

### 3次元動弾性学の周期多重極法と その平面2周期構造による散乱問題への適用

A periodic FMM for elastodynamics in 3D and  
its applications to problems related to waves scattered by a doubly periodic layer of scatters

飯盛浩司\*・吉川仁\*\*・西村直志\*\*\*

Hiroshi ISAKARI, Hitoshi YOSHIKAWA and Naoshi NISHIMURA

\*学生会員 修(工) 京都大学大学院 院生 工学研究科 社会基盤工学専攻 (〒615-8540 京都市西京区京都大学桂C)

\*\*正会員 博(工) 京都大学大学院 講師 情報学研究科 複雑系科学専攻 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

\*\*\*正会員 工博 京都大学大学院 教授 情報学研究科 複雑系科学専攻 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

We investigate a periodic FMM for elastodynamics in this study. To avoid fictitious eigenfrequency, we use the Burton-Miller method. We verify the proposed method by comparing the obtained numerical results with analytic solutions for an infinite domain. We then apply the proposed method to scattering problems for two periodic arrays of elastic inclusions and holes, and compare the obtained energy transmittances with analytical and experimental result from previous studies. We observe good agreements. Through these numerical analyses, we confirm the occurrence of Wood's anomaly in elastodynamics.

**Key Words :** FMM, periodic boundary value problem, elastodynamics, phononic crystal

#### 1. 緒言

近年、フォトニック結晶やメタマテリアルといった、周期構造に起因して特徴的な性質を示す新しい材料に注目が集まっている。そのため主に光学や電磁気学においては、波動周期境界値問題を扱った研究が進められており、種々の興味深い現象が取り扱われている。著者らのグループは、こういった問題に対し、高速多重極境界積分方程式法を用いたアプローチを試みており、これまでに Helmholtz 方程式<sup>1)</sup> や Maxwell 方程式<sup>2)</sup> の周期波動問題の解析に適した「周期多重極法」の開発を行ってきた。高速多重極法は境界積分方程式法的高速解法であり、放射条件を自然に扱えるため、波動散乱問題に適している<sup>3)</sup>。これを周期問題に拡張したのが周期多重極法であり、これまで特に電磁波動問題においてその有効性が明らかになってきている。

弾性波動の周期問題においても、支配方程式の類似性から光学や電磁気学等と同様の現象が起これと考えられ、フォノン結晶<sup>4)</sup>やアコースティックメタマテリアル<sup>5)</sup>等への応用が期待されている。しかしながら、光学の場合と比較すると、動弾性学の周期境界値問題の研究は十分に進んでいるとは言い難い。その原因としては、動弾性学の周期境界値問題を取り扱うことのできる数値解法が確立されていないことが挙げられる。フォノン結晶等の新しい材料の設計を行うためには、周期弾性波動問題を効率的に解析できる数値解析手法の開発が不可欠である。

そこで著者らのグループでは近年、2次元、3次元動

弾性学における周期多重極法の開発を行った<sup>6)7)</sup>。しかしながら前報<sup>7)</sup>において開発した手法は、見かけの固有値問題の発生しえない問題に適用範囲が限られていた。そこで、本研究では3次元動弾性学における周期多重極法を、より一般の周期波動散乱問題へ適用することを試みる。具体的には複数の材料からなる領域における散乱問題を取り扱えるよう定式化を修正する。また、見かけの固有値問題を回避するため Burton-Miller 法<sup>8)</sup>を適用する。そして、球形の散乱体が層状に配置された周期構造による弾性波の散乱問題を数値的に解く。数値実験を通して開発した手法の妥当性、適用性を検証する。

#### 2. 3次元動弾性学における周期境界値問題と周期多重極法

まずはじめに、本研究で開発した周期多重極法による3次元動弾性学の周期境界値問題の解法を述べる。

##### 2.1 周期境界値問題

解析領域  $D$  を

$$D = ((-\infty, \infty) \otimes [-\zeta/2, \zeta/2] \otimes [-\zeta/2, \zeta/2]) \quad (1)$$

とする。すなわち、本論文では等方周期問題を考え、 $x_2, x_3$  方向の周期はともに  $\zeta$  で、等しいとする。図-1に示すように  $D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_N$  であるとする。各々の領域  $D_m$  で変位  $u_i$  は次の Navier-Cauchy の式

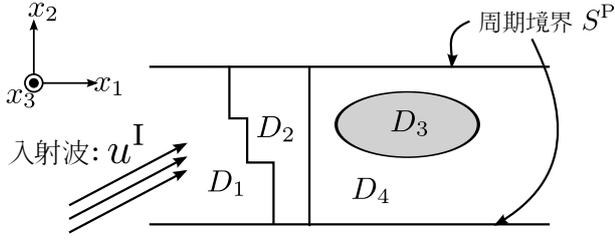


図-1 周期境界値問題

を満たす。

$$\mu^m u_{i,jj} + (\lambda^m + \mu^m) u_{j,ij} + \rho^m \omega^2 u_i = 0 \quad (2)$$

ここに、 $\rho^m$  は領域  $D_m$  を構成する材料の密度、 $(\lambda^m, \mu^m)$  は Lamé 定数であり、これを用いて弾性テンソル  $C_{ijpq}^m$  は次のように定義される。

$$C_{ijpq}^m = \lambda^m \delta_{ij} \delta_{pq} + \mu^m (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp})$$

また、 $\omega$  は周波数である。

境界条件は  $\partial D_k \cap \partial D_m$  ( $\partial D_i$  は領域  $D_i$  の境界) において、変位  $u_i$  及びトラクション  $t_i$  が連続であるとする。 $t_i$  は次式で与えられる。

$$t_i = C_{ijpq}^m u_{p,q} n_j \quad (3)$$

ここに、 $n_j$  は  $\partial D_k \cap \partial D_m$  上の単位法線ベクトルである。さらに、散乱場に対し、無限遠において放射条件を課すものとする。

また、周期境界  $S^P$  上では以下のような周期境界条件が課されているとする。

$$u_i(x_1, \frac{\zeta}{2}, x_3) = e^{i\beta_2} u_i(x_1, -\frac{\zeta}{2}, x_3) \quad (4)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_2}(x_1, \frac{\zeta}{2}, x_3) = e^{i\beta_2} \frac{\partial u_i}{\partial x_2}(x_1, -\frac{\zeta}{2}, x_3) \quad (5)$$

$$u_i(x_1, x_2, \frac{\zeta}{2}) = e^{i\beta_3} u_i(x_1, x_2, -\frac{\zeta}{2}) \quad (6)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_3}(x_1, x_2, \frac{\zeta}{2}) = e^{i\beta_3} \frac{\partial u_i}{\partial x_3}(x_1, x_2, -\frac{\zeta}{2}) \quad (7)$$

