応用力学論文集 Vol.13, pp.141-149　(2010 年 8 月)　土木学会

モンテカルロ積分を利用した有限要素法の開発とその性能評価

Development and accuracy of the finite element scheme with Monte Carlo integration

水田雄造*・松原仁**・伊良波繁雄***
Yuzo MIZUTA, Hitoshi MATSUBARA and Shigeo IRAHA

*琉球大学大学院 理工学研究科（〒903-0213 沖縄県中頭郡西原町字千原 1）
**博士(工学) 琉球大学助教 工学部環境建設工学科（〒903-0213 沖縄県中頭郡西原町字千原 1）
***博士(工学) 琉球大学教授 工学部環境建設工学科（〒903-0213 沖縄県中頭郡西原町字千原 1）

The finite element scheme with Monte Carlo integration is proposed in order to take into account the material heterogeneity. In this scheme, material properties are defined at sampling points which are distributed in an element in a random manner. By using this scheme, uncertainty behaviors of heterogeneous materials might be implemented into the finite element method. In this paper, we applied the proposed scheme to 3-dementional finite element with drilling degrees of freedom. Then, the characteristics of accuracy in this scheme were verified through some numerical examples. Consequently, the effectiveness of the scheme was described.

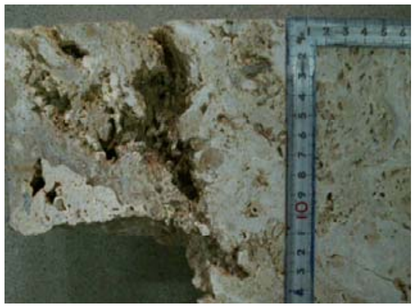
Key Words: *Uncertainty, Heterogeneity, Monte Carlo and Gaussian integral, finite element with drilling degrees of freedom*

1. はじめに

地盤や岩石，木材等の自然界に存在する固体材料は極めて不均質な性質を有している．その中でも，沖縄県に幅広く分布している琉球石灰岩地盤は，多数の亀裂を含んだ、数 mm の小さな孔から，数十 m にも至る巨大な空洞が分布している地盤材料であり(図－1 参照)，その強度は縦横方向に極めてばらつくという特徴を有している [1]．したがって，地盤の支持力特性については未解明な部分が多く，地盤工学分野においても活発な研究が行われているという現状がある [2),3)]．

他にも，コンクリート材料は，水，セメント，骨材等からなる複合材料であり，極めて不均質な材料物性を有している．近年，橋梁の長寿命化修繕計画 [4]など，コンクリート構造物のメンテナンスが重要視されている事もあり，上記の琉球石灰岩も含め，不均質材料に対する新たな性能評価手法の開発が必要だと考えられる．

一方，昨今の計算機性能は目覚しい発展を遂げており，三次元の力学挙動を解析する事が容易になりつつある [5]．計算機を用いた代表的なシミュレーション手法のひとつとして有限要素法を挙げることができるが，上記のような不均質材料の解析に対して本手法を用いる場合，要素内の材料物性は要素内に仮定されるガウス積分点 [6]にて考慮される．しかしながら，ガウス積分点の位置は要素内で固定されており，積分点の位置を不規則かつ任意に決めることは容易ではない [6]．また，複雑な不均質材料に対して，材料の分布を考慮したロバストなメッシュ分割を行うことも困難である．これらのことは，均質化法を用いた場合も同様である [7]．



図－1　掘削した琉球石灰岩断面の一例

他方，有限要素法から得られる解は，要素分割が等しいモデルを解析対象にした場合，得られる解は完全に一致する．しかしながら，例えば，琉球石灰岩であれば孔の大きさや形状，コンクリートでは骨材の形状や複合材料の不均質な材料特性など，不均質材料は様々な不確定要素を有しているため，それらの力学挙動は切り出した部分によって異なる場合がほとんどである．これが材料の「不確かさ」であり，この「不確かさ」を考慮できる手法は，モンテカルロ法 [8]や，確率有限要素法 [9]等，様々な手法が提案され，その有効性が検討されている [10]．確率有限要素法 [9]は，形状や材料特性，幾何学的境界条件の「ゆらぎ」に対して，

主要な剛性方程式を一回解くだけで，所要の解の分散や期待値を得ることができる．しかしながら，この方法は，計算量が多いという問題を有しており，又，計算過程も複雑であることから，より簡単で，計算コストが低く抑えられる新たな不確かさ解析手法の開発が望まれる．

