

XFEM を活用した固有振動数に基づく き裂同定の感度導出に関する考察

A study on the sensitivity for crack detection based on eigen frequency using X-FEM

中住昭吾*・西郷宗玄**・松本純一***・澤田有弘****

Shogo NAKASUMI, Muneharu SAIGO, Junichi MATSUMOTO and Tomohiro SAWADA

* 非会員 博士(工学) (独) 産業技術総合研究所 先進製造プロセス研究部門 (〒305 茨城県つくば市並木 1-2-1)
 ** 非会員 工博 東洋大学教授 理工学部機械工学科 (〒350 埼玉県川越市鯨井 2100)
 *** 会員 博士(工学) (独) 産業技術総合研究所 集積マイクロシステム研究センター (〒305 茨城県つくば市並木 1-2-1)
 **** 非会員 博士(科学) (独) 産業技術総合研究所 先進製造プロセス研究部門 (〒305 茨城県つくば市並木 1-2-1)

A new numerical methodology of detecting crack position is presented. In this methodology, the extended finite element method (XFEM) is used to analyze the crack problem. However, from the view point of obtaining appropriate sensitivity for design parameters, this analyze technique has difficult problem, because the Heaviside enrich function has the discontinuity, and this causes non-convergence sensitivity in case of using Gauss-Legendre integration scheme. To resolve this problem, the analytical sensitivity is used under the assumption of using rectangular element, and thus the well conditioned sensitivity is obtained. By using this sensitivity, the identification of crack location for a cantilever model has been achieved.

Key Words : crack detection, eigen frequency, extended finite element method, inverse problem

1. 緒言

構造物の安全性評価・余寿命評価を正しく行うためには、構造物内部に存在するき裂・空孔等の損傷箇所を同定する非破壊検査が重要である。その分類としては、超音波探傷、電位差法、渦電流法、X線を用いる方法等が知られており、一般的には超音波やマイクロ波を用いて構造物の波動伝播特性を検出する。

その他の方法として構造物の振動に着目した同定方法がある。これは固有振動数が構造物の形状・境界条件を反映したものであることを利用する方法である。すなわち、実機での計測値と数値シミュレーションによる計算値、双方の固有振動数を基に、実機のき裂位置に関するパラメータを同定する。理論的には無限の固有振動数情報が容易に求められる。この振動法を数値シミュレーションで研究した例として、田中らの研究^{1),2)}が挙げられる。2次元領域中の円孔の位置を同定しており、欠陥が存在する場合としない場合とで調和加振力を加えたときの固有振動数の差を利用している。

構造物中のき裂位置を同定するための適用例題として、本論文では有限要素法を用いて2次元片持ち梁の表面き裂を考えることにする。片持ち梁を例題としてき裂位置同定を扱った文献として、文献^{3),4),5)}が挙げられる。き裂位置の同定プロセスにおいては最終的なき裂位置が求まるまで、き裂位置を移動させていくことが必要であるが、それをメッシュに反映させるためのリメッシュの作業が必要である。き裂問題に対してメッシュを

き裂形状に適合させる必要がない手法として拡張型有限要素法 (eXtended Finite Element Method : XFEM, 以下 XFEM と呼ぶ) と呼ばれる手法が Belytschko ら⁷⁾ によって提案された。メッシュとは独立にき裂の情報をソルバー内部で保有しており、メッシュにはき裂位置を陽に表す必要がない。その利点から、き裂進展を中心として様々な方面への展開が盛んに行われている。

本論文では、解析で用いるメッシュと物理的存在であるき裂を独立に扱える XFEM の利点を活用し、構造物中のき裂または損傷箇所の同定を行うことを目標とする。この XFEM を用いてき裂等の損傷箇所を同定する研究として、文献⁸⁾⁹⁾¹⁰⁾が挙げられる。これらは探索アルゴリズムに GA を用いている。XFEM を用いた研究に限らず、き裂位置の同定には GA を用いた研究事例が多い^{11),12),13)}。GA は感度情報を必要としない反面、膨大な計算量を必要とする。振動現象は数理的には固有値の問題であり、その設計変数に関する感度情報を陽に導くことは可能である。そこで本論文では、感度情報を用いることを前提とする勾配法に基づくアルゴリズムにて同定させることにする。しかしながら、最適化問題への適用に対し解析手法に XFEM を用いる場合の感度行列の評価に対して、その妥当性・適切性は議論されているとは言い難い。そこで本論文では XFEM 要素に関する感度情報の取得方法に焦点を置き、精度面と計算負荷低減の観点から設計変数が陽に含まれる解析的感度式を導出し、数値解析例によりその効果を検証する。

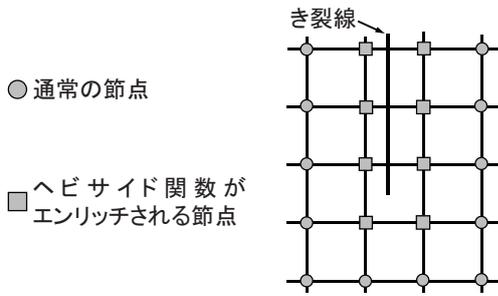


図-1 き裂位置とエンリッチされる節点の位置関係

2. 定式化

2.1 拡張型有限要素法におけるエンリッチの概念と基本的定式化

通常のFEMでは、変位等の場の近似関数は、要素内部では、一次多項式等で表される形状関数に従う。しかしXFEMではこの点において拡張が施され、要素内での近似関数分布を一次多項式等の単純な関数のみに限定せず、後述するヘビサイド関数やき裂端近傍の特異関数等、より一般化された形での関数分布が許容される。この手続を近似関数のエンリッチ(Enrich)と呼び、解の特性が事前に判明している現象にその特性を表す関数をエンリッチすることにより、その特性を精度良く近似する関数を構築することができる。また近似関数がエンリッチされる場合、その要素を構成する節点には、エンリッチされる近似関数に対応する未知パラメータが新たな節点自由度として付加される。