ここに、 $\beta_2, \beta_3$  は位相差であり、入射波の縦波、横波の別に応じて、

$$\beta_i = k_{L,T} p_i \zeta$$

と書ける。ここに、 $\mathbf{p}$  は入射波の伝播方向を表す単位ベクトルである。

## 2.2 境界積分方程式

前小節で述べた周期境界値問題と等価な境界積分方程式は次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [u_i(\mathbf{x}) + \alpha t_i(\mathbf{x})] &= [u_i^I + \alpha t_i^I] \delta_{1m} \\ &+ \text{v.p.} \int_{\partial D_m} \left[ (\Gamma_{ij}^{m;P} + \alpha T_{ik} \Gamma_{kj}^{m;P}) (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] t_j(\mathbf{y}) dS_y \\ &- \text{p.f.} \int_{\partial D_m} \left[ (\Gamma_{ij}^{m;P} + \alpha T_{ik} \Gamma_{kj}^{m;P}) (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] u_j(\mathbf{y}) dS_y \end{aligned} \quad (8)$$

$$x \in \partial D_m$$

ここに、 $u_i^I, t_i^I$  は入射波およびそれに対応するトラクション、 $\text{v.p.}$  は主値、 $\text{p.f.}$  は発散積分の有限部分を表し、 $T_{ij} = C_{ipjq} n_p \partial_q$  である。定数  $\alpha$  は見かけの固有値問題が発生しうる領域においては  $\text{Im } \alpha \neq 0$  を満たすようにとり、それ以外では  $\alpha = 0$  とする。 $\Gamma_{ij}^{m;P}, \Gamma_{Iij}^{m;P}$  は周期境界条件を満たす Green 関数および二重層核であり、次の格子和で表される (以降、領域番号を表す  $m$  は省略する)。

$$\Gamma_{ij}^P(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{\omega \in \mathcal{L}(R)} \Gamma_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y} - \omega) e^{i\beta \cdot \omega} \quad (9)$$

$$\Gamma_{Iij}^P(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{\omega \in \mathcal{L}(R)} \Gamma_{Iij}(\mathbf{x} - \mathbf{y} - \omega) e^{i\beta \cdot \omega} \quad (10)$$

ここに、 $\Gamma_{ij}, \Gamma_{Iij}$  は各々、3次元周波数域動弾性学の放射条件を満たす基本解および二重層核であり、次式で表される。

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= \frac{1}{\mu} \left[ G_T(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta_{ij} \right. \\ &\left. + \frac{1}{k_T^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (G_T(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - G_L(\mathbf{x} - \mathbf{y})) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

$$\Gamma_{Iij}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial y_l} \Gamma_{ik}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) C_{klmj} n_m(\mathbf{y}) \quad (12)$$

$G_L, G_T$  は3次元 Helmholtz 方程式の基本解で、次式で表される。

$$G_L = \frac{e^{ik_L |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}, \quad G_T = \frac{e^{ik_T |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad (13)$$

$k_L, k_T$  は各々、縦波、横波の波数、 $\mathcal{L}$  は次式で表される格子点である。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(R) &= \{(0, \omega_2, \omega_3) | \omega_2 = p\zeta, \omega_3 = q\zeta, \\ &|p|, |q| \leq R, p, q \in \mathbb{Z}\} \end{aligned} \quad (14)$$

なお、この定式化は Burton-Miller 法<sup>8)</sup>を用いたものであり、見かけの固有値問題<sup>3)</sup>を回避していることに注意する。すなわち、境界積分方程式 (8) の解は一意である。この定式化を用いれば、前報<sup>7)</sup>で取り扱ったような半無限領域に限らず、一般の境界値問題を解くことができる。

### 2.3 高速多重極法

周期多重極法の定式化を行う準備として、ここでは非周期問題における高速多重極法の定式化について必要最小限を説明する。詳細は Rokhlin<sup>9)10)</sup>, Nishimura<sup>11)</sup> 等で解説されている。

高速多重極法は積分方程式 (8) に現れる積分を高速に計算する手法である。したがって、積分方程式を離散化して得られる代数方程式  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  のソルバーに  $A\mathbf{x}$  の計算を使う反復解法を用いることが不可欠である。

周波数域波動問題の高速多重極法においては、基本解の展開方法が2種類存在し、各々、

- 級数展開型多重極法 (低周波数域に用いる)
- diagonal form (高周波数域に用いる)

と呼ばれる。以下、本研究で用いた級数展開型多重極法について概説する。

動弾性学の高速多重極法は、Helmholtz 方程式に対するそれとほぼ同様にして定式化を行うことができる。従って、定式化の準備として、3次元 Helmholtz 方程式の基本解  $G_{L,T}$  に関連する諸式を示す。Gegenbauer の加法定理を用いると、3次元 Helmholtz 方程式の基本解は次のように展開できる。

$$G_{L,T}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{ik_{L,T}}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (2n+1)(-1)^m I_n^m(\vec{O}\vec{y}) O_n^m(\vec{O}\vec{x})$$

ただし、 $|\vec{O}\vec{x}| > |\vec{O}\vec{y}|$

また、関数  $I_n^m, O_n^m$  は各々、3次元 Helmholtz 方程式の全域で正則な解、原点において特異な解を表しており、次式で表される。

$$I_n^m(\vec{O}\vec{x}, k_{L,T}) = j_n(k_{L,T}|\vec{O}\vec{x}|) Y_n^m\left(\frac{\vec{O}\vec{x}}{|\vec{O}\vec{x}|}\right)$$

$$O_n^m(\vec{O}\vec{x}, k_{L,T}) = h_n^{(1)}(k_{L,T}|\vec{O}\vec{x}|) Y_n^m\left(\frac{\vec{O}\vec{x}}{|\vec{O}\vec{x}|}\right)$$

$j_n$  は  $n$  次の球ベッセル関数、 $h_n^{(1)}$  は  $n$  次の第一種球ハンケル関数である。また、 $Y_n^m$  は球面調和関数である。本論文では、 $Y_n^m$  の定義として次式を採用していることに注意されたい。

$$Y_n^m(\hat{x}) = \sqrt{\frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos\theta) e^{im\phi}$$

ここに、 $(r, \theta, \phi)$  は点  $\mathbf{x}$  の球座標、 $\hat{x} = \frac{\vec{O}\vec{x}}{r}$  である。また、 $P_n^m$  はルジャンドル陪関数であり、次式で定義される。

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \quad (m \geq 0)$$

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x) \quad (m \geq 0)$$

$P_n$  はルジャンドル多項式である。

$I_n^m$  および  $O_n^m$  は次のように展開できる。

$$I_n^m(\vec{O}\vec{x}) = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} (2n'+1) U_{n,n'}^{m,m'}(\vec{O}\vec{O}') I_{n'}^{m'}(\vec{O}'\vec{x}) \quad (15)$$

$$O_n^m(\vec{O}\vec{x}) = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} (2n'+1) T_{n,n'}^{m,m'}(\vec{O}\vec{O}') I_{n'}^{m'}(\vec{O}'\vec{x}) \quad (16)$$

ただし、式 (16) においては  $|\vec{O}\vec{O}'| > |\vec{O}'\vec{x}|$  を仮定している。ここに、

$$E_{n,n',n''}^{m,m',m''} = \frac{i^{n'+n''-n}}{4\pi} (-1)^{m'} (-1)^{m''} \int_{|\hat{x}|=1} Y_n^m(\hat{x}) Y_{n'}^{-m'}(\hat{x}) Y_{n''}^{-m''}(\hat{x}) dS_{\hat{x}} \quad (17)$$

$$U_{n,n'}^{m,m'}(\vec{O}\vec{x}, k_{L,T}) = \sum_{n''=0}^{\infty} \sum_{m''=-n''}^{n''} (2n''+1) E_{n,n',n''}^{m,m',m''} I_{n''}^{m''}(\vec{O}\vec{x}, k_{L,T}) \quad (18)$$

$$T_{n,n'}^{m,m'}(\vec{O}\vec{x}, k_{L,T}) = \sum_{n''=0}^{\infty} \sum_{m''=-n''}^{n''} (2n''+1) E_{n,n',n''}^{m,m',m''} O_{n''}^{m''}(\vec{O}\vec{x}, k_{L,T}) \quad (19)$$

