応用力学論文集 Vol.13, pp.221-229 （2010 年 8 月） 土木学会

動弾性問題のCIP解析における外挿補間を用いた自由表面の計算法

Numerical treatment of free surface for the CIP analysis using extrapolation in elastodynamic problem

西藤 潤*・澤井 俊太郎**・飯盛 浩司***・田村 武****
Jun SAITO, Shuntaro SAWAI, Hiroshi ISAKARI, and Takeshi TAMURA

*正会員 博士 (工学) 京都大学大学院工学研究科社会基盤工学専攻（〒 615-8140 京都府西京区京都大学桂 C）
**正会員 修士 京都大学大学院工学研究科社会基盤工学専攻（〒 615-8140 京都府西京区京都大学桂 C）
***学生会員 修士 京都大学大学院工学研究科社会基盤工学専攻（〒 615-8140 京都府西京区京都大学桂 C）
****フェロー会員 工学博士 京都大学大学院工学研究科社会基盤工学専攻（〒 615-8140 京都府西京区京都大学桂 C）

There have been few studies on application of the CIP analysis to elastodynamics because the free surface is difficult to treat. Computational treatment of the free surface is developed for the CIP analysis in elastodynamics. In the treatment, the fictions values at points outside the domain are calculated by considering extrapolated function. Two simple problems are solved to check the applicability of the method.

Key Words : *cubic interpolation pseudo profile method, free surface, elastodynamics, extrapolation function*

1. はじめに

非破壊検査手法のひとつであるレーザー超音波法は，非接触で計測可能という特徴を有している．そのため，高所，狭隘部などの空間的制約あるいは高温･低温，高放射線環境などの環境的制約により近接が困難である対象物に対しても適用可能である．また，複雑な形状や小型な物体に対しても用いることができる．レーザ超音波法はこのような優れた特徴を持つ手法であり，現在では主要な検査技術の 1 つとなっている．レーザ超音波法の原理は，パルスレーザによって励起される波を受信することである．パルスレーザを物体表面に照射することで，表面近傍の微小領域に熱ひずみを発生させ，そこから超音波を励起させる．そして，その超音波を受信し，観測された波形を分析することで検査を行う．このパルスレーザによって励起された超音波は，高周波成分を含み，広帯域な波であることが知られている[1)]．そのため，レーザー超音波法の数値計算を行うためには精度の高い数値解析手法が求められる．そこで，我々のグループでは，高精度解法の 1 つである Cubic Interpolate Pseudo-Particle(CIP) 法[2)3)4)]を用いて動弾性問題の数値計算手法の開発を行っている．

CIP 法は，Yabe らによって開発された手法である．特徴として，分散エラーが少ない，数値拡散が少ない，高精度な空間補間が可能である，並列化が容易であるといったことがあげられる．現在では，流体力学や電磁気学などの分野で広く用いられている．しかし，その有用性にも関わらず，動弾性問題に対して CIP 法を適用した研究は少ない．その主な理由として境界の取扱いが困難であることが挙げられる．CIP 法では基本的に直交格子を用いるため，直交格子に沿わない滑らかな自由表面の取扱いは難しい．事実，これまでの研究では自由表面が直交格子に沿っている場合のみを対象としており，滑らかな自由表面を取扱った研究は見当たらない．そこで，本研究では動弾性問題の CIP 解析において，滑らかな自由表面を取扱う手法について提案する．動弾性問題の CIP 解析で，滑らかな自由表面が取り扱えるようになれば，レーザ超音波法以外の問題においても，他の数値解法では計算が難しい広帯域な弾性波の解析や高精度な計算が可能となる．

自由表面の取扱いは，Lombard らが提案した外挿補間によって領域外の点に仮想的な変位速度と応力を与える方法[5)]を用いる．この方法を本論文では「Extrapolator 法」と呼ぶこととする．なお，Lombard らは有限体積法の 1 つである ADER スキーム[6)]を用いて計算を行っているが，本研究では CIP 法を用いる．

本研究では 2 次元動弾性問題を対象とするが，同様のやり方で 3 次元にも拡張可能である．

2. CIP 法

2.1 CIP 法の定式化

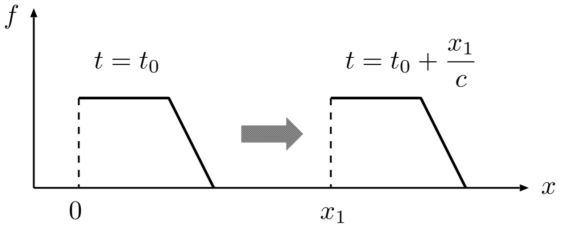
CIP 法は基本的に 1 次元の移流方程式を解く数値解法である．

一次元の移流方程式は

$$\partial_t f + c\,\partial_x f = 0, \tag{1}$$

で表される．ここで，f は時間 t と空間 x に関する関数であり，c は移流速度を表している．また，∂_t，∂_x はそれぞれ時間と空間に関する偏微分を表している．移

流速度 c が一定であれば，波形は変化することなく移動する（**図-1**）．ここでは，移流速度 c は一定と仮定する．この仮定は，後に示す動弾性問題において等方均質な材料を取り扱うためである．



図–1 波形の移流

CIP 法の特徴の 1 つに，値 f だけでなく，空間微分値 $g(\equiv \partial_x f)$ を未知数として解くことがあげられる．空間微分値を用いることで格子間の波形を高次多項式で近似することが可能となる．

現在の時間ステップ n における x_i 点の値を f_i^n，その微分値を $g_i^n\,(\equiv \partial_x f_i^n)$ とする．次の時間ステップの値 f_i^{n+1}，その微分値 g_i^{n+1} の計算には，f_i^n, g_i^n に加えて波の上流側の格子点 x_{iup} における情報 f_{iup}^n，g_{iup}^n の 4 つを用いる．添字 iup は格子点の上流点を表している．$c > 0$ であれば $iup = i-1$ であり，$c < 0$ であれば $iup = i+1$ である．4 つの値から，点 i と点 iup の間を次式のように 3 次多項式で近似できる．

$$F_i^n(x) = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i \tag{2}$$

さらに，その微分は

$$\partial_x F_i^n(x) = 3a_i(x-x_i)^2 + 2b_i(x-x_i) + c_i \tag{3}$$

で与えられる．ここで，係数 a_i, b_i, c_i, d_i は，$F(x_i) = f_i^n$, $\partial_x F(x_i) = g_i^n$, $F(x_{iup}) = f_{iup}^n$, $\partial_x F(x_{iup}) = g_{iup}^n$ の 4 つの関係を満足するようそれぞれ次式で与えられる．