想定する解析対象を線形弾性体中のき裂に限定するならば、エンリッチされる関数は次の2点である。一つはき裂線(三次元ではき裂面)を横断するときの変位の不連続性であり、もう一つはき裂端(三次元ならばき裂縁)近傍での応力集中を表す特異な変位挙動である。前者については式(1)に示すヘビサイドのステップ関数が適当である。また後者については、線形破壊力学から導かれるき裂端近傍変位場の漸近展開式を構成する基底が通常用いられる。しかしながら、後述する感度情報の議論を簡単にするため、本論文ではこの特異関数を扱わないこととし、式(1)のヘビサイド関数のみによりき裂端の不連続性も表すものとする。

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

これによる、2次元モデルにおけるき裂線とエンリッチさせる節点の位置関係を図-1に示す。また、変位場の近似関数は式(2)で与えられる。ただし、 N_i は通常のFEMと同様の形状関数であり、 \mathbf{b}_i はエンリッチに伴う付加的な節点自由度である。

$$\mathbf{u}(x) = \sum_{i=1}^4 N_i \{ \mathbf{d}_i + H(x) \mathbf{b}_i \} \quad (2)$$

2.2 実験計測値との誤差二乗最小に基づくき裂位置の同定

本論文ではき裂の位置同定という工学的問題を、数理的解釈として観測結果と推定パラメータによる解析結果との誤差を最小にする最適化問題と捉え、その誤差の大きさに対応する関数(誤差関数)を、二乗形式で評価する。すなわち、目的関数 J を次式で定める。

$$J = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^m)^T \mathbf{Q} (\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^m) \quad (3)$$

ここで、 $\boldsymbol{\lambda}$ 、 $\boldsymbol{\lambda}^m$ はそれぞれ

$$\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}^T \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\lambda}^m = \{\lambda_1^m, \lambda_2^m, \dots, \lambda_n^m\}^T \quad (5)$$

である。 λ_i は推定しているき裂位置に対して数値解析により得られる*i*次の固有値を、また λ_i^m は実機で観測された固有振動の*i*次の固有値をそれぞれ表す。また式(4)、式(5)はこの目的関数 J の算出には、*n*次の固有モードまでの誤差を考慮することを意味する。

式(3)の \mathbf{Q} は、その対角成分が

$$\text{diag}(\mathbf{Q}) = \{(1/\lambda_1^m)^2, (1/\lambda_2^m)^2, \dots, (1/\lambda_n^m)^2\} \quad (6)$$

と表される対角行列であり、各モードの固有値を正規化するための重みの役割を果たす。

き裂位置の同定は、この目的関数を設計変数 x_j に関して最小化させる最適化問題に帰着される。設計変数 x_j に対する目的関数の感度 $\partial J / \partial x_j$ は次式で求められる。

$$\frac{\partial J}{\partial x_j} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial x_j} \right]^T \mathbf{Q} (\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^m) \quad (7)$$

式(7)の $\partial \boldsymbol{\lambda} / \partial x_j$ は、固有値の設計変数 x_j に関する感度であり、次式で求められる。

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} = \frac{\mathbf{u}_i^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_j} - \lambda_i \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_j} \right) \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \mathbf{u}_i} \quad (8)$$

ただし、 \mathbf{u}_i は、固有値 λ_i に対応する固有ベクトルである。式(7)、式(8)より、目的関数の感度を得るためには、剛性行列及び質量行列の感度を算出することが必要であることが分かる。また設計変数 x_j は、本論文が扱う例題においては、推定するき裂の先端座標となる。同定の開始から終了までのフローチャートを図-2に示す。

2.3 拡張型有限要素における剛性行列の数値積分に関する検証の必要性

式(8)で示した様に、最適化問題や逆問題を勾配法で解く場合には設計変数に対する剛性行列の感度情報取得する必要がある。この感度行列の導出に関しては、解析的に導く方法と差分を用いて数値的に導く方法がある。後者の場合には、感度の評価点(x_j)、及び

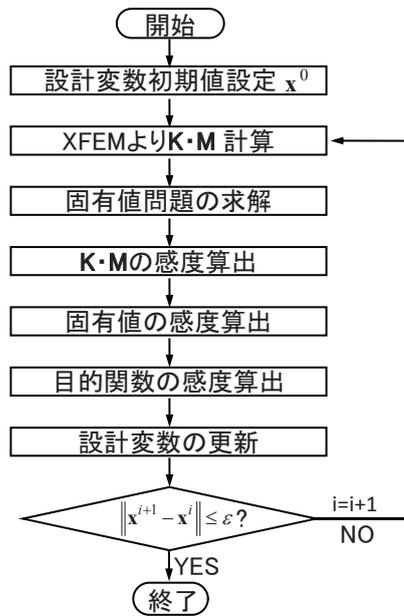


図-2 き裂同定のフローチャート

それに対する微小な摂動量 (δx_j) を用いて次式で表される。

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_j} \approx \frac{\mathbf{K}(x_j + \delta x_j) - \mathbf{K}(x_j)}{\delta x_j} \quad (9)$$

これより、感度行列を差分で求める場合、摂動量 (δx_j) が0に近づく場合に、有限値に漸近するかどうか、また漸近するのであればそのために必要な摂動量の大きさを確認する必要がある。これに際し XFEM では要素内で不連続な変位分布を仮定しているため、剛性行列の数値積分にガウス積分等の数値積分公式を用いると、差分による方法で感度が適切に得られるかどうかの検証が必要と思われる。よって次節では、剛性行列の積分方法が感度の精度に及ぼす影響について考察する。