である。

以上で準備された諸式を用いて、次の積分  $V_i(\mathbf{x})$  の評価を行う。 $V_i(\mathbf{x})$  は非周期問題における境界積分方程式に現れる積分である。簡単のため、Burton-Miller 法を用いない場合について述べるが、Burton-Miller 法を用いる場合も、以下の手順とほぼ同様にして計算を行うことができる。

$$V_i(x) = \int_S \Gamma_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \omega) t_j(y) dS_y - \text{p.v.} \int_S \Gamma_{Iij}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \omega) u_j(y) dS_y \quad (20)$$

$S$  は  $x$  から十分離れた  $\partial D$  の部分であるとする。 $X$  を  $x$  の近傍の点、 $Y$  を  $S$  の近傍の点として、 $|\vec{Y}\vec{X}| > |\vec{X}\vec{x}|$  及び  $|\vec{Y}\vec{y}| < |\vec{Y}\vec{x}| (y \in S)$  が成立するとき、次の局所展開を得る。

$$V_i(\mathbf{x}) = \frac{i}{4\pi\mu k_T^2} \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} (2n'+1) \times \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} I_{n'}^{m'}(\vec{X}\vec{x}, k_L) k_L L_{n',m'}^L(X) + e_{ipr} \frac{\partial}{\partial x_p} I_{n'}^{m'}(\vec{X}\vec{x}, k_T) k_T L_{r,n',m'}^T(X) \right\} \quad (21)$$

ここに、 $L_{n,m}^L, L_{r,n,m}^T$  は局所展開係数であり、次式で表

される (M2L 公式).

$$L_{n',m'}^L(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (2n+1) T_{n,n'}^{m,m'}(\overrightarrow{YX}, k_L) M_{n,m}^L(Y) \quad (22)$$

$$L_{r;n,m'}^T(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (2n+1) T_{n,n'}^{m,m'}(\overrightarrow{YX}, k_T) M_{r;n,m}^T(Y) \quad (23)$$

また,  $M_{n,m}^L$  および  $M_{r;n,m}^T$  は多重極モーメントであり, 次式で表される.

$$\begin{aligned} M_{n,m}^L(Y) &= \int_S (-1)^m \left\{ t_j(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_j} - u_j(\mathbf{y}) n_k(\mathbf{y}) \right. \\ &\quad \left. \left( \lambda \delta_{jk} \frac{\partial}{\partial y_l} \frac{\partial}{\partial y_l} + 2\mu \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial y_k} \right) \right\} I_n^{-m}(\overrightarrow{Yy}, k_L) dS_y \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} M_{r;n,m}^T(Y) &= \int_S (-1)^m \left\{ t_j(\mathbf{y}) e_{jqr} \frac{\partial}{\partial y_q} - u_j(\mathbf{y}) n_k(\mathbf{y}) \mu \right. \\ &\quad \left. \left( e_{kqr} \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial y_q} + e_{jqr} \frac{\partial}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial y_q} \right) \right\} I_n^{-m}(\overrightarrow{Yy}, k_T) dS_y \end{aligned} \quad (25)$$

M2M 公式および L2L 公式は, 多重極モーメント (式 (24),(25)), 局所展開 (式 (21)) において  $I_n^m$  を展開することにより得られる.

$$M_{n,m}^L(Y) = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} (2n'+1) U_{n',n}^{m',m}(\overrightarrow{Y'Y}, k_L) M_{n',m'}^L(Y') \quad (26)$$

$$M_{r;n,m}^T(Y) = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} (2n'+1) U_{n',n}^{m',m}(\overrightarrow{Y'Y}, k_T) M_{r;n',m'}^T(Y') \quad (27)$$

$$L_{n,m}^L(X) = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} (2n'+1) U_{n',n}^{m',m}(\overrightarrow{X'X}, k_L) L_{n',m'}^L(X') \quad (28)$$

$$L_{r;n,m}^T(X) = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} (2n'+1) U_{n',n}^{m',m}(\overrightarrow{X'X}, k_T) L_{r;n',m'}^T(X') \quad (29)$$

ただし, 公式 (21)-(29) における無限級数を  $p$  項で打ち切ったとすると, 仮に  $U_{n,n'}^{m,m'}, T_{n,n'}^{m,m'}$  をあらかじめ計算して記憶したとしても, 計算量は  $O(p^4)$  となる. そこで本研究では回転変換を用いて  $U_{n,n'}^{m,m'} = T_{n,n'}^{m,m'} = 0 (m \neq m')$  とし, 計算量を  $O(p^3)$  に抑えている. また,

$U_{n,n'}^{m,m'}, T_{n,n'}^{m,m'}$  は漸化式を用いることにより  $O(p^3)$  の計算量で計算している<sup>12)</sup>.

## 2.4 周期多重極法

まず, 周期 Green 関数の格子和表現式 (9) より, 周期境界値問題はユニットセルのレプリカ (レプリカセル) が 3 次元空間に無限に繰り返し配置されている問題ととらえることができる (図-2).

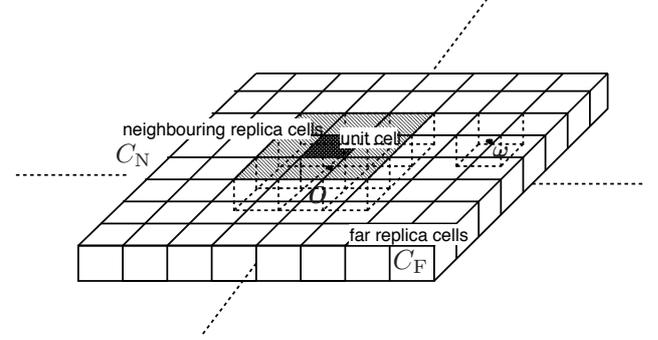


図-2 レプリカセル

いま, 図-2 のように無限個のレプリカセルを, ユニットセルの近傍にあるセル  $C_N$  と遠方にある  $C_F$  に分ける. ここで, 近傍とは, ユニットセルと少なくとも一辺を共有することを言う. これに対応して, 周期 Green 関数 (式 (9)) を次式のように分解する.

$$\Gamma_{ij}^P(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \Gamma_{ij}^{\text{PN}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \Gamma_{ij}^{\text{PF}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (30)$$

ここに,

$$\Gamma_{ij}^{\text{PN}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \sum_{\omega \in \mathcal{L}'} \Gamma_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y} - \omega) e^{i\beta \cdot \omega}$$

$$\Gamma_{ij}^{\text{PF}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \sum_{\omega \in \mathcal{L}''} \Gamma_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y} - \omega) e^{i\beta \cdot \omega}$$

である. また  $\mathcal{L}'$  はセル  $C_N$  の中心の集合であり,  $\mathcal{L}'' = \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}'$  である. この様に定義した  $\Gamma_{ij}^{\text{PN}}, \Gamma_{ij}^{\text{PF}}$  を用いると, 式 (8) の右辺の積分の評価は次のようにできる.

- $\Gamma_{ij}^{\text{PN}}$  からの寄与

近傍レプリカセル  $C_N$  の内部にもユニットセルと同様の・ツリー構造を導入することにより, 通常の多重極法とほぼ同様にして計算できる.

1. ユニットセル内部の各セルの interaction list の定義を図-3 のように変更する. すなわち, 近傍レプリカセル内部のセルも含むことにする.
2. ユニットセルにおいて, 通常の upward pass を最深 level から level 0 まで実行する.
3. 次に, ユニットセルにおいて, 通常の downward pass を level 0 から最深 level まで実行する.