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{g_i^n + g_{iup}^n}{D^2} + \frac{2(f_i^n - f_{iup}^n)}{D^3}, \qquad c_i = g_i^n, \\ b_i &= \frac{3(f_{iup}^n - f_i^n)}{D^2} - \frac{2g_i^n + g_{iup}^n}{D}, \qquad d_i = f_i^n \end{aligned} \tag{4}$$

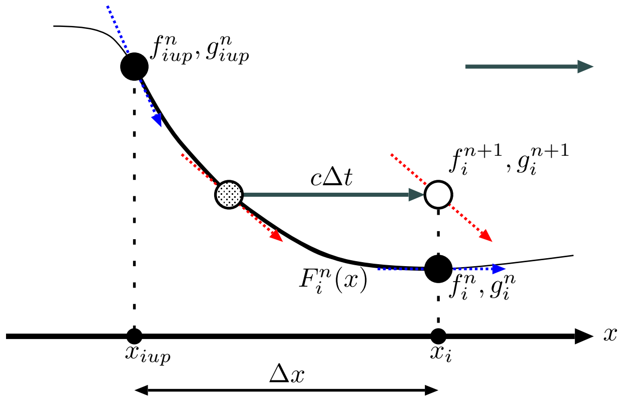
式 (4) において，$c > 0$ のとき $D = -\Delta x$, $iup = i-1$, $c < 0$ のとき $D = \Delta x$, $iup = i+1$ である．

さて，1 次元移流方程式の場合，波は波形を保ったまま移流するため，時間 $t + \Delta t$ における点 x_i の値 f_i^{n+1} は，時間 t における点 $x_i - c\Delta t$ の値 f に等しい（**図-2**）．そのため，値 f_i^{n+1} を求めるためには，$x = x_i - c\Delta t$ を多項式 (2) に代入すると得られる．同様に微分値 g_i^{n+1} に対しても移流方程式が成立するため，式 (3) に代入すれば微分値 g_i^{n+1} が得られる．

$$f_i^{n+1} = F_i^n(x_i - c\Delta t) = a_i\xi^3 + b_i\xi^2 + g_i^n\xi + f_i^n \tag{5}$$

$$g_i^{n+1} = \partial_x F_i(x_i - u\Delta t) = 3a_i\xi^2 + 2b_i\xi + g_i^n \tag{6}$$

ここで，$\xi = -c\Delta t$ である．



図–2 CIP 法の補間関数の作成

2.2 動弾性問題の CIP 解析

CIP 法を用いて 2 次元面内における動弾性問題を解く方法を説明する．

2 次元動弾性問題の支配方程式は以下の通りである．

$$\partial_t v_x = \frac{1}{\rho}(\partial_x \sigma_{xx} + \partial_y \sigma_{xy}) \tag{7}$$

$$\partial_t v_y = \frac{1}{\rho}(\partial_x \sigma_{xy} + \partial_y \sigma_{yy}) \tag{8}$$

$$\partial_t \sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu)\partial_x v_x + \lambda \partial_y v_y \tag{9}$$

$$\partial_t \sigma_{yy} = \lambda \partial_x v_x + (\lambda + 2\mu)\partial_y v_y \tag{10}$$

$$\partial_t \sigma_{xy} = \mu(\partial_x v_y + \partial_y v_x), \tag{11}$$

ここで，v_i, σ_{ij} はそれぞれ変位速度，応力である．変位速度，応力は同じ点で与える．すなわちコロケーション格子を用いる．λ, μ は Lamé 定数であり，ρ は密度である．式 (7)–(11) は行列表示で次のように表される．

$$\partial_t \boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\partial_x \boldsymbol{u} + \boldsymbol{B}\partial_y \boldsymbol{u} \tag{12}$$

ここで，$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ は以下のベクトルおよび行列である．

$$\boldsymbol{u} = (v_x, v_y, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})^T, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\rho \\ \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & 0 & 1/\rho & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

多次元問題を CIP 法で解く方法として，方向分離（例えば文献[7]など）と特性曲線法を用いて 1 次元の移流方程式に帰着させるやり方がある．この計算手順は以下の通りである．

1. x 方向について方向分離を行う．
まず，x 方向のみについての移流方程式を作る．

$$\partial_t \boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\partial_x \boldsymbol{u} \tag{16}$$

2. 特性曲線法を使う．
式 (16) の係数行列 $\boldsymbol{A}$ を対角化する．

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_A \boldsymbol{\Lambda}_A \boldsymbol{P}_A^{-1} \tag{17}$$

$\boldsymbol{P}_A, \boldsymbol{\Lambda}_A$ はそれぞれ $\boldsymbol{A}$ の固有値ベクトルからなる行列，固有値からなる対角行列である．
式 (17) を式 (16) に代入すると次式を得る．

$$\partial_t \boldsymbol{h}_A = \boldsymbol{\Lambda}_A \partial_x \boldsymbol{h}_A \tag{18}$$

ここで，

$$\boldsymbol{h}_A = \boldsymbol{P}_A^{-1} \boldsymbol{u} \tag{19}$$

であり，ベクトル $\boldsymbol{h}_A$ は次式で表される．

$$\boldsymbol{h}_A = \left\{ \begin{array}{c} v_x - \dfrac{\sigma_{xx}}{c_L \rho} \\ v_y - \dfrac{\sigma_{xy}}{c_T \rho} \\ v_x + \dfrac{\sigma_{xx}}{c_L \rho} \\ v_y + \dfrac{\sigma_{xy}}{c_T \rho} \\ \sigma_{yy} - \dfrac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\sigma_{xx} \end{array} \right\} \tag{20}$$

式 (18) は以下に示す 1 次元の移流方程式の集合である．

$$\partial_t \left(v_x \mp \frac{\sigma_{xx}}{c_L \rho} \right) \pm c_L \partial_x \left(v_x \mp \frac{\sigma_{xx}}{c_L \rho} \right) = 0 \tag{21}$$

$$\partial_t \left(v_y \mp \frac{\sigma_{xy}}{c_T \rho} \right) \pm c_T \partial_x \left(v_y \mp \frac{\sigma_{xy}}{c_T \rho} \right) = 0 \tag{22}$$

$$\partial_t \left(\sigma_{yy} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\sigma_{xx} \right) = 0. \tag{23}$$

式 (21), (22) は複合同順である．ここで，c_L, c_T はそれぞれ縦波速度，横波速度を表している．

$$c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \tag{24}$$

これより，特性曲線法によって式の上で x 方向に移流する縦波と横波に分離されることが分かる．

3. CIP 法による求解
式 (21), (22) は 1 次元の移流方程式であるので，2.1 節で示した CIP 法を用いて解くことが可能である．

$$\boldsymbol{h}_A \xrightarrow{\text{CIP}} \boldsymbol{h}_A^* \tag{25}$$

$$\partial_x \boldsymbol{h}_A \xrightarrow{\text{CIP}} \partial_x \boldsymbol{h}_A^* \tag{26}$$