2.4 ガウス積分公式に基づく剛性行列の計算とその差分感度の安定性

図-3は、要素内をき裂線が通り周囲の四節点がヘビサイド関数によるエンリッチ節点となっている要素を示す。このような要素の要素剛性行列を計算する際、き裂線に沿って要素を分割し、その分割された領域それぞれをガウス積分等の数値積分する方法が望ましい。しかし、き裂線と要素辺の交点座標を求める必要があるため、一般にこの方法は実装が複雑となる。一方でこのような、内部をき裂線が通る要素内領域を一括してガウス積分する方法は実装が簡単であり、積分点数がある程度高次数にとれば実用上問題ない程度の精度が得られることがわかっている。そこで本節では、上記後者の積分方法で要素剛性を評価した場合に、差分近似による感度行列が適切に得られるかどうかを検証する。

図-3の要素の剛性行列をガウスの積分公式で算出した場合の、積分点数と剛性行列のノルム（フロベニウス

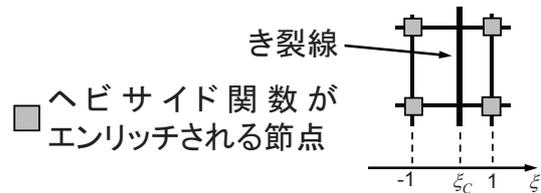


図-3 要素内でのき裂位置

ノルム) の関係を図-4に示す。き裂の要素内位置が積分に及ぼす影響を見るため、代表的なき裂位置4点を評価した。すなわち $\xi_c = 0$ はき裂が要素内中央に通っていることを意味し、 $\xi_c = 0.25$, $\xi_c = 0.50$, $\xi_c = 0.75$ となるに従い、き裂が要素端(右側)に移動していく。いずれのグラフも、ガウス積分点数が 4×4 点の場合の値で除すことで正規化を行っている。図-4より、ガウス積分点数が20点程度とかなり高次になっても積分値は収束せず、周期的な変動を繰り返している。また、その変動幅は、き裂が要素中央で小さく、要素端に行くほど大きくなる傾向になることが分かる。次に剛性行列をガウスの積分公式で算出した場合において、その差分から導出した感度行列のノルム（フロベニウスノルム）と摂動量の大きさとの関係を図-5に示す。グラフによりプロット点の個数が異なるが、これは設計変数の摂動量がある値以下になると差分行列の成分が全て0になるためであり、その段階でプロットを止めている。

差分行列の成分が全て0になる理由は、ヘビサイド関数評価点がき裂線の上側か下側(あるいは右側か左側)かによって、+1と-1の2値だけを持つため、摂動量がガウス積分点の間隔よりも小さくなると、被積分関数の値がそれ以上変化しなくなるからである。また、ガウス積分の点数が増加すると、積分点の間隔が小さくなるため、差分がゼロとなる摂動量も小さくなると予想されるが、それは図-5に示されている。しかしながら、ガウス積分点数が増加しても、感度行列ノルムがある値に漸近する挙動を示しているとは言えない。すなわち、ガウス積分の積分点数を増やしたからといって、より高精度な感度を算出または推定できるとは限らないことが分かる。

以上より、要素全体を一括してガウス積分した剛性行列の差分から感度行列を導出する方法は、ヘビサイド関数をエンリッチした XFEM では感度を求める方法として適切でないことが導ける。また、以上の議論は剛性行列に対して行ってきたが、質量行列に対しても全く同様に成立し、数値実験的にも同様の結果が得られたことを確認している。

2.5 拡張型有限要素における剛性行列の解析的積分

前節での議論及び数値実験により、要素全体にガウス積分公式を適用して求めた剛性行列では、差分近似

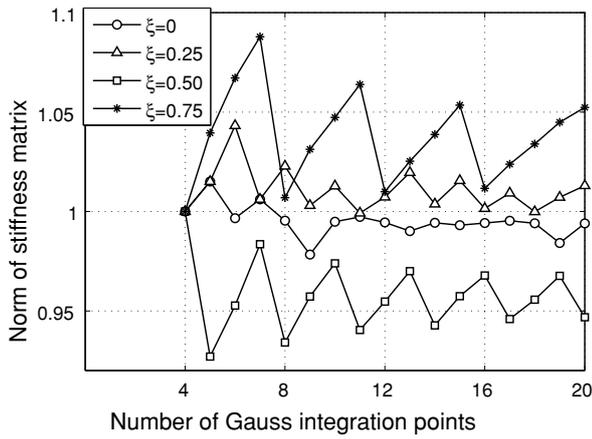


図-4 ガウス積分点数と行列ノルムの関係

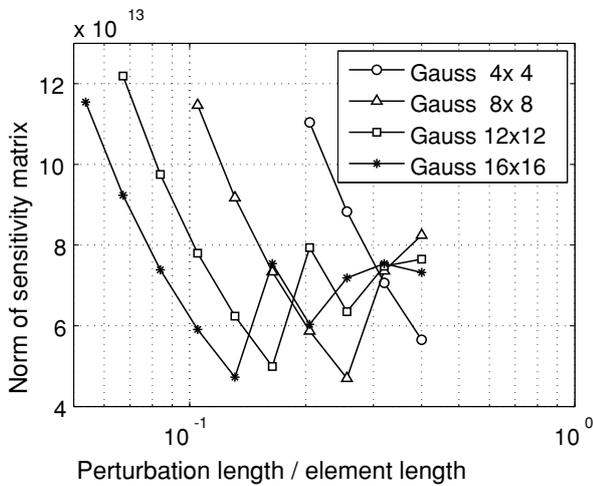


図-5 ガウス積分による剛性行列の差分行列のノルム

による感度の導出が困難であることを確認した。要素をき裂線に沿って分割して積分する方法を用いれば上述した感度行列ノルムの非漸近性が取り除かれ、確定した差分感度値を得ることができる。差分感度は剛性行列計算のコードを再利用できる利点がある反面、差分近似することによる問題点も指摘されている¹⁷⁾。すなわち差分において、十分収束するための適切な摂動量の大きさを決定するにはある程度経験知が必要であり、摂動量が小さすぎる場合には桁落ちによる精度低下の可能性もある。また剛性行列を2回計算するため、多くの繰り返し計算を必要とする最適化問題では計算効率が低下する、等である。