- $\Gamma_{ij}^{\text{PF}}$  からの寄与

level 0 において, 無限個の遠方レプリカセルから

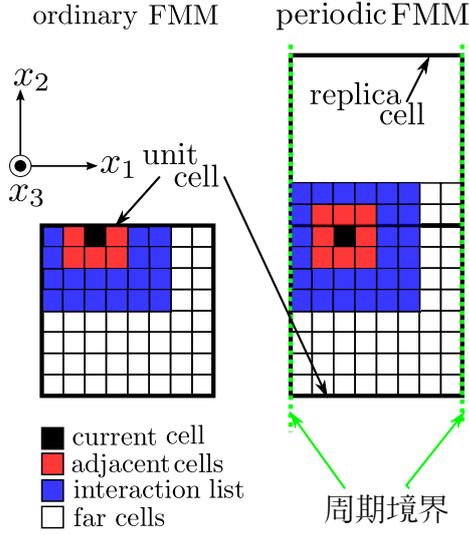


図-3 周期多重極法における interaction list

の寄与を計算する公式 (periodised M2L 公式) を用いる. periodised M2L 公式は次のように書ける.

$$L_{n,m}^L(O) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (2n+1) T_{n',n}^{Pm',m}(k_L) M_{n',m'}^L(O) \quad (31)$$

$$L_{r;n,m}^T(O) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (2n+1) T_{n',n}^{Pm',m}(k_T) M_{r;n',m'}^T(O) \quad (32)$$

ここに,  $M_{n',m'}^L(O), M_{r;n',m'}^T(O)$  は level 0 のセルの多重極モーメント,  $L_{n',m'}^L(O), L_{r;n',m'}^T(O)$  は level 0 のセルの局所展開係数である.  $T_{n,n'}^{Pm,m'}(k_{L,T})$  は periodised M2L 公式の係数であり,

$$T_{n,n'}^{Pm,m'}(k_{L,T}) = \sum_{\omega \in \mathcal{L}''} T_{n,n'}^{m,m'}(-\omega, k_{L,T}) e^{i\beta \cdot \omega}$$

と定義される.  $T_{n,n'}^{Pm,m'}(k_{L,T})$  は, 式 (33) を初期値とする漸化式を用いて求めることができる.

$$T_{0,n'}^{P0,m'}(k_{L,T}) = (-1)^{n'+m'} \left( \sum_{\omega \in \mathcal{L}''} O_{n'}^{m'}(-\omega, k_{L,T}) \right) \quad (33)$$

しかしながら, 式 (33) の右辺に現れる格子和  $\sum_{\omega \in \mathcal{L}''} O_{n'}^{m'}(-\omega, k_{L,T})$  は収束が非常に遅く, 直接的な方法で和を取ることは実用的でない. このため, Otani and Nishimura<sup>2)</sup> に従い, フーリエ解析によって格子和の積分・級数表示を導くことにより, 効率的に和の値を評価する.

## 2.5 遠方場

波動散乱問題においては, 散乱体の遠方での挙動を求めることが工学的に重要である. そこで, 本小節では遠方場の構成法及びエネルギー保存則について述べる.

### (1) 遠方場の振幅

$x_1 \rightarrow \pm\infty (S^\pm)$  における解を

$$u_i^\pm = \delta_\pm u_i^I + \sum_n A_n^{\pm} (d_n^{\pm})_i e^{ik_L \mathbf{p}_n^{\pm} \cdot \mathbf{x}} + \sum_n A_n^{\mp} (d_n^{\mp})_i e^{ik_T \mathbf{p}_n^{\mp} \cdot \mathbf{x}} \quad (34)$$

の形に仮定する. ここに,  $n = (n_2, n_3)$  は多重指数であり,  $\delta_+ = 0, \delta_- = 1$  である. また  $\mathbf{d}_n^{L,T\pm}$  は散乱波の運動方向を表す単位ベクトル,  $\mathbf{p}_n^{L,T\pm}$  は散乱波の進行方向を表す単位ベクトルで,

$$\mathbf{p}_n^{L,T\pm} = \frac{1}{k_{L,T}} \begin{pmatrix} \pm \sqrt{k_{L,T}^2 - \left(\frac{\beta_2 + 2n_2\pi}{\zeta}\right)^2 - \left(\frac{\beta_3 + 2n_3\pi}{\zeta}\right)^2} \\ \left(\frac{\beta_2 + 2n_2\pi}{\zeta}\right)^2 \\ \left(\frac{\beta_3 + 2n_3\pi}{\zeta}\right)^2 \end{pmatrix} \quad (35)$$

と表現される.  $n_2, n_3$  は  $(\mathbf{p}_n^{L,T\pm})_1$  が実であるような範囲を動くものとする. さて,

$$v_i = (d_n^{L,T\pm})_i e^{ik_{L,T} \mathbf{p}_n^{L,T\pm} \cdot \mathbf{x}} \quad (36)$$

を試験関数として図-4 の領域で相反定理

$$\int_{S^+ + \partial D + S^P} (u_i \overline{n_j C_{jikl} v_{k,l}} - n_j C_{jikl} u_{k,l} \overline{v_i}) dS = 0 \quad (37)$$

を用いる ( $\overline{\cdot}$  は複素共役) と以下のように遠方場の振幅  $A_n^{L,T\pm}$  を決定できる.

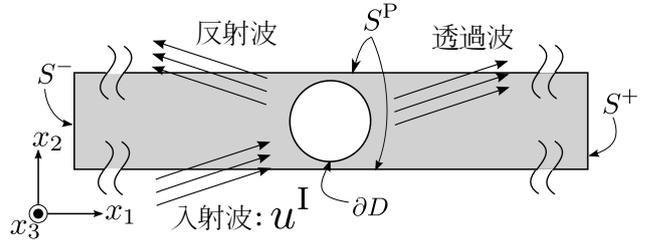


図-4 相反定理を用いる領域

$$A_n^{L,T\pm} = \frac{\Omega_n^{L,T\pm}}{I_n^{L,T\pm}} \quad (38)$$

$$\Omega_n^{L,T\pm} = \int_{\partial D} e^{-ik_{L,T} \mathbf{p}_n^{L,T\pm} \cdot \mathbf{x}} \left( \mathbf{t} \cdot \mathbf{d}_n^{L,T\pm} + ik_{L,T} \left[ \lambda (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{d}_n^{L,T\pm} \cdot \mathbf{p}_n^{L,T\pm}) + \mu ((\mathbf{u} \cdot \mathbf{d}_n^{L,T\pm}) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_n^{L,T\pm}) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n^{L,T\pm}) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}_n^{L,T\pm})) \right] \right) dS \quad (39)$$

$$I_n^{L,T\pm} = 2ik_{L,T} \zeta^2 ((\lambda + \mu) (\mathbf{d}_n^{L,T\pm})_1 \mathbf{d}_n^{L,T\pm} \cdot \mathbf{p}_n^{L,T\pm} + \mu (\mathbf{p}_n^{L,T\pm})_1) \quad (40)$$

ここに,  $\mathbf{u}, \mathbf{t}$  は多重極法により求めた散乱体の境界  $\partial D$  における変位及びトラクションである.  $A_n^{L,T\pm}$  の計算に際しては,  $\mathbf{d}_n^{L,T\pm}$  は  $\mathbf{d}_n^{L,T\pm} \cdot \mathbf{p}_n^{L,T\pm} = 0$  を満たす二つの

$\mathbf{d}_n^{L,T\pm}$  を選び、和をとることに注意する。また、 $n = 0$  の場合、透過場の振幅 ( $A_0^{L,T+}$ ) には入射波の影響を加える。