ここで，上付き添字 * は時間ステップ n と $n+1$ の中間の値を表している．ただし，$\partial_y \boldsymbol{h}_A$ は線形補間で求める．

$$\partial_y \boldsymbol{h}_A \xrightarrow{\text{Linear}} \partial_y \boldsymbol{h}_A^* \tag{27}$$

なぜなら，$\partial_y \boldsymbol{h}_A$ を CIP 法で求めるためには，その x 方向に関する微分値 $\partial_x \partial_y \boldsymbol{h}_A$ を必要とするからである．線形補間する方法は M 型 CIP 法と呼ばれている．M 型 CIP 法を用いても精度が落ちないことが知られており[2)]，本研究では計算負荷削減，メモリ節約のため M 型 CIP 法を用いる．
なお，$\partial_x \partial_y \boldsymbol{h}_A$ の値を用いて CIP 計算する方法は C 型 CIP 法として知られている[2)]．

4. 変数変換を行う．
式 (18) によって得られた解 $\boldsymbol{h}_A^*$ を変位速度，応力に戻す．

$$\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{P}_A \boldsymbol{h}_A^* \tag{28}$$

$$\partial_x \boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{P}_A \partial_x \boldsymbol{h}_A^* \tag{29}$$

$$\partial_y \boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{P}_A \partial_y \boldsymbol{h}_A^* \tag{30}$$

5. y 方向に関して方向分離を行う．
x 方向の計算と同様に y 方向に対しても行い，$\boldsymbol{u}^*$ から $\boldsymbol{u}^{n+1}$ を求める．まず，y 方向に関する移流方程式を作る．

$$\partial_t \boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{B}\partial_y \boldsymbol{u}^*. \tag{31}$$

6. 特性曲線法を使う．
式 (31) を 1 次元の移流方程式に変換する．

$$\partial_t \boldsymbol{h}_B^* = \boldsymbol{\Lambda}_B \partial_y \boldsymbol{h}_B^*, \tag{32}$$

なお，ここで $\boldsymbol{h}_B^*$ は

$$\boldsymbol{h}_B^* = \left\{ \begin{array}{c} v_x - \dfrac{\sigma_{yy}}{c_L \rho} \\ v_x - \dfrac{\sigma_{xy}}{c_T \rho} \\ v_y + \dfrac{\sigma_{yy}}{c_L \rho} \\ v_x + \dfrac{\sigma_{xy}}{c_T \rho} \\ \sigma_{xx} - \dfrac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\sigma_{yy} \end{array} \right\} \tag{33}$$

である．式 (32) は次のように書ける．

$$\partial_t \left(v_y \mp \frac{\sigma_{yy}}{c_L \rho} \right) \pm c_L \partial_y \left(v_y \mp \frac{\sigma_{yy}}{c_L \rho} \right) = 0, \tag{34}$$

$$\partial_t \left(v_x \mp \frac{\sigma_{xy}}{c_T \rho} \right) \pm c_T \partial_y \left(v_x \mp \frac{\sigma_{xy}}{c_T \rho} \right) = 0, \tag{35}$$

$$\partial_t \left(\sigma_{xx} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\sigma_{yy} \right) = 0\ . \tag{36}$$

7. CIP 法を使って解く．
式 (32) に対して CIP 法，線形補間を適用する．

$$\boldsymbol{h}_B^* \xrightarrow{\text{CIP}} \boldsymbol{h}_B^{n+1} \tag{37}$$

$$\partial_x \boldsymbol{h}_B^* \xrightarrow{\text{Linear}} \partial_x \boldsymbol{h}_B^{n+1} \tag{38}$$

$$\partial_y \boldsymbol{h}_B^* \xrightarrow{\text{CIP}} \partial_y \boldsymbol{h}_B^{n+1} \tag{39}$$

$$\tag{40}$$

8. 変数変換を行う．
   最後に，CIP 法で得られた $\boldsymbol{h}_B^{n+1}$ を変位速度や応力に戻す．

$$\boldsymbol{u}^{n+1} = \boldsymbol{P}_B \boldsymbol{h}_B^{n+1} \tag{41}$$

$$\partial_x \boldsymbol{u}^{n+1} = \boldsymbol{P}_B \partial_x \boldsymbol{h}_B^{n+1} \tag{42}$$

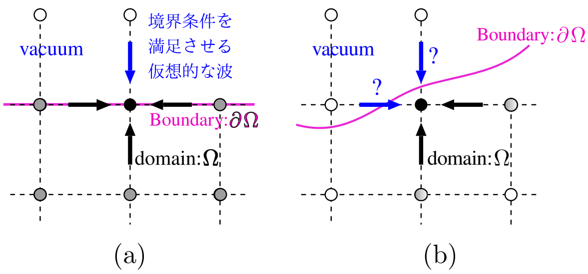
$$\partial_y \boldsymbol{u}^{n+1} = \boldsymbol{P}_B \partial_y \boldsymbol{h}_B^{n+1}. \tag{43}$$

3.　領域外の仮想的な変位速度と応力の計算

3.1　任意の滑らかな境界

自由表面が直交格子に沿っている場合（**図-3**(a)）は，境界の扱いは比較的容易である．このような場合は，領域外の 1 方向から境界条件を満足するような仮想的な波の流入を考えればよい[8]．

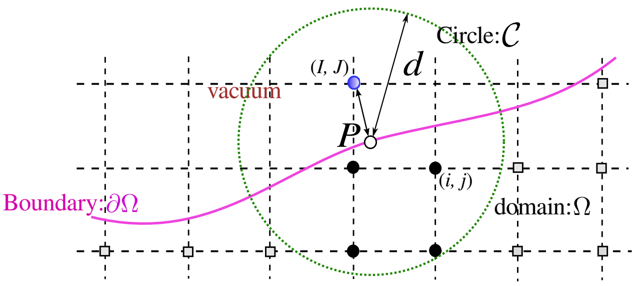
しかし，一般に自由表面は直交格子に沿っていない（**図-3**(b)）．そこで，本研究では Extrapolator 法を用いる．