一方解析的感度ではこのような問題は発生せず精度面での信頼性は高い。また計算効率の観点からも優位性がある。XFEM についてき裂の位置を表すパラメータを設計変数とみなした場合の、設計変数に関する感度式を陽に導いた文献は著者の知る限り見当たらない。そこで以下では XFEM における解析的感度を導出

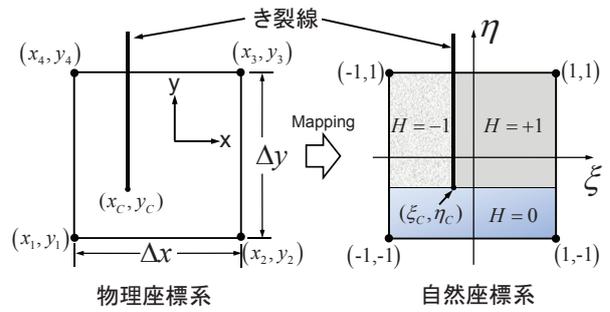


図-6 要素内き裂位置とヘビサイド関数の符号の関係

することとし、本節ではその準備として剛性行列の成分を具体的に導出する。き裂線に沿って要素を分割するが、設計変数を陽に表現する必要から、各分割領域をガウス積分等の数値積分するのではなく、積分計算を解析的に行うこととする。そのために要素形状を長方形と限定する。これにより要素を物理座標系から正規化された自然座標系へ写像するときの Jacobi 行列式が積分区間で定数値となり積分記号の外に出すことができる。なお、XFEM においては物体形状とメッシュ境界を一致させる必要がない、という特性があるため、要素を長方形に限定しても汎用性が著しく損なわれることはないと考えられる。

また、き裂は要素辺に平行に入るものとする。すなわち、き裂は要素内自然座標系において、 ξ 方向には $\xi = \xi_c$ に位置し、 η 方向については $\eta = \eta_c$ の位置がき裂端になるものとする。図-6 にその状況を示す。

き裂端を含む要素の周りの4節点にはヘビサイド関数をエンリッチする。XFEM の通常の定式化ではいわゆる特異関数を用いるが、その特異関数の主たる効果はき裂端周辺の応力集中を表現できることであり、固有振動数にはそのような局所的な変位場の表現が大きく影響することはないと思われる。また XFEM と同様な方法である有限被覆法ではヘビサイド関数と同等の不連続性を近似関数に与えているが先端への応力集中効果を特別に表現せず不連続面の進展解析まで行っている¹⁸⁾。図-7はこの場合の、き裂端を含む要素内での変位分布 (x 方向変位) を示しており、要素内部で階段状の変位分布となる。

使用する要素は四節点アイソパラメトリック四辺形要素とし、その形状関数 $N_j (j = 1 \sim 4)$ を次式で定める。

$$N_1 = 1/4(1 - \xi)(1 - \eta) \quad (10)$$

$$N_2 = 1/4(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (11)$$

$$N_3 = 1/4(1 + \xi)(1 + \eta) \quad (12)$$

$$N_4 = 1/4(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (13)$$

正規化された座標系 (自然座標系) の領域では、ヘビ

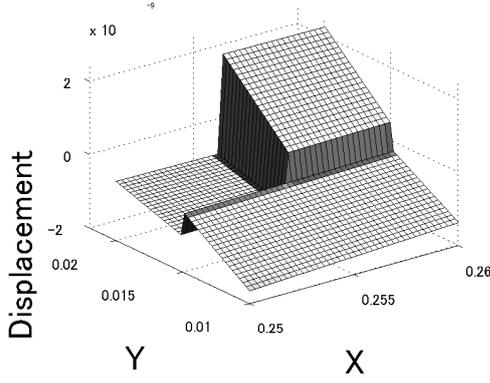


図-7 ヘビサイド関数の分布領域とき裂端の位置

サイド関数 H は式 (14) となる.

$$H(\xi, \eta) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_C \leq \xi \leq 1, \eta_C \leq \eta \leq 1 \\ 0 & \text{if } -1 \leq \eta \leq \eta_C \\ -1 & \text{if } -1 \leq \xi \leq \xi_C, \eta_C \leq \eta \leq 1 \end{cases} \quad (14)$$