## (2) エネルギー保存則

$x_1 \rightarrow \pm\infty$  において、周期境界  $S^P$  に囲まれる任意の面  $S_e$  を検査面と呼ぶ。  $S_e$  における真の解  $\ddot{u}_j = \text{Re}[u_j e^{-i\omega t}]$  を用いると、  $S_e$  を横切るエネルギー流速  $P_{S_e}$  の周期  $T$  にわたる時間平均  $\langle P_{S_e} \rangle$  は

$$\langle P_{S_e} \rangle = \frac{1}{T} \int_{t'}^{t'+T} P_{S_e} dt \quad (41)$$

$$P_{S_e} = \int_{S_e} \dot{u}_i T_{jk} \dot{u}_k dS \quad (42)$$

と書ける。検査面  $S_e$  として図-4の  $S^\pm$  をとると、式(34)を構成する平面波の時間平均エネルギー  $\langle P_n^{L,T\pm} \rangle$  は次式で書ける。

$$\langle P_n^{L,T\pm} \rangle = \frac{\omega k_{L,T} \zeta^2 A_n^{L,T\pm 2}}{2} \left( (\lambda + \mu)(\mathbf{n}^\pm \cdot \mathbf{d}_n^{L,T\pm})(\mathbf{p}_n^{L,T\pm} \cdot \mathbf{d}_n^{L,T\pm}) + \mu \mathbf{n}^\pm \cdot \mathbf{p}_n^{L,T\pm} \right) \quad (43)$$

ここに、 $\mathbf{n}^\pm$  は検査面の法線であり、 $S^\pm$  上で各々  $(\pm 1, 0, 0)$  である。

式(34)のような平面波の和で書ける場については、次のエネルギー保存則が成り立つ。

$$\mathcal{E} := \sum_{\alpha=L\pm,T\pm} \sum_n \frac{\langle P_n^\alpha \rangle}{\langle P^I \rangle} = 1 \quad (44)$$

ここに、 $\langle P^I \rangle$  は入射波の時間平均エネルギーである。また、エネルギー透過率  $\mathcal{T}$  及び反射率  $\mathcal{R}$  を次式で定義する。

$$\mathcal{T} := \sum_n \langle P_n^{L+} \rangle + \sum_n \langle P_n^{T+} \rangle \quad (45)$$

$$\mathcal{R} := \sum_n \langle P_n^{L-} \rangle + \sum_n \langle P_n^{T-} \rangle \quad (46)$$

## 3. 数値計算例

本節では、本研究で開発した3次元動弾性学の周期多重極法を用いた数値解析例をいくつか示し、本手法の妥当性及び適用性を検証する。取り扱った解析モデルは図-5、図-6に示すものである。すなわち、周期的に配置された球形の内部介在物を含む領域に平面波を入射する問題を考える。

なお、すべての解析において、選点法、一定要素を用いて積分方程式の離散化を行った。離散化に際してはユニットセル内の介在物の球面  $\partial D$  を  $N = 18000$  分割した(図-7)。本論文では数値計算の精度を悪化させる危険性のある Wood の anomaly が発生しうる問題を取り扱うため、メッシュ分割を十分細かく設定している。また、線形方程式の反復解法には Flexible GMRES(FGMRES) を用い、収束判定条件は  $10^{-5}$  と

した。前処理行列は多重極法の直接計算部分とし、前処理行列の逆行列を作用させる操作には GMRES を用いた。前処理用 GMRES の収束判定条件は  $10^{-1}$  とし、収束条件を満たすか、あるいは反復回数が10回に達するかのいずれかの場合に反復計算を打ち切った。

また、Burton-Miller法の結合定数は  $\alpha = \frac{i}{\mu k_T}$  とした。なお見かけの固有値問題は周波数  $\omega$  が大きくなるほど顕著に現れる。このことは次のようにして理解することができる。例えば、原点を中心とする半径  $a$  の球孔を含む領域に平面波を入射する外部 Neumann 問題を考える。境界条件は球孔の表面において表面力が零であるとする。この時、

$$u_i = e_{ij3} \frac{\partial}{\partial x_j} j_0(k_T r) \quad (47)$$

は Navier-Cauchy の式(2)を満たす ( $j_0$  は0次球ベッセル関数、 $r$  は原点からの距離)。しかしながら、 $j_1(k_T a) = 0$  を満たす周波数  $\omega$  において ( $j_1$  は1次球ベッセル関数)、式(47)は補領域における内部 Dirichlet 問題の非自明解となっている。したがってこの周波数はもとの外部問題に対する見かけの固有値である。 $j_1(x)$  は  $x \simeq 4.5$  において最初の零点が現れ、以降無限に多くの零点を持つ。したがって、少なくとも  $k_T a > 4.5$  では見かけの固有値が生じる。これを回避するため、 $k_T a = 4.5$  よりも高い周波数の問題を考える際には Burton-Miller法あるいはそれに類する定式化を用いることが必須となる。本節で示す数値計算結果はこういった周波数を含む問題に対するものであることに注意する。

数値計算は京都大学学術情報メディアセンターの Fujitsu HX600(Thin SMP クラスタ) にて行った。OpenMP を用いて並列化を行い、16CPU を用いた。

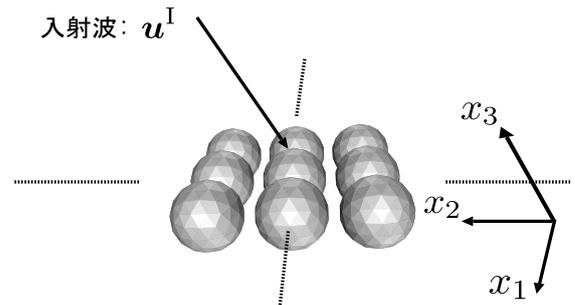


図-5 解析モデル

### 3.1 無限領域

まずはじめに、開発した数値計算コードの精度検証のため、無限領域を伝播する弾性波の解析を行った。すなわち、図-6の解析モデルにおいて、内部介在物の材料定数に外部領域のそれと等しいものを用い、境界条件として  $\partial D$  上で変位  $u_i$  及びトラクション  $t_i$  に連続性を課

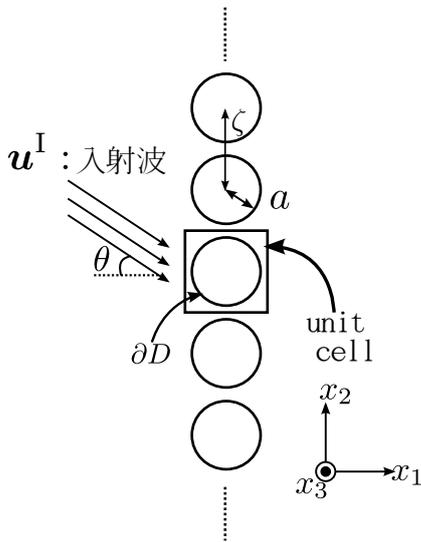


図-6 解析モデル

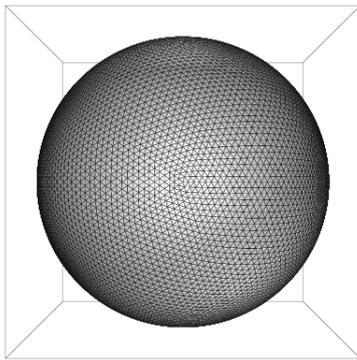


図-7 ユニットセル

した。この時、解析解は入射波自身となる。解析に用いる諸定数は周期長  $\zeta = 2.0$ 、球の半径  $a = 0.175\zeta$ 、Lamé 定数  $\lambda = 1.0, \mu = 1.0$ 、密度  $\rho = 1.0$ 、周波数  $\omega = 8.0$  とし、入射角  $\theta$  を  $0.0^\circ$  から  $90.0^\circ$  まで  $1.0^\circ$  毎に変化させ解析を実行した。入射波の波数ベクトルは  $x_1 - x_2$  面内にあるものとした。