図–3　自由表面 (a) 直交座標系に沿った自由表面，(b) 任意の滑らかな自由表面

3.2　Extrapolator 法

Extrapolator 法では，領域外の格子点 (I, J) に仮想的な値 $\boldsymbol{u}_{I,J}^*$ を与える．仮想的な値を与えることで，境界付近においても領域内部の計算と同じように計算が可能となる．**図-4** に境界近くの幾何条件を示す．ここで，Ω は物体内部の領域を表している．P は格子点 (I, J) からもっとも近いところにある自由表面上の点である．$\mathcal{C}$ は点 P を中心とする半径 d の円と領域 Ω との共通部分である．d を影響半径と呼ぶ．



図–4　境界付近の幾何形状

仮想的な値 $\boldsymbol{u}_{I,J}^*$ は，領域内部の情報を用いて外挿することで計算する．外挿関数は点 P を中心にテーラー展開をした次式で与える．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_{i,j}^* &= \boldsymbol{u} + \partial_x \boldsymbol{u}(x_i - x_P) + \partial_y \boldsymbol{u}(y_j - y_P) \\ &+ \partial_x^2 \boldsymbol{u}\frac{(x_i - x_P)^2}{2} + \partial_x \partial_y \boldsymbol{u}(x_i - x_P)(y_j - y_P) \\ &+ \partial_y^2 \boldsymbol{u}\frac{(y_j - y_P)^2}{2} + \cdots \end{aligned} \tag{44}$$

ここで上付き添字 * は外挿関数によって得られる仮想的な値を表す．また，本章では，特に断りが無い場合，下付き添字のない $\boldsymbol{u}$ は点 P における値を表すこととする．ここで，k 次より大きな項を無視すると次のようにかける．

$$\boldsymbol{u}_{i,j}^* = \boldsymbol{\Pi}_{i,j}^k \boldsymbol{u}^k \tag{45}$$

$\boldsymbol{\Pi}_{i,j}^k$ および $\boldsymbol{u}^k$ は，それぞれ次式で表される行列およびベクトルである．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Pi}_{i,j}^k = \Bigg[\boldsymbol{I}_5, \cdots, &\frac{(x_i - x_p)^\alpha (y_j - y_P)^\beta}{\alpha!\beta!} \boldsymbol{I}_5, \\ &\cdots, \frac{(y_j - y_P)^k}{k!} \boldsymbol{I}_5 \Bigg] \end{aligned} \tag{46}$$

$$\boldsymbol{u}^k = \left[\boldsymbol{u}, \cdots, \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \boldsymbol{u}, \cdots, \partial_y^k \boldsymbol{u} \right]^T \tag{47}$$

α, β は $\alpha + \beta \leq k$ を満たす非負の整数である．

式 (45) の係数 $\boldsymbol{u}^k$ は以下の条件を満足するように決定する．

1. 点 P において境界条件を満足する
2. 点 P において Saint-Venant の適合条件を満足する
3. 領域 $\mathcal{C}$ の点 (i, j) において，値 $\boldsymbol{u}_{i,j}$ と仮想的な値 $\boldsymbol{u}_{i,j}^*$ ができるだけ整合している

3.3　境界条件

1 つ目の条件として，点 P における境界条件を考える．点 P における境界条件は次式で与えられる．

$$\boldsymbol{L}^0(\tau)\boldsymbol{u}^0(x(\tau), y(\tau), t) = 0 \tag{48}$$

ここで，$\boldsymbol{L}^0(\tau)$ は以下で表される行列である．

$$\boldsymbol{L}^0(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -d_\tau y(\tau) & 0 & d_\tau x(\tau) \\ 0 & 0 & 0 & d_\tau x(\tau) & -d_\tau y(\tau) \end{bmatrix} \tag{49}$$

$x(\tau), y(\tau)$ は境界の幾何形状を表す変数であり，τ はそのパラメータである．d_τ はパラメータ τ に関する全微分を表す．式 (48) は 0 次境界条件である．

式 (48) を時間 t に関して偏微分し，式 (12) を用いると次式を得る．

$$\boldsymbol{L}^0 \left(\boldsymbol{A}\partial_x \boldsymbol{u}^0 + \boldsymbol{B}\partial_y \boldsymbol{u}^0 \right) = \boldsymbol{0} \tag{50}$$

さらに，式 (48) をパラメータ τ に関して全微分すると次式を得る．

$$\left(d_\tau \boldsymbol{L}^0 \right) \boldsymbol{u}^0 + \boldsymbol{L}^0 \left(d_\tau x \partial_x \boldsymbol{u}^0 + d_\tau y \partial_y \boldsymbol{u}^0 \right) = \boldsymbol{0} \tag{51}$$

こうして，1 次の境界条件が次のように表記できる．

$$\boldsymbol{L}^1\boldsymbol{u}^1=\boldsymbol{0} \tag{52}$$

$\boldsymbol{L}^1$ は次式で表される行列である．

$$\boldsymbol{L}^1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{L}^0 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{L}^0\boldsymbol{A} & \boldsymbol{L}^0\boldsymbol{B}\\ d_\tau\boldsymbol{L}^0 & d_\tau x\boldsymbol{L}^0 & d_\tau y\boldsymbol{L}^0\end{bmatrix} \tag{53}$$

同様の操作は，高階の微分に関しても可能である．k 階の微分まで計算したものをまとめて以下のように表記する．

$$\boldsymbol{L}^k\boldsymbol{u}^k=\boldsymbol{0} \tag{54}$$

境界条件を表す行列 $\boldsymbol{L}^k$ のサイズは $n_l\times n_v$ である．ここで，n_l は境界条件の数であり，n_v はベクトル $\boldsymbol{u}^k$ の要素数である．2 つの数 n_l, n_v はそれぞれ以下のような式で書き表される．

$$n_l=(k+1)(k+2),\quad n_v=\frac{5(k+1)(k+2)}{2} \tag{55}$$

3.4 適合条件

2 つ目の条件として，点 P における Saint-Venant の適合条件を考える．適合条件は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}\partial_x\partial_y\sigma_{xy}=\alpha_2\partial_x^2\sigma_{xx}+\alpha_1\partial_x^2\sigma_{yy}\\ +\alpha_1\partial_y^2\sigma_{xx}+\alpha_2\partial_y^2\sigma_{yy}\end{aligned} \tag{56}$$

ここで，

$$\alpha_1=\frac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)},\qquad \alpha_2=-\frac{\lambda}{4(\lambda+\mu)}. \tag{57}$$

