが計算効率のさらなる改善をもたらす可能性があり、この点についても今後の検討課題としたい。

最後に、本手法による計算効率の改善効果は、本手法が係数成分の切り捨てに基づく手法である以上、基本的に近似解の精度に依存することは明らかである。しかし、特に複雑形状を有する問題においては、wavelet展開を定義する際に多数の部分境界を設定する必要があるため、本論文で示したような矩形の解析領域を対象とする場合と比べ、計算効率の改善効果が小さくなる懸念される。この点についても、今後数値例を通して詳細に検討し、本手法の実効性について明らかにしたい。

参考文献

- 1) 田中正隆, 中村正行, 松本敏郎著: 境界要素法 (計算力学と CAE シリーズ), 培風館, 1991.
- 2) 小林昭一編著: 波動解析と境界要素法. 京都大学学術出版会, 2000.
- 3) Nishimura, N.: Fast multipole accelerated boundary integral equation methods. *Appl. Mech. Rev.*, Vol.55, No.4, pp.299-324, 2002.
- 4) Beylkin, G., Coifman, R. & Rokhlin, V.: Fast wavelet transforms and numerical algorithms I. *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol.44, pp.144-183, 1991.
- 5) Schneider, R.: Multiskalen- und Wavelet-Matrixkompression: Analysisbasierte Methoden zur effizienten Lösung großer vollbesetzter Gleichungssysteme. B.G.Teubner, Stuttgart, 1998.
- 6) Koro, K., Abe, K.: Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis. *Engrg. Anals. Bound. Elems.*, Vol.25, pp.149-164, 2001.
- 7) 紅露一寛, 阿部和久: Wavelet BEM における Beylkin 型係数切り捨て手法の行列圧縮効果に関する検討. 土木学会応用力学論文集, Vol.6, pp.301-310, 2003.
- 8) 紅露一寛, 阿部 和久, 田崎 浩章: 離散 Wavelet 変換による選点法境界要素解析の効率化. 土木学会応用力学論文集, Vol.2, pp.153-162, 1999.
- 9) Bucher, H.F., Wrobel, L.C., Mansur, W.J., Magluta, C.: A novel approach to applying fast wavelet transforms in the boundary element method. *Electronic J. Bound. Elems.*, Vol.BETEQ 2001, No.2, pp.187-195, 2002.
- 10) Bucher, H.F., Wrobel, L.C., Mansur, W.J., Magluta, C.: On the block wavelet transform applied to the boundary element method. *Engrg. Anals. Bound. Elems.*, Vol.28, pp.571-581, 2004.
- 11) Ravnik, J., Škerget, L., Hriberšek, M.: The wavelet transform for BEM computational fluid dynamics. *Engrg. Anals. Bound. Elems.*, Vol.28, pp.1303-1314, 2004.
- 12) Ravnik, J., Škerget, L., Hriberšek, M.: Two-dimensional velocity-vorticity based LES for the solution of natural convection in a differentially heated enclosure by wavelet transform based BEM and FEM. *Engrg. Anals. Bound. Elems.*, Vol.30, pp.671-686, 2006.
- 13) Ravnik, J., Škerget, L., Hriberšek, M., Žunič, Z.: Numerical simulation of dilute particle laden flows by wavelet BEM-FEM. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.197, pp.789-805, 2008.
- 14) Škerget, L., Ravnik, J.: BEM simulation of compressible fluid flow in an enclosure induced by thermoacoustic waves. *Engrg. Anals. Bound. Elems.*, Vol.33, pp.561-571, 2009.
- 15) Ravnik, J., Škerget, L., Žunič, Z.: Comparison between wavelet and fast multipole data sparse approximations for Poisson and kinematics boundary-domain integral equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.198, pp.1473-1485, 2009.
- 16) González, P., Cabaleiro, J.C., Pena, T.F.: Parallel iterative solvers involving fast wavelet transforms for the solution of BEM systems. *Adv. Engrg. Softw.*, Vol.33, pp.417-426, 2002.
- 17) Perrey-Debain, E., ter Morsche, H.G.: B-spline approximation and fast wavelet transform for an efficient evaluation of particular solutions for Poisson's equation. *Engrg. Anals. Bound. Elems.*, Vol.26, pp.1-13, 2002.
- 18) Soares Jr., D., Mansur, W.J.: An efficient time-truncated boundary element formulation applied to the solution of the two-dimensional scalar wave equation. *Engrg. Anals. Bound. Elems.*, Vol.33, pp.43-53, 2009.
- 19) Soares Jr., D., Mansur, W.J.: An efficient stabilized boundary element formulation for 2D time-domain acoustics and elastodynamics. *Comput. Mech.*, Vol.40, pp.355-365, 2007.
- 20) 紅露一寛, 五十嵐和希, 阿部和久: 拡散問題を対象とした時間域境界積分方程式法における wavelet 基底の適用とその計算効率. 計算数理工学論文集, Vol.9, pp.73-78, 2009.
- 21) Mansur, W.J., Brebbia, C.A.: Further development on the solution of the transient scalar wave equation. *Topics in Boundary Element Research*, ed. Brebbia, C.A., pp.87-123, Springer-Verlag, 1985.
- 22) Yu, G., Mansur, W.J., Carrer, J.A.M., Gong, L.: Stability of Galerkin and collocation time domain boundary element methods as applied to the scalar wave equation. *Comput. Struct.*, Vol.74, pp.495-506, 2000.

(2010年3月9日受付)