この要素の剛性行列の成分は、ヘビサイド関数 H の 0 乗, 1 乗, 2 乗のいずれかが乗されるが、き裂位置の変化に対して影響を受けるのは、1 乗を含む項のみである。そこで被積分関数にヘビサイド関数 H の 1 乗を有する項のみについて以下記述する。この様な要素剛性行列の成分は次式で表される。

$$K(i1, j1) = A1 I_{i1j1} + A2 I_{i2j2} \quad (15)$$

$$K(i2, j2) = B1 I_{i2j2} + B2 I_{i1j1} \quad (16)$$

$$K(i1, j2) = C1 I_{i1j2} + C2 I_{i2j1} \quad (17)$$

$$K(i2, j1) = C1 I_{i2j1} + B2 I_{i1j2} \quad (18)$$

ここで、 $K(i1, j1)$ 等の i と j はそれぞれ、行及び列に対して、形状関数 N_i, N_j に関する成分であることを意味し、添え字の 1 または 2 はそれぞれ、 ξ 方向と η 方向に関する微分であることを意味する。また $A1, A2, B1, B2, C1, C2$ は積分計算に対して定数となる項であり、次式で表される。

$$A1 = \frac{d_1 (\Delta y)^2}{4|J|}, \quad A2 = \frac{d_3 (\Delta x)^2}{4|J|} \quad (19)$$

$$B1 = \frac{d_1 (\Delta x)^2}{4|J|}, \quad B2 = \frac{d_3 (\Delta y)^2}{4|J|} \quad (20)$$

$$C1 = \frac{d_2 \Delta x \Delta y}{4|J|}, \quad C2 = \frac{d_3 \Delta x \Delta y}{4|J|} \quad (21)$$

ここで d_1, d_2, d_3 は解析対象を線形弾性体とした場合の応力・ひずみ関係式の値である。2次元平面応力状態を仮定すれば、ヤング率 E とポアソン比 ν を用いて

$$d_1 = E/(1 - \nu^2) \quad (22)$$

$$d_2 = E\nu/(1 - \nu^2) \quad (23)$$

$$d_3 = E/\{2(1 + \nu)\} \quad (24)$$

と表せられる。また、 $\Delta x, \Delta y$ は物理座標系における要素辺の長さである。

一方、 $I_{i1j1}, I_{i2j2}, I_{i1j2}, I_{i2j1}$ は

$$I_{i1j1} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 H(\xi, \eta) N_{i,\xi} N_{j,\xi} d\xi d\eta \quad (25)$$

$$I_{i2j2} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 H(\xi, \eta) N_{i,\eta} N_{j,\eta} d\xi d\eta \quad (26)$$

$$I_{i1j2} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 H(\xi, \eta) N_{i,\xi} N_{j,\eta} d\xi d\eta \quad (27)$$

$$I_{i2j1} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 H(\xi, \eta) N_{i,\eta} N_{j,\xi} d\xi d\eta \quad (28)$$

である。式 (25)~式 (28) は、積分区間でヘビサイド関数の不連続個所を含んでいる。そこで、式 (14) に注意して式変形を行い、

$$\begin{aligned} I_{i1j1} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 H(\xi, \eta) N_{i,\xi} N_{j,\xi} d\xi d\eta \\ &= \int_{\eta_C}^1 \int_{-1}^1 H(\xi) N_{i,\xi} N_{j,\xi} d\xi d\eta \\ &= \int_{-1}^1 H(\xi) d\xi \int_{\eta_C}^1 N_{i,\xi} N_{j,\xi} d\eta \end{aligned} \quad (29)$$

とする。ここで、

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 H(\xi) d\xi &= \int_{-1}^{\xi_C} (-1) d\xi + \int_{\xi_C}^1 (+1) d\xi \\ &= -2\xi_C \end{aligned} \quad (30)$$

である。また、

$$\int_{\eta_C}^1 N_{i,\xi} N_{j,\xi} d\eta = -F_{i\xi j\xi}(\eta_C) + F_{i\xi j\xi}(1) \quad (31)$$

である。ここで、 $F_{i\xi j\xi}(\eta)$ は $f_{i\xi j\xi} \equiv N_{i,\xi} N_{j,\xi}$ の不定積分を意味し、

$$F_{i\xi j\xi}(\eta) = \int^\eta f_{i\xi j\xi} d\eta = \int^\eta N_{i,\xi} N_{j,\xi} d\eta \quad (32)$$

となる。以上から式 (25) は、

$$I_{i1j1} = (-2\xi_C)\{-F_{i\xi j\xi}(\eta_C) + F_{i\xi j\xi}(1)\} \quad (33)$$

と書き表せる。式 (33) は剛性行列の成分が^s、き裂先端の自然座標値 (ξ_C, η_C) により陽に表されたことを意味する。同様に、式 (26) は

$$\begin{aligned} I_{i2j2} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 H(\xi, \eta) N_{i,\eta} N_{j,\eta} d\xi d\eta \\ &= \int_{\eta_C}^1 \int_{-1}^1 H(\xi) N_{i,\eta} N_{j,\eta} d\xi d\eta \\ &= \int_{\eta_C}^1 d\eta \int_{-1}^1 H(\xi) N_{i,\eta} N_{j,\eta} d\xi \\ &= (-\eta_C + 1)\{-2F_{i\eta j\eta}(\xi_C) \\ &\quad + F_{i\eta j\eta}(1) + F_{i\eta j\eta}(-1)\} \end{aligned} \quad (34)$$

となる。また式 (27) は

$$\begin{aligned} I_{i1j2} &= \int_{\eta_C}^1 N_{i,\xi} d\eta \int_{-1}^1 H(\xi) N_{j,\eta} d\xi \\ &= \{-2F_{j\eta}(\xi_C) + F_{j\eta}(1) + F_{j\eta}(-1)\} \\ &\quad \{-F_{i\xi}(\eta_C) + F_{i\xi}(1)\} \end{aligned} \quad (35)$$

となる。ここで、 $F_{i\xi}(\eta)$ と $F_{i\eta}(\xi)$ は、それぞれ $f_{i\xi} \equiv N_{i,\xi}$ 、 $f_{i\eta} \equiv N_{i,\eta}$ の不定積分を意味し、

$$F_{i\xi}(\eta) = \int^{\eta} f_{i\xi} d\eta = \int^{\eta} N_{i,\xi} d\eta \quad (36)$$

$$F_{i\eta}(\xi) = \int^{\xi} f_{i\eta} d\xi = \int^{\xi} N_{i,\eta} d\xi \quad (37)$$