である．式 (56) をさらに $k-2$ 階微分すると，全部で

$$n_c=\frac{k(k-1)}{2} \tag{58}$$

個の関係を得る．

k 次までの適合条件を使うとベクトル $\boldsymbol{u}$ は，次のように n_v-n_c 個の成分をもつベクトル $\hat{\boldsymbol{u}}$ を用いて次のように縮約される．

$$\boldsymbol{u}^k=\boldsymbol{G}^k\hat{\boldsymbol{u}}^k \tag{59}$$

ここで，$\boldsymbol{G}^k$ は $n_v\times(n_v-n_c)$ の行列である．結局，式 (59) を式 (54) に代入して，次式を得る．

$$\boldsymbol{L}^k\boldsymbol{G}^k\hat{\boldsymbol{u}}^k=\boldsymbol{0} \tag{60}$$

3.5 特異値分解による境界条件ベクトルの縮約

式 (60) を満足するベクトル $\hat{\boldsymbol{u}}^k$ を計算するため，行列 $\boldsymbol{L}^k\boldsymbol{G}^k$ に対して特異値分解を使う．$\boldsymbol{L}^k\boldsymbol{G}^k$ は，$n_l\times(n_v-n_c)$ の行列であり，式 (55), (58) より，$(n_v-n_c)>n_l$ である．行列 $n_l\times(n_v-n_c)$ は，以下のように特異値分解できる．

$$\boldsymbol{U}^k\boldsymbol{\Sigma}^k\left(\boldsymbol{V}^k\right)^T\hat{\boldsymbol{u}}^k=\boldsymbol{0} \tag{61}$$

ここで，行列 $\boldsymbol{\Sigma}^k$ は次式で与えられる

$$\boldsymbol{\Sigma}^k=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{\Sigma}}^k & \boldsymbol{0}\end{bmatrix} \tag{62}$$

$\bar{\boldsymbol{\Sigma}}^k$ は非ゼロの特異値からなる行列である．非ゼロの特異値の数を $n_n(\le n_v-n_c)$ とすると，$\bar{\boldsymbol{\Sigma}}^k$ は $n_l\times n_n$ の行列である．非零の特異値がある場合，$\bar{\boldsymbol{\Sigma}}^k$ は正方行列とはならないことに注意されたい．行列 $\boldsymbol{U}^k$，$\boldsymbol{V}^k$ はそれぞれ $n_l\times n_l$，$(n_v-n_c)\times(n_v-n_c)$ の直交行列である．

式 (61), (62) から次式が成立する．

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_1^k\\ \boldsymbol{K}_2^k\end{bmatrix}\hat{\boldsymbol{u}}^k=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \bar{\boldsymbol{u}}^k\end{Bmatrix} \tag{63}$$

ここで，$\boldsymbol{K}_1^k$, $\boldsymbol{K}_2^k$ はそれぞれ $n_n\times(n_v-n_c)$, $(n_v-n_c-n_n)\times(n_v-n_c)$ からなる行列である．

$$\boldsymbol{V}^{kT}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_1^k\\ \boldsymbol{K}_2^k\end{bmatrix} \tag{64}$$

式 (63) の右辺は n_n 個の要素からなるゼロベクトルと $n_v-n_c-n_n$ の要素を持つベクトル $\bar{\boldsymbol{u}}$ からなる．ベクトル $\hat{\boldsymbol{u}}^k$ はベクトル $\bar{\boldsymbol{u}}$ を用いて次のように表される．

$$\boldsymbol{K}_2^k\hat{\boldsymbol{u}}^k=\bar{\boldsymbol{u}}^k \tag{65}$$

式 (65) を式 (60) に代入すると，

$$\boldsymbol{u}^k=\boldsymbol{G}^k\boldsymbol{K}_2^k\bar{\boldsymbol{u}}^k \tag{66}$$

を得る．結局，境界条件と適合条件を考えると，ベクトル $\boldsymbol{u}^k$ を表すための未知数は $\bar{\boldsymbol{u}}^k$ となる．

3.6 外挿補間関数の係数の決定法

領域 $\mathcal{C}$ で値 $u_{i,j}$ と補間関数によって得られる値 $\boldsymbol{u}_{i,j}^*$ ができるだけ近い値を取るよう，最小 2 乗法を用いてベクトル $\bar{\boldsymbol{u}}$ を決定する．CIP 法では微分値も与えられるため，微分値に対しても同時に最小化を図る．

点 (i,j) における値は外挿関数によって次のように与えられる．

$$\boldsymbol{u}_{i,j}^{1*}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{u}_{i,j}\\ \partial_x\boldsymbol{u}_{i,j}\\ \partial_y\boldsymbol{u}_{i,j}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\Pi}_{i,j}^k\\ \partial_x\boldsymbol{\Pi}_{i,j}^k\\ \partial_y\boldsymbol{\Pi}_{i,j}^k\end{Bmatrix}\boldsymbol{u}^k \tag{67}$$

領域 $\mathcal{C}$ におけるすべての点 $(i,j)\in\mathcal{C}$ について式 (67) をまとめて次のように書く．

$$\boldsymbol{u}_{\mathcal{C}}^{1*}=\boldsymbol{\Pi}_{\mathcal{C}}^k\boldsymbol{u}^k \tag{68}$$

ここで，$\boldsymbol{u}_{\mathcal{C}}^{1*}$ および $\boldsymbol{\Pi}_{\mathcal{C}}^k$ は次のように表される．

$$\boldsymbol{u}_{\mathcal{C}}^{1*}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{u}_{i_1,j_1}^{1*}\\ \vdots\\ \boldsymbol{u}_{i_{n_p},j_{n_p}}^{1*}\end{Bmatrix},\quad \boldsymbol{\Pi}_{\mathcal{C}}^k=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Pi}_{i_1,j_1}^k\\ \partial_x\boldsymbol{\Pi}_{i_1,j_1}^k\\ \partial_y\boldsymbol{\Pi}_{i_1,j_1}^k\\ \vdots\\ \boldsymbol{\Pi}_{i_m,j_m}^k\\ \partial_x\boldsymbol{\Pi}_{i_{n_p},j_{n_p}}^k\\ \partial_y\boldsymbol{\Pi}_{i_{n_p},j_{n_p}}^k\end{bmatrix} \tag{69}$$

n_p は，$(i,j)\in\mathcal{C}$ を満たす点の総数である．$\boldsymbol{u}_{\mathcal{C}}^{1*}$ は $15n_p$ の要素からなるベクトル，$\boldsymbol{\Pi}_{\mathcal{C}}^k$ は $15n_p\times n_v$ の行列である．

式 (68) に対して式 (66) を代入すると次式を得る．

$$\boldsymbol{u}_{\mathcal{C}}^{1*} = \boldsymbol{M}_{\mathcal{C}}^{k}\bar{\boldsymbol{u}}^{k} \tag{70}$$

$$\boldsymbol{M}_{\mathcal{C}}^{k} = \boldsymbol{\Pi}_{\mathcal{C}}^{k}\boldsymbol{G}^{k}\boldsymbol{K}_{2}^{k} \tag{71}$$