平面 P 波入射の場合、平面 S 波入射の場合各々について、変位の相対誤差の最大値を表-1 に示す。いずれの場合も、誤差は 1% を下回っており、要素数を大きく取れば、十分な精度で計算を行うことができると分かる。

エネルギー保存則の乱れを表す  $\mathcal{E}$  を図-8 に示す。grazing incidence となる  $90^\circ$  付近で他の入射角と比べて若干の乱れがあるものの、誤差は 1% 未満であることが見てとれる。

表-1 変位の相対誤差の最大値 (無限領域の場合)

入射波	相対誤差の最大値 (%)
P 波	0.241
S 波	0.463

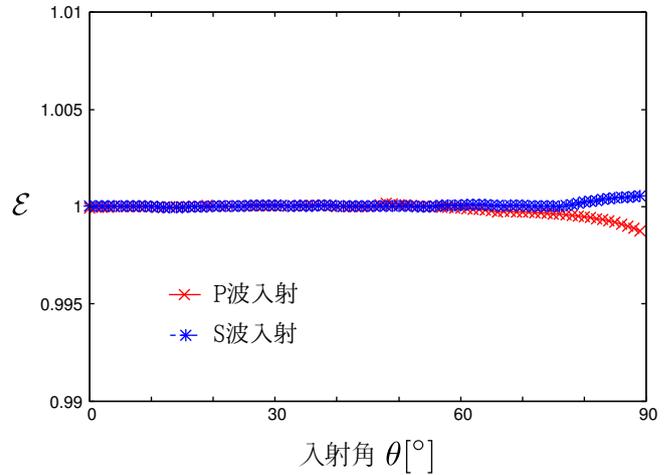


図-8 エネルギー保存則の乱れ  $\mathcal{E}$  (無限領域の場合)

### 3.2 内部介在物による散乱問題

次に、内部介在物による散乱問題の解析を行った。材料定数は適当に無次元化を施し、表-2 に示す諸定数を用いた。ここでは内部介在物として鉄、外部領域としてポリエステルを想定している。周期長は  $\zeta = 2.0$  とし、 $a = 0.15\zeta, 0.31\zeta$  の場合について解析を行った。入射波は平面 P 波とし、入射角は  $\theta = 0^\circ$  とした。ここでも、境界条件として  $\partial D$  で変位  $u_i$  及びトラクション  $t_i$  に連続性を課した。周波数を 0.0 から 8.2 まで 0.1 毎に変化させ解析を実行した。

表-2 解析に用いた諸定数 (内部介在物による散乱問題の場合)

	内部介在物 (鉄を想定)	外部領域 (ポリエステルを想定)
密度 $\rho$	6.393	1.000
Lamé 定数 $\lambda$	1.496	2.453
Lamé 定数 $\mu$	47.02	1.000

図-9 に  $a = 0.15\zeta$  の場合の透過係数  $\frac{A_0^{L+}}{A^I}$  及び反射係数  $\frac{A_0^{L-}}{A^I}$  を先行研究<sup>13)</sup>による近似解及び実験値と併せて示す。また、図-10 にエネルギー保存則の乱れを表す  $\mathcal{E}$  を示す。 $a = 0.15\zeta$  の場合は先行研究の結果と非常によく一致している。無次元化周波数  $\frac{k_T \zeta}{2\pi} = 0.95$  付近において ( $k_T$  は外部領域における横波の波数)、透過係数  $\frac{A_0^{L+}}{A^I}$ 、反射係数  $\frac{A_0^{L-}}{A^I}$  とともに鋭いピークを示している。

る. この周波数において  $\mathcal{E}$  も急激に増大していることから (図-10), Wood の anomaly の一種である resonance type の anomaly であると考えられる.

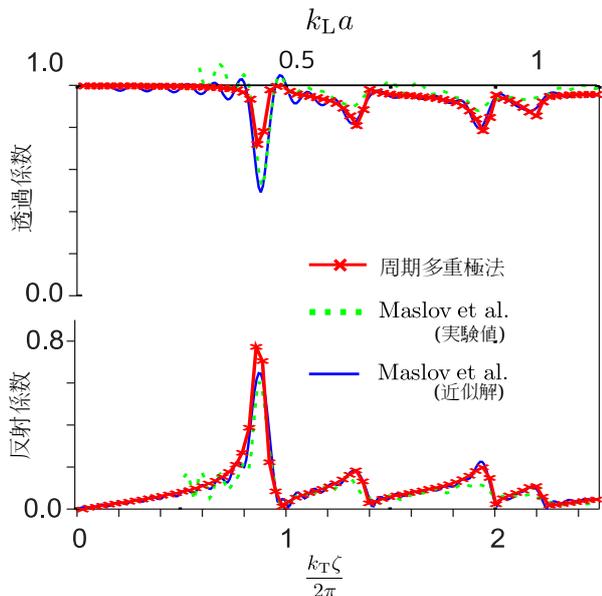


図-9 エネルギー透過係数及び反射係数 (内部介在物による散乱問題において  $a = 0.15\zeta$  の場合)

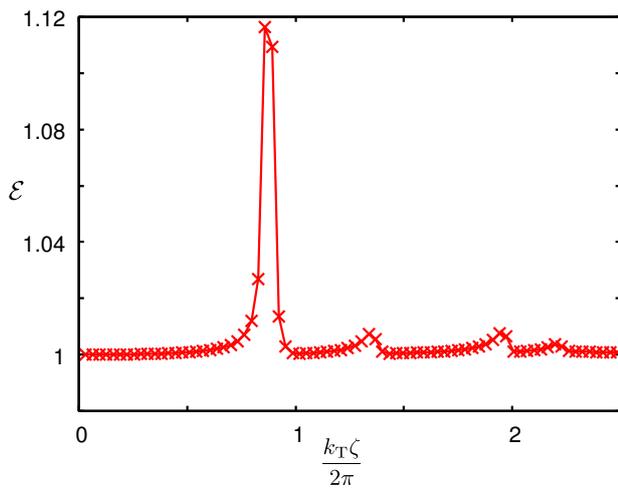


図-10 エネルギー保存則の乱れ  $\mathcal{E}$  (内部介在物による散乱問題において  $a = 0.15\zeta$  の場合)

次に, 図-11 に  $a = 0.31\zeta$  の場合の透過係数  $\frac{A_0^{L+}}{A^1}$  及び反射係数  $\frac{A_0^{L-}}{A^1}$  を, 図-12 にエネルギー保存則の乱れを表す  $\mathcal{E}$  を示す.  $a = 0.15\zeta$  の場合と比べると精度は落ちるものの, 本手法による解析結果は先行研究による結果とおおむね良好な一致を示していることが分かる.  $a = 0.15\zeta$  の場合と比べて精度が悪化する原因としては, 散乱体がより密に配置されているため, より複雑な現象が発生していることが考えられる. しかしながら, Maslov ら<sup>13)</sup>は, 解を球面調和関数で展開し, 低周波問題の仮定のもとでその展開項数を 1 とすることで近似

解を導出しているため,  $k_L a > 1$  においては定性的には本手法の方が実験結果に近い挙動を表していると言えるであろう. ここに,  $k_L$  は外部領域の波数である.

なお,  $\frac{k_T \zeta}{2\pi} = 0.95$  付近において, 広範囲に渡って透過係数  $\frac{A_0^{L+}}{A^1}$  が減少していることが見てとれる (図-11). 同周波数において, エネルギー保存則の乱れ  $\mathcal{E}$  も極大となっており (図-12), ここでも何らかの anomaly が発生していると考えられる.