である。したがって式 (28) は

$$\begin{aligned} I_{i2j1} &= \int_{\eta_C}^1 N_{i,\eta} d\eta \int_{-1}^1 H(\xi) N_{j,\xi} d\xi \\ &= \{-2F_{j\xi}(\xi_C) + F_{j\xi}(1) + F_{j\xi}(-1)\} \\ &\quad \{-F_{i\eta}(\eta_C) + F_{i\eta}(1)\} \end{aligned} \quad (38)$$

となる。

2.6 感度行列の解析的導出

前節では、要素形状を長方形に限定し、剛性行列を解析的に積分したことで、要素長 Δx 、 Δy を陽に含み、剛性行列の成分値に設計変数 ξ_C が陽に表れた。本節ではその結果を設計変数で微分することで、感度行列を陽に導くことにする。

設計変数 ξ_C 方向感度については式 (15) から

$$\frac{\partial K(i1,j1)}{\partial \xi_C} = A1 \frac{\partial I_{i1j1}}{\partial \xi_C} + A2 \frac{\partial I_{i2j2}}{\partial \xi_C} \quad (39)$$

となる。ここで式 (33) から

$$\frac{\partial I_{i1j1}}{\partial \xi_C} = -2\{-F_{i\xi j\xi}(\eta_C) + F_{i\xi j\xi}(1)\} \quad (40)$$

であり、また式 (34) から

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{i2j2}}{\partial \xi_C} &= (-2)(-\eta_C + 1) \frac{\partial F_{i\eta j\eta}(\xi_C)}{\partial \xi_C} \\ &= (-2)(-\eta_C + 1) N_{i\eta} N_{j\eta} \end{aligned} \quad (41)$$

である。右辺第 2 項から第 3 項への展開は、不定積分の定義より自明である。その他、設計変数 η_C 方向感度及び、式 (16)～式 (18) についても同様の手続きにより、感度を設計変数 ξ_C, η_C に対して陽に導くことが可能である。

図-8 は、差分近似感度行列と式 (39)～式 (41) で導出した解析的感度行列の比（フロベニウスノルムの比）をプロットしたものである。ここで差分感度行列は 2.5 節で求めた剛性行列の差分である。すなわちき裂線に沿って積分領域を分割した後、解析的に積分したものである。摂動量が 10^{-2} のオーダー付近で、差分感度が解析的感度に漸近していることが確認できる。また、図 8 では収束極限が 1.02 程度であるが、質量行列に対

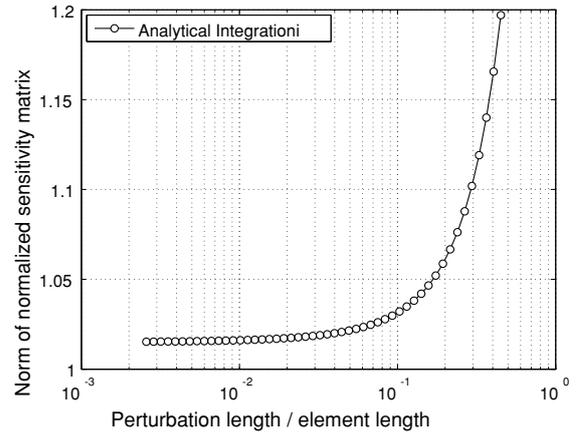


図-8 理論値で無次元化した剛性感度行列（解析的積分）のノルム

表-1 梁モデルの物性値及び寸法

名称	記号	単位	数値
Young's modulus	E	Pa	7.15×10^{10}
Density	ρ	kg/m ³	2.70×10^3
Length	L	m	5.00×10^{-1}
Height	H	m	5.00×10^{-2}
Width	b	m	5.00×10^{-2}

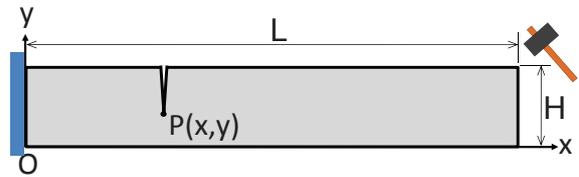


図-9 き裂を有する梁部材の振動モデル

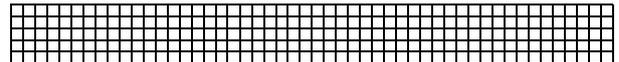


図-10 使用メッシュ

して同様のプロットを行うとほぼ 1.0 に収束することを確認している。

3. 計算結果と考察

3.1 構造モデルの設定と同定パラメータの取得

前節では、XFEM 要素の数値積分法と感度導出方法についての議論を行った。本節では、具体的な構造モデルを設定し、その固有値及び感度固有値の感度を観察し考察を行う。図-9 に示す片持ち梁の表面にき裂が存在するとしその位置同定を行う。片持ち梁の物性値及び寸法を表-1 に、また用いたメッシュを図-10 にそれぞれ示す。メッシュは梁長手方向に 50 要素、厚肉方向に 5 要素の要素を配置した。