$\boldsymbol{M}_{\mathcal{C}}^{k}$ は $15n_p \times (n_v - n_c - n_n)$ の行列である．

さて，点 $(i,j) \in \mathcal{C}$ を満たすすべての点について，$\boldsymbol{u}_{i,j}^{1}$ をまとめたものを $\boldsymbol{u}_{\mathcal{C}}^{1}$ と表現する．$\boldsymbol{u}^{1}$ と $\boldsymbol{u}^{1*}$ ができるだけ近い値を取るようにするため，最小化する目的関数 Φ を次のように定義する．

$$\Phi(\bar{\boldsymbol{u}}^{k}) = \left(\boldsymbol{u}_{\mathcal{C}}^{1} - \boldsymbol{M}_{\mathcal{C}}^{k}\bar{\boldsymbol{u}}^{k}\right)^{T}\left(\boldsymbol{u}_{\mathcal{C}}^{1} - \boldsymbol{M}_{\mathcal{C}}^{k}\bar{\boldsymbol{u}}^{k}\right) \tag{72}$$

$\Phi(\bar{\boldsymbol{u}}^{k})$ を最小化する $\bar{\boldsymbol{u}}^{k}$ は次式で与えられる．

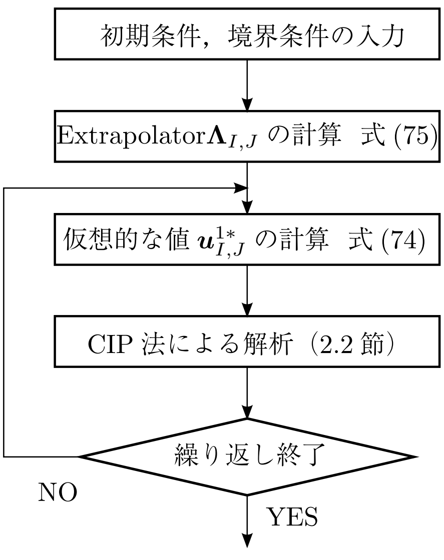
$$\bar{\boldsymbol{u}}^{k} = \left({\boldsymbol{M}_{\mathcal{C}}^{k}}^{T}\boldsymbol{M}_{\mathcal{C}}^{k}\right)^{-1}{\boldsymbol{M}_{\mathcal{C}}^{k}}^{T}\bar{\boldsymbol{u}}_{\mathcal{C}} \tag{73}$$

結局，式 (45),(66), (73) より，点 (I,J) における仮想的な値 $\boldsymbol{u}_{I,J}^{1*}$ は次式で与えられる．

$$\boldsymbol{u}_{I,J}^{1*} = \boldsymbol{\Lambda}_{I,J}\boldsymbol{u}_{\mathcal{C}}^{1} \tag{74}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{I,J} = \boldsymbol{\Pi}_{I,J}^{k}\boldsymbol{G}^{k}\boldsymbol{K}_{2}^{k}\left({\boldsymbol{M}_{\mathcal{C}}^{k}}^{T}\boldsymbol{M}_{\mathcal{C}}^{k}\right)^{-1}{\boldsymbol{M}_{\mathcal{C}}^{k}}^{T} \tag{75}$$

ここで，$\boldsymbol{\Lambda}_{I,J}$ は $15 \times 15n_p$ の行列である．この行列 $\boldsymbol{\Lambda}_{I,J}$ は，境界の幾何条件によって決まるため，境界の幾何学的な変化を無視する場合は，繰り返し計算を行う必要はない．つまり，あらかじめ行列 $\boldsymbol{\Lambda}_{I,J}$ の計算を済ませておけば，仮想的な値は内部領域の値 $\boldsymbol{u}_{\mathcal{C}}^{1}$ を乗じるだけで計算できる．計算のフローを**図-5** に示す．



図–5 計算のフロー

3.7 影響半径の大きさ

行列 $\boldsymbol{\Lambda}_{I,J}$ を決定するためには，未知の値の数より既知の値の数の方が多くなければならない．つまり，次式を満足する必要がある．

$$\varepsilon(k,d) = \frac{\text{未知の値の数}}{\text{既知の値の数}} \geq 1 \tag{76}$$

Extrapolator 法を提案した Lombard らは数値安定性のため，$\varepsilon(k,d)$ を 4 程度にするのが望ましいと指摘しており，$k=3$ のとき $d = 3.2\Delta x$ 程度が安定的に計算できると主張している．このとき，$n_p \sim 15$ となる．

本研究では，CIP 法を用いているため，1 点あたりの情報として $\boldsymbol{u}_{i,j}$ の値に加え，その空間微分値 $\partial_x \boldsymbol{u}_{i,j}$, $\partial_y \boldsymbol{u}_{i,j}$ も持っている．そのため，従来の方法と比較して半径を小さくして補間関数を作成することが可能となる．数値実験の結果 $k=3$ のとき，$d = 1.8\Delta x$ 程度で良く，このとき $n_p \sim 7$ となる．

4. 数値解析例

CIP 法に対する Extrapolator 法の適用可能性について検証するため，2 つの問題を解いた．ひとつは斜面を有する領域の内部から球面波を与える問題であり，もうひとつは円孔に平面波を入射する問題である．

4.1 問題の諸条件

いずれの問題においても対象は均質，等方，線形弾性体とした．格子間隔は $\Delta x = 5.0 \times 10^{-3}$，時間増分は $\Delta t \leq \Delta x/2c_L$ とした．つまり，Courant 数は 0.5 である．Extrapolator 法で用いる次数は $k=3$，影響半径は $r = 1.8\Delta x$ とした．

ヤング率を $E = 1.0$, ポアソン比を $\nu = 0.25$，密度を $\rho = 1$ としたこれらの値から Lamé 定数 $\lambda = 0.4$, $\mu = 0.4$，縦波速度 $c_L \simeq 1.095$，横波速度 $c_T \simeq 0.632$，レーリー波速度 $c_R \simeq 0.581$ などが求まる．

4.2 直線斜面を境界とする問題

(1) 問題の設定

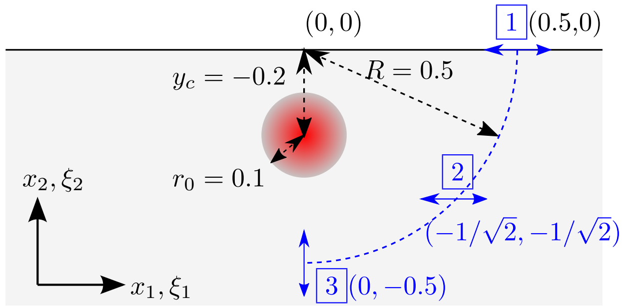
自由表面を直線とし，半無限領域を考える．領域内部において，直応力成分に負の値を与える，つまり圧縮力を与えることで波を励起させる．これは，物理的には，熱膨張によって生じる熱応力をイメージしている．なお，圧縮力のみによって励起される波であるため，発生する波は主に縦波となる．与えた応力は以下の通りである．