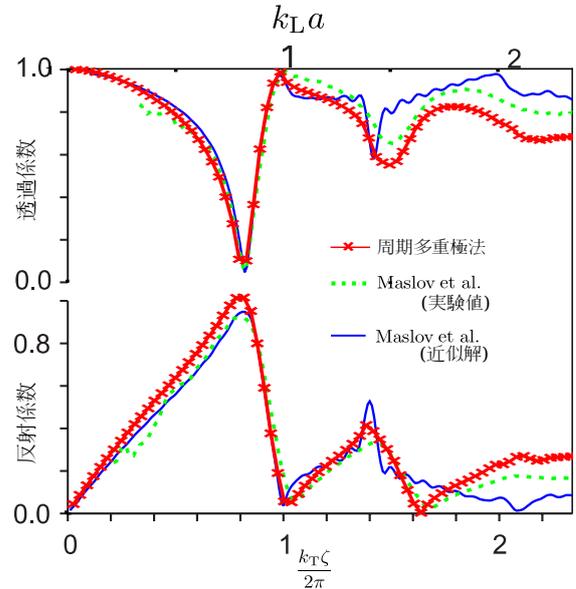


図-11 エネルギー透過係数及び反射係数 (内部介在物による散乱問題において  $a = 0.31\zeta$  の場合)

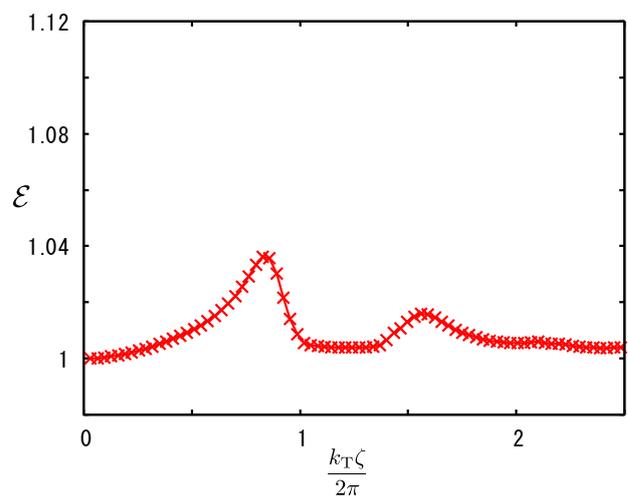


図-12 エネルギー保存則の乱れ  $\mathcal{E}$  (内部介在物による散乱問題において  $a = 0.31\zeta$  の場合)

### 3.3 球孔群による散乱問題

最後に, 球孔群による散乱問題の解析を行った. すなわち図-6 において, 介在物の剛性を 0 とした. 解析

に用いた諸定数は周期長  $\zeta = 2.0$ , 球の半径  $a = 0.4\zeta$ , Lamé 定数  $\lambda = 1.0, \mu = 1.0$ , 密度  $\rho = 1.0$  である. 入射波は平面 P 波とし, 入射角を  $0.0^\circ$  から  $90.0^\circ$  まで  $1.0^\circ$  毎に変化させ計算を行った.

図-13, 図-14 に入射角  $\theta = 0.0^\circ$  の場合について,  $k_T\zeta = 2n\pi$  ( $n$  は自然数) 前後における遠方場 (透過場) の挙動を示す.  $k_T\zeta = 2n\pi$  ( $n$  は自然数) を跨いだ時に遠方場が不連続に変化する現象が顕著に現れている. これらは Wood の anomaly の一種である Rayleigh の anomaly として理解することができる. すなわち, 式 (34) の和を取る  $n$  の範囲が変化し, 遠方場に新たな方向の平面波が加わることが原因であると考えられる. 本手法により, Rayleigh の anomaly を再現できていることが分かる.

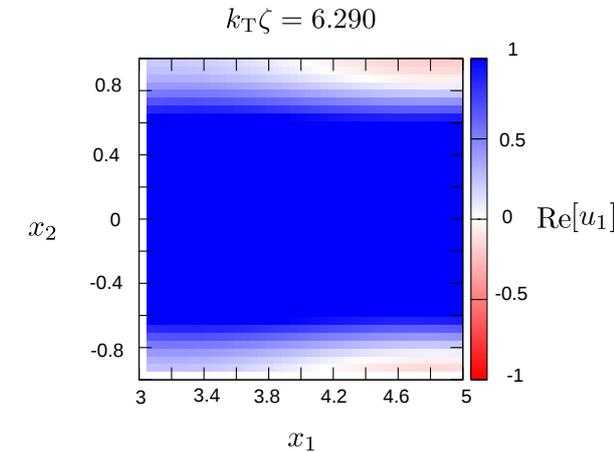
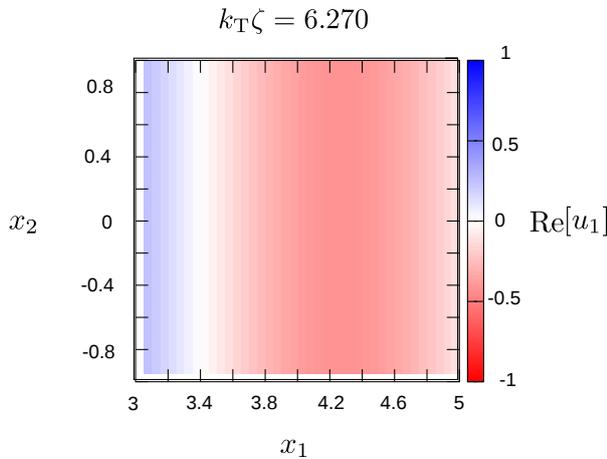


図-13  $k_T\zeta = 2\pi$  前後における遠方場の第一成分の実部 (球孔群による散乱問題において入射角  $\theta = 0.0^\circ$  の場合)

次に, 周波数を  $\omega = 8.0$  で固定し, 入射角  $\theta$  を  $0.0^\circ$  から  $90.0^\circ$  まで  $1.0^\circ$  毎に計算した結果を示す. 図-15 はエネルギー保存則の乱れを表す  $\mathcal{E}$  及びエネルギー透過率  $\mathcal{T}$  である. 入射角  $\theta = 15^\circ$  付近及び  $25^\circ$  付近において, エネルギー透過率が急激に変化している. また,  $60^\circ$  から  $80^\circ$  付近においてはエネルギー保存則が広範囲に

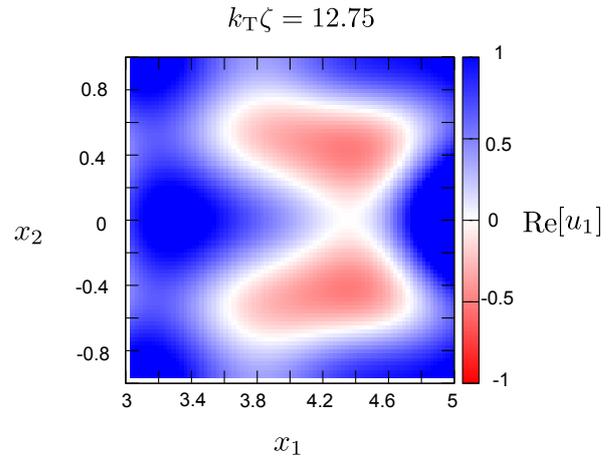
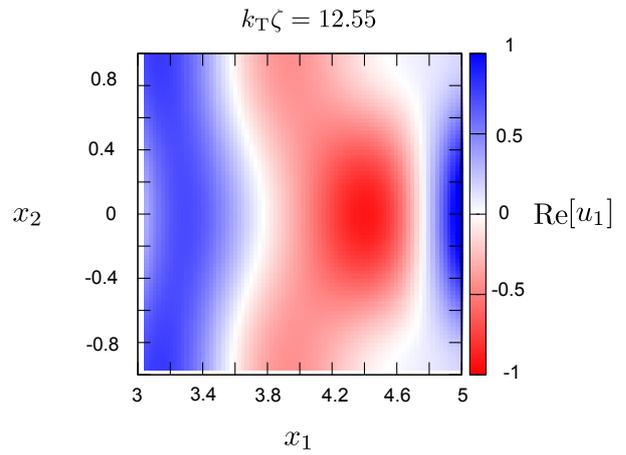


図-14  $k_T\zeta = 4\pi$  前後における遠方場の第一成分の実部 (球孔群による散乱問題において入射角  $\theta = 0.0^\circ$  の場合)

渡って乱れてる.