ここでは、前節で導いた感度の挙動を確認し、また、

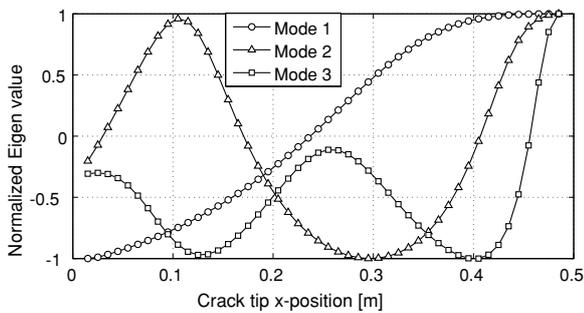


図-11 固有値の梁長手方向分布

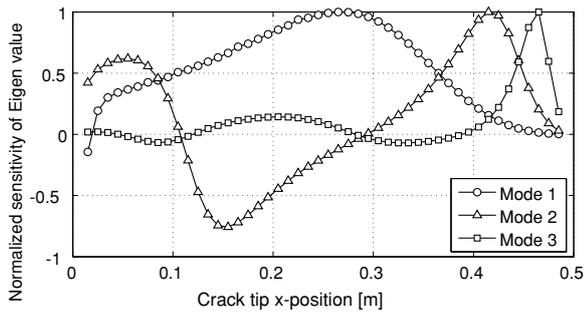


図-12 固有値の x 方向感度の梁長手方向分布

同定させるべき対象となるき裂の固有値を取得することにする。き裂は梁長手方向に対し垂直方向に入るものとする。き裂長さを 0.035m とし、そのき裂を梁長手方向に移動させた場合の固有値の変化を図-11 に示す。モード 1 からモード 3 までの固有値をプロットしているが、モードにより値の大きさが異なるため、各モードの固有値が -1 から 1 になるように正規化している。また図-11 はき裂位置と、それによる固有値の影響（固有値の減少度合い）を表しているのであって、いわゆる固有振動モード（変形図）を表しているのではないことに注意されたい。例えばモード 1 については、き裂が固定端に近いほど固有値は小さくなる、すなわち固有振動数が小さくなることを意味する。

次に、固有値の X 方向感度を図-12 に示す。図-12 も各モードの感度値の最大値が 1 になるように正規化している。この感度は 2.6 節で述べた、解析的に導いた値である。図-11 の固有値の挙動とほぼ整合性のとれる結果となっている。

3.2 梁長手方向のき裂位置同定

推定するき裂を長手方向または厚肉方向の一方のみに限定した位置同定を行うことにする。ここでは、き裂端の座標が $P(x, y) = (0.4, 0.015)$ 、すなわち長手方向 $x = 0.4m$ の位置に長さ 0.035m のき裂が存在する場合を想定する。

まず、き裂長さ 0.035m を既知とし、長手方向位置の同定を行う。この時、推定するき裂位置の初期値を $x = 0m$ 付近に設定し、感度情報を基に推定するき裂

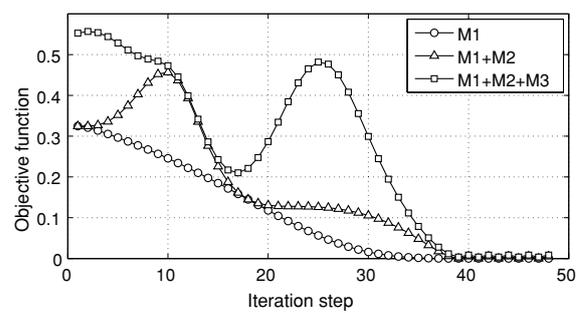


図-13 長手方向き裂位置同定における反復回数と目的関数の関係

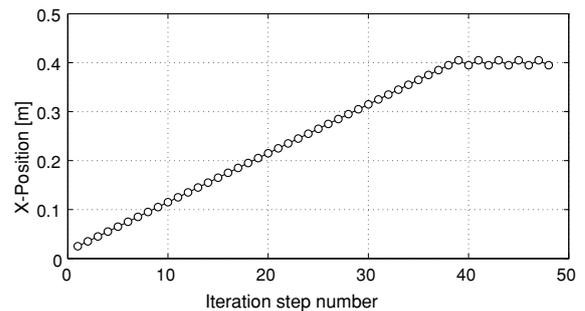


図-14 長手方向き裂位置同定における反復回数と推定き裂 x 座標の関係

を移動させ同定を行った。そのときの目的関数の履歴を図-13 に示す。目的関数は、誤差評価の基準として、モード 1 のみ、モード 1+モード 2、そしてモード 1+モード 2+モード 3 の 3 種類をプロットしている。また、推定き裂のき裂端 x 座標の履歴を図-14 に示す。 $x=0.4m$ の時点で目的関数がほぼゼロとなり、良好な位置同定が行えた。

なお図-13 では、目的関数をモード 1 のみで評価した場合 (M1) が最も良い収束性を示しているように見える。逆に、モード次数の情報量が増える「M1+M2」と「M1+M2+M3」では幾つかの増減を繰り返している。これはき裂長さを 0.035m に固定し既知の量と見なし、長手方向位置のみを同定するという、かなり制約された条件下での同定プロセスであることに依る。き裂長さとき裂位置両方を同時に同定するような一般の場合においてもこのような結果となるわけではない。例えば、文献¹²⁾では、変断面梁のき裂位置及び長さ同定に 3 個の固有振動情報が必要であると報告されている。

3.3 梁厚肉方向のき裂深さ同定

次に、長手方向位置 $x=0.4m$ を既知とし、き裂長さの同定を行った。一反復当たりの移動量は 1/5 要素長とした。その結果を図-15, 図-16 に示す。き裂端の位置 $y=0.015m$ 付近で目的関数が収束し、良好な位置同定を行うことができた。