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \begin{cases} -\left\{2\left(\dfrac{r}{r_0}\right)^2 - 3\left(\dfrac{r}{r_0}\right)^2 + 1\right\} & r < r_0 \\ 0 \qquad \text{otherwise} & \end{cases} \tag{77}$$

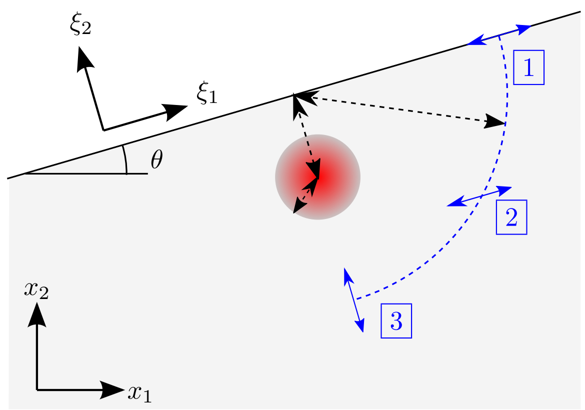
$$r = \sqrt{\xi_1^2 + (\xi_2 - \xi_c)^2} \tag{78}$$

ここで，$r_0 = 0.1$, $\xi_c = 0.2$ とした．ξ_1, ξ_2 はそれぞれ自由境界に沿うように取った座標系である．

比較のため，水平な自由表面のケース（**図-7**）を仮想的な波の流入を考える方法[8]で解き，傾いた自由表面のケース（**図-7**）を Extrapolator 法を用いて解いた．傾いた自由表面のケースでは，自由表面を直交座標系に対して $\theta(\tan\theta = 7/24)$ 傾けた．



図–6　水平な自由表面：変位速度の観測点



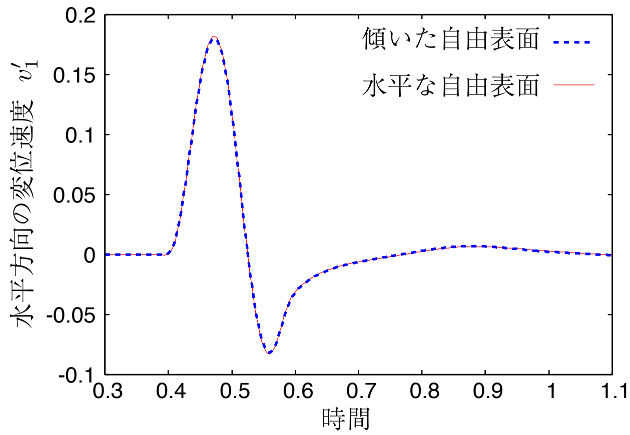
図–7　傾いた自由表面：変位速度の観測点

(2)　数値解析結果の比較

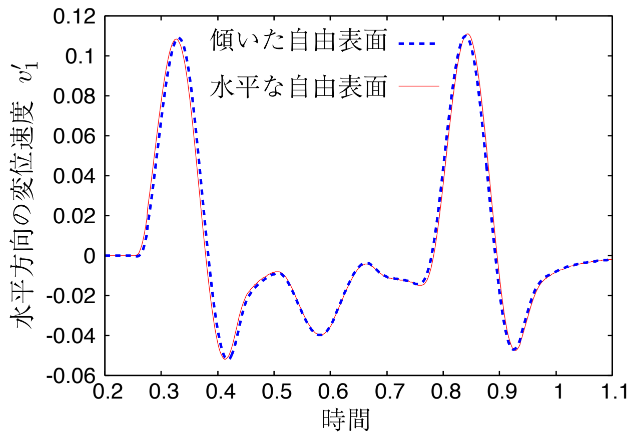
図-6, **図-7** の観測点における変位速度を比較した．点1,2 においては，自由境界に沿った方向（接線方向）の変位速度 v_1'，点 3 においては，自由境界に直交する方向（法線方向）の変位速度 v_2' を比較した．傾いた自由表面のケースでは，数値解析によって計算される値が直交座標系の値であるため，座標変換をしている．

図-8 に点 1 における接線方向の変位速度を示す．点1 は，自由表面上の点であるが，水平のケースと斜めのケースで良好な一致を示しているのが分かる．同様に，**図-9** に点 2 における接線方向の変位速度，**図-10** に点 3 における接線方向の変位速度を示す．自由表面で反射した波も良い一致を見せている．これより，Extrapolator 法の妥当性が示せた．

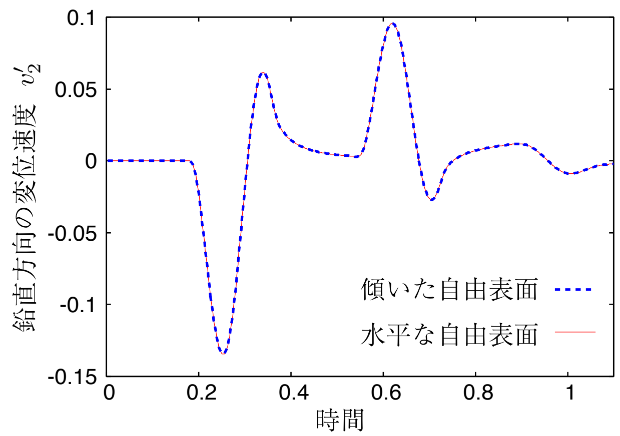
図-11, **図-12** に $t = 0.548$ における変位速度の大きさ $\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ の分布を示す．ともに同じように波が伝播している様子が分かる．



図–8　点 1 における接線方向の変位速度



図–9　点 2 における接線方向の変位速度



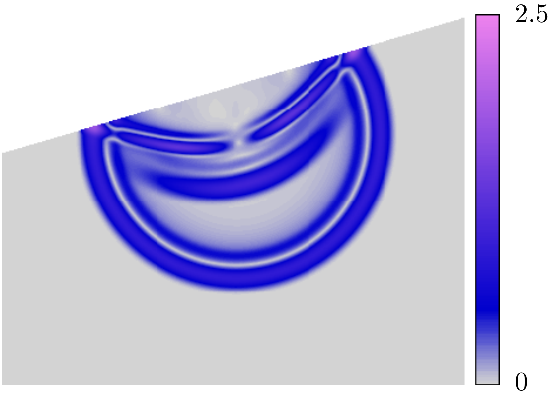
図–10　点 3 における法線方向の変位速度

4.3　円孔に平面波が入射する問題

(1)　問題設定

円孔に対して平面波を入射し，その波が散乱する様子を調べた．領域は $[-1, 1] \times [-1, 1]$ とする．円孔は領域の中央にあり，その半径は $r = 0.1$ である．平面波は領域の左端，すなわち $x = -1$ から入射する．入射する波は次式で示すリッカーウェーブレットを縦波と