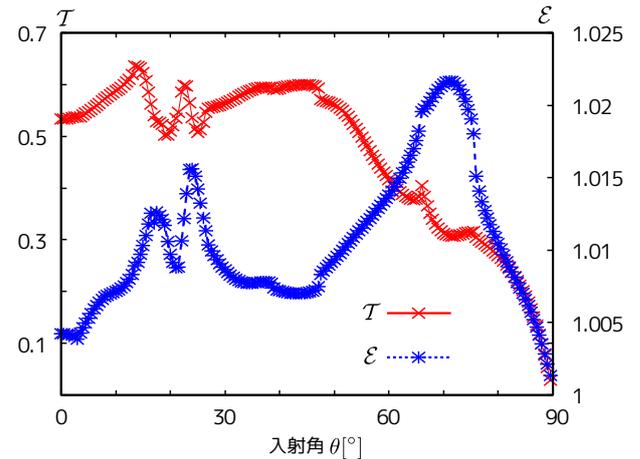


図-15 エネルギー保存則の乱れ  $\mathcal{E}$  及びエネルギー透過率  $\mathcal{T}$  (球孔群による散乱問題の場合)

これらの箇所は以下の 3 点から, resonance type の anomaly であると考えられる.

- Rayleigh の anomaly (表-3) には該当しない.

- エネルギー保存則が乱れており、数値解の精度が悪化している。
- 反復解法の反復回数が増大している (図-16)

表-3 Rayleigh の anomaly の発生しうる入射角 (球孔群による散乱問題の場合)

縦波	横波
$\theta = 90.0^\circ (k_L \zeta = \beta_2)$	$\theta = 21.8^\circ (k_T \zeta = 4\pi + \beta_2)$
$\theta = 18.7^\circ (k_L \zeta = 2\pi + \beta_2)$	$\theta = 18.0^\circ (k_T \zeta = 6\pi - \beta_2)$
$\theta = 21.1^\circ (k_L \zeta = 4\pi - \beta_2)$	$\theta = 81.4^\circ (k_T \zeta = 8\pi - \beta_2)$

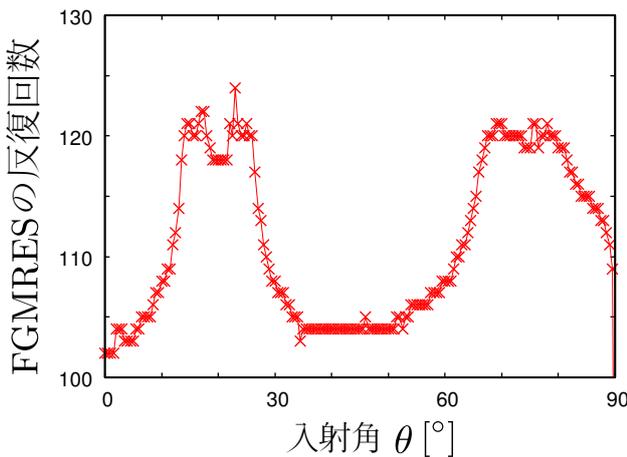


図-16 FGMRES の反復回数 (球孔群による散乱問題の場合)

#### 4. 結言

本論文では、3次元動弾性学の周期多重極法に Burton-Miller 法を適用した。球形散乱体の 2 周期平面構造による散乱問題をいくつか解き、周期弾性波動散乱問題の特性を調べると共に、開発手法の数値的特性の検討を行った。

数値実験の結果より、弾性波動問題においても電磁波動問題と同様に、Wood の anomaly が観測されることを確認した。

また、本研究で開発した周期多重極法は実用上十分な精度で解析を行うことができることを示した。ただし、resonance type の anomaly 周辺においては数値解の精度が悪化することが分かった。しかしながら、エネルギー保存則の満足度や反復法の収束回数などから、anomaly が検出可能であることが分かった。

今後の課題としては、異方及び斜方周期問題、あるいは多層からなる周期構造による散乱問題 (Tall Cell 問題<sup>14)</sup>、高周波数問題などを取り扱えるよう解法を拡張することが挙げられる。

#### 参考文献

- 1) Otani Y, Nishimura N. An FMM for periodic boundary value problems for clacs for Helmholtz' equation in 2D. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 74, pp. 381-406, 2007.
- 2) Otani Y, Nishimura N. A periodic FMM for Maxwell's equations in 3D and its applications to problems related to photonic crystals. *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, pp. 4630-4652, 2008.
- 3) 小林昭一他. 波動解析と境界要素法. 京都大学学術出版会, 2000.
- 4) M. S. Kushwaha, P. Halevi, L. Dobrzynski, and B. Djafari-Rouhani. Acoustic band structure of periodic elastic composites. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 71, No. 13, pp. 2022-2025, Sep 1993.
- 5) Jensen Li and C. T. Chan. Double-negative acoustic metamaterial. *Phys. Rev. E*, Vol. 70, No. 5, p. 055602, Nov 2004.
- 6) 坂本和穂, 大谷佳広, 西村直志. 2次元弾性波動問題における周期多重極境界積分方程式法について. 計算数理工学論文集, Vol. 8, pp. 77-82, 11 2008.
- 7) 飯盛浩司, 大谷佳広, 吉川仁, 西村直志. 3次元動弾性学における周期多重極法と wood の anomaly に関する基礎的考察. 応用力学論文集, Vol. 12, pp. 171-178, 8 2009.
- 8) Burton AJ, Miller GF. The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boudary-value problems. *Proceedings of the Royal society of London. Ser A, A mathematical and physical sciences*, Vol. 323, pp. 201-210, 1971.
- 9) Rokhlin V. Rapid solution of intergal equations of classical potential theory. *Journal of Computational Physics*, Vol. 60, pp. 187-207, 1985.
- 10) Rokhlin V. Rapid solution of intergal equations of scattering in two dimensions. *Journal of Computational Physics*, Vol. 86, pp. 414-439, 1990.
- 11) Nishimura N. Fast multipole accelerated boundary integral equation methods. *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 55, pp. 299-322, 2004.
- 12) Gumerov NA, Duraiswami R. *Fast Multipole Methods for the Helmholtz Equation in Three Dimensions*. Elsevier, 2005.
- 13) Maslov K, Kinra VK, Henderson BK. Elastodynamic response of a coplanar periodic layer of elastic spherical inclusions. *Mechanics of Materials*, Vol. 32, pp. 785-795, 2000.
- 14) 大谷佳広, 西村直志. Maxwell 方程式における周期多重極法の Tall Cell 問題への拡張. 計算数理工学論文集, Vol. 9, pp. 55-60, 2009.

(2010年3月9日 受付)