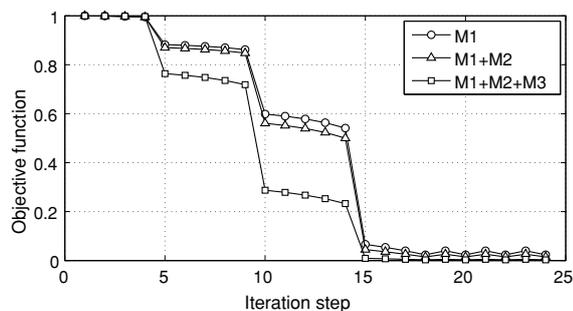


図-15 厚肉方向き裂位置同定における反復回数と目的関数の関係

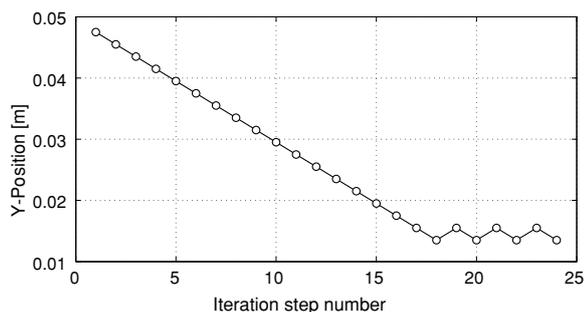


図-16 厚肉方向き裂位置同定における反復回数と推定き裂 y 座標の関係

4. 結言

き裂を含む構造物の解析に対して、拡張型有限要素法 (XFEM) を用いることで、メッシュに変更を施すことなく連続的にき裂位置を変化させた解析が可能となり、それを利用し片持ち梁によるき裂位置同定を行った。同定原理は、推定するき裂及び実在のき裂、それぞれのき裂位置に対する固有値の誤差二乗和を目的関数とする最小化問題とした。感度行列の導出に際し、XFEMにおいて剛性行列の数値積分にしばしば用いられる簡略化した方法、すなわちエンリッチ節点を有する要素全体にガウス積分公式を適用する方式では、その積分点数にかかわらず差分近似による感度行列が摂動量の漸減に対して有限値に漸近せず、適切な感度値を求めることが困難であることを数値実験的に確認した。

そして要素剛性行列を、き裂位置を表す設計変数を陽に含む形で解析的に積分した後、それを設計変数で微分し解析的感度式を導出した。またこの解析的感度が差分近似感度の漸近収束値と一致することを数値的に確認した。

この解析的に導出した感度情報を基に、片持ち梁の表面き裂の同定を行い良好な結果を得た。同定はき裂長さまたは長手方向位置のどちらか一方を既知として固定した状態で行った。

本論文で扱ったモデルは2次元梁部材であるが、今後は板・シェル要素への3次元の拡張を予定している。

参考文献

- 1) 田中正隆, 山際孝次: 動弾性逆問題への境界要素法の適用, 日本機械学会論文集, A 編, 第 54-501 号, pp.1054-1060, 1988.
- 2) 田中正隆, 中村正行, 中野隆志: マルチ加振法による構造要素の欠陥同定 (欠陥が複数個ある場合), 日本機械学会論文集, A 編, 第 56-528 号, pp.180-185, 1990.
- 3) 高木清志, 西郷宗玄: スマート構造物のクラック推定を伴う振動制御—ゲインスケジュールド制御系による実験の検証—, 計測自動制御学会産業論文集, 第 5-1 号, pp.1-8, 2006.
- 4) Narayana, L.K. and Jebaraj, C.: Sensitivity analysis of local/global modal parameters for identification of a crack in a beam, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.228-5, pp.977-994, 1999.
- 5) Qian, G.L., Gu, S.N. and Jiang, J.S.: The dynamic behaviour and crack detection of a beam with a crack, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.138-2, pp.233-243, 1990.
- 6) 堀辺忠志: 固有振動数の変化に基づくき裂を有する曲がりばりのき裂同定, 日本機械学会論文集, A 編, 第 70-695 号, pp.84-91, 2004.
- 7) Möes, N., Dolbow, J. and Belytschko, T.: A finite element method for crack growth without remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.46, pp.131-150, 1999.
- 8) Rabinovich, D., Givoli, D. and Vigdergauz, S.: Crack identification by 'arrival time' using XFEM and a genetic algorithm, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.77, pp.337-359, 2009.
- 9) Rabinovich, D., Givoli, D. and Vigdergauz, S.: XFEM-based crack detection scheme using a genetic algorithm, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Published Online: 23. Oct. 2009.
- 10) Waisman, H., Chatzi, E. and Smyth, A.W.: Detection and quantification of flaws in structures by the extended finite element method and genetic algorithms, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.71, pp.1051-1080, 2007.
- 11) 中村正行, 田中正隆: 欠陥同定問題の動弾性逆解析への遺伝的アルゴリズムの適用, 日本機械学会論文集, A 編, 第 60-574 号, pp.116-122, 1994.
- 12) 堀辺忠志, 浅野直輝, 岡村弘之: き裂を有する変断面ばりの固有振動およびき裂同定, 日本機械学会論文集, C 編, 第 67-657 号, pp.148-154, 2001.
- 13) 堀辺忠志, 渡邊賢介: GA による平板のき裂同定, 日本機械学会論文集, A 編, 第 71-710 号, pp.28-35, 2005.
- 14) Mohammadi, S.: *Extended Finite Element Method*, Wiley-Blackwell Publishing 2008.
- 15) 山川宏: 最適化デザイン, 培風館, p.82.
- 16) 村上章, 登坂宣好, 堀宗朗, 鈴木誠: 有限要素法・境界要素法による逆問題解析, コロナ社, 2002.
- 17) Mohammadi, B. and Pironneau, O.: *Applied Shape Optimization for Fluids*, Oxford University Press, 2001.
- 18) 浅井光輝, 寺田賢二郎: 有限被覆法による不連続面進展解析, 土木学会応用力学論文集, 第 6 巻, pp.193-200.

(2010年3月9日 受付)