図–11 水平な自由表面のケースにおける変位速度の絶対値 $\sqrt{v_1^2+v_2^2}$ の分布 $(t=0.548)$



図–12 傾いた自由表面のケースにおける変位速度の絶対値 $\sqrt{v_1^2+v_2^2}$ の分布 $(t=0.548)$

して変位速度 v_1 に与えた．

$$g(t)=\{2(\pi f_c(t-t_c)^2-1)\}\exp^{-(\pi f_c(t-t_c))^2} \quad (79)$$

ここで，f_c は中央周波数であり，t_c は波の鋭さを決定するパラメータである．この問題では，初期状態において波のピークが左端（$x=-1$）であるとした．また，中央周波数は $f_c=10$ とし，中央ピークパラメータは $t_c=0.1$ とした．さらに境界での影響を無視するために上下を周期境界とした．**図-13** に問題の模式図を示す．

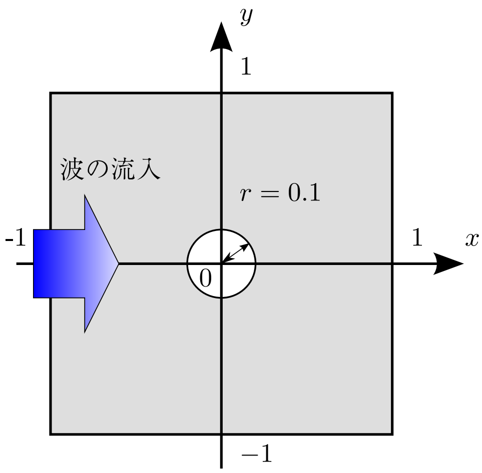
(2) 数値解析結果

図-14(a), (b) に時間 $t=0.1027, 1.643$ における速度の絶対値 $\sqrt{v_x^2+v_y^2}$ の分布を示す．**図-14**(a) において，平面波が円孔に入射し散乱が生じていることが分かる．**図-14**(b) では，波が円孔を透過している．また，縦波と横波が散乱波として生じており，2 つの円状の波が広がっている．

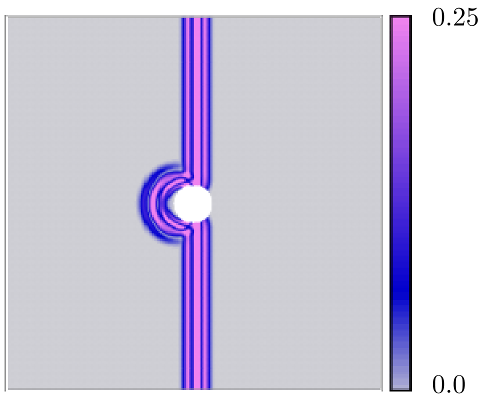
5. おわりに

本研究での成果を以下に挙げる．

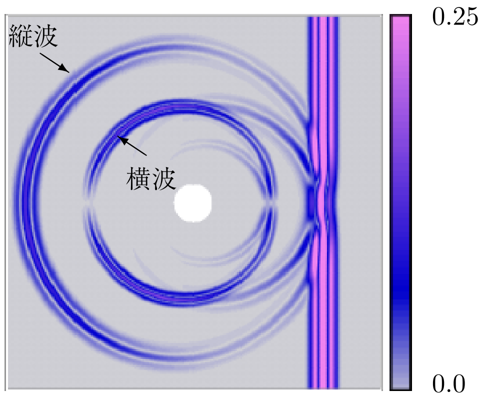
- Extrapolator 法を用いることで，動弾性問題の CIP 解析において滑らかな自由境界を取り扱えることを示した．
- 従来の Extrapolator 法と比較して，影響半径 d の大きさが小さくてすむことが分かった．これは，CIP 法では格子点 1 点に値の他に微分値があり，1 点あたりの情報が多いため，少ない点で補間関数が作れるためである．



図–13 円孔の問題



(a) $t=1.027$



(b) $t=1.643$

図–14 変位速度の大きさ $\left(\sqrt{v_x^2+v_y^2}\right)$ の分布

今後は精度の検証や他の手法との比較を行う予定である．特に，自由境界付近に発生するレーリー波について詳細な検討を行いたい．本研究では縦波を入射波として与えたため，顕著なレーリー波は観測されなかったが，Extrapolator 法はレーリー波が生じる弾性波でも解析可能であり，別の問題において計算精度の確認が必要であると考えいてる．また，動弾性問題の CIP 解析をさらに発展させるためには，応力境界や吸収境界の取扱いについても考慮する必要がある．

参考文献

1) 落合誠： レーザ超音波法とその非破壊検査への応用, 非破壊検査第 57 巻 1 号, 2008.
2) 矢部孝, 尾形陽一, 内海隆行: CIP 法, 森北出版, 2003.
3) Takewaki, H., Nishiguchi, A. and Yabe, T. : Cubic interpolated pseudo-particle method (CIP) for solving hyperbolic-type equations, *Journal of Computational Physics*, Vol. 61, pp. 261–268, November 1985.
4) Takewaki, H. and Yabe, T. : The cubic-interpolated pseudo particle (CIP) method: application to nonlinear and multi-dimensional hyperbolic equations, *Journal of Computational Physics*, Vol. 70, pp. 355–372, July 1987.
5) Lombard, B., Piraux, J., Gélis, C. and Virieux, J. : Free and smooth boundaries in 2-D finite-difference schemes for transient elastic waves, *Geophysical Journal International*, Vol. 172, No. 1, pp. 252–261, 2008.
6) Schwartzkopff, T., Dumbser, M. and Munz, C. : Fast high order finite volume schemes for linear wave propagation, *Numerische Mathematik*, 2003.
7) Chorin, A. : Numerical solution of the Navier-Stokes equations, *Mathematics of Computation*, Vol. 22, No. 104, pp. 745–762, 1968.
8) 西藤潤：動弾性問題への CIP 法の適用に関する研究, 応用力学論文集, Vol. 12, pp. 135–142, 2009.

(2010 年 3 月 9 日 受付)