本研究では，モンテカルロ法に着目する．モンテカルロ法は，乱数を用いた試行計算によって，真値を統計的に推定する手法で，本手法においては，任意変数の「不確かさ」は「確率分布」としてモデル化され，評価されることになる．

そこで．本論文では，有限要素法の積分計算にモンテカルロ積分を適用し，材料が持つ不均質性や不確かさを直接的に表現することを試みる．本手法は，確率有限要素法に比べ計算量が少なく，計算過程が直感的に理解しやすいものになっており，土木構造物のように，解析対象が大型な場合においても，より簡単に不確かさを考慮した解析が可能になると考えられる．本論文では，幾つかの数値解析を通じて，本手法の妥当性を検討する．

2.　要素剛性マトリックスの定式化

2.1　回転自由度を有する四面体要素

本節では，回転自由度を有する四面体要素[11)]について定式化する．本要素は，図―2 に示すように四面体の頂点に回転自由度を加えたものであり，既存の研究[12)]により，通常の中間節点を有するアイソパラメトリック要素に比べて，メッシュ生成にかかる労力が軽減される点や高精度な解が得られるという点で，優れていると考えられる．そこで，本研究では，今後の応用展開を見据え，本要素を採用することにした．

回転自由度を有する四面体要素の変位場(u,v,w)は次式で与えられる．

$$u=\sum_{i=1}^{4}\left\{u_i+(z-z_i)\theta_{iy}-(y-y_i)\theta_{iz}\right\}N_i \tag{1a}$$

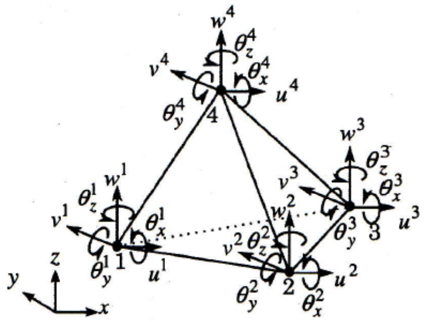
$$v=\sum_{i=1}^{4}\left\{v_i+(x-x_i)\theta_{iz}-(z-z_i)\theta_{ix}\right\}N_i \tag{1b}$$

$$w=\sum_{i=1}^{4}\left\{w_i+(y-y_i)\theta_{ix}-(x-x_i)\theta_{iy}\right\}N_i \tag{1c}$$

ここで，u_i，v_i，w_iは x，y，z 軸方向の並進方向変位，x_i，y_i，z_iは要素の頂点座標，x，y，z は要素内の任意座標，θ_{ix}，θ_{iy}，θ_{iz} は各軸回りの回転自由度，N_i は四面体一次要素の形状関数[6)]である．式(1a)から(1c)より，回転自由度を有する要素のひずみ－変位マトリックス[B]は，

$$\left[B\right]=\left[B_1\quad B_2\quad B_3\quad B_4\right] \tag{2}$$

となる．ここで，



図－2　回転自由度を有する四面体要素

$$[B_i]=\begin{bmatrix}
\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \hat{z}\frac{\partial N_i}{\partial x} & -\hat{y}\frac{\partial N_i}{\partial x}\\
0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & -\hat{z}\frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \hat{x}\frac{\partial N_i}{\partial y}\\
0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \hat{y}\frac{\partial N_i}{\partial z} & -\hat{x}\frac{\partial N_i}{\partial z} & 0\\
\frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & -\hat{z}\frac{\partial N_i}{\partial x} & \hat{z}\frac{\partial N_i}{\partial y} & \hat{x}\frac{\partial N_i}{\partial x}-\hat{y}\frac{\partial N_i}{\partial y}\\
0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \hat{y}\frac{\partial N_i}{\partial y}-\hat{z}\frac{\partial N_i}{\partial z} & -\hat{x}\frac{\partial N_i}{\partial y} & \hat{x}\frac{\partial N_i}{\partial z}\\
\frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \hat{y}\frac{\partial N_i}{\partial x} & -\hat{x}\frac{\partial N_i}{\partial x}+\hat{z}\frac{\partial N_i}{\partial z} & -\hat{y}\frac{\partial N_i}{\partial z}
\end{bmatrix} \tag{3}$$

である．また，$\hat{x}=x-x_i$，$\hat{y}=y-y_i$，$\hat{z}=z-z_i$ である．

体積座標[13)]を用いると，本要素の要素剛性マトリックス[k]は次式のように与えられる．

$$[k]=\int_0^1\int^{1-L_1}\int^{1-L_1-L_2}[B]^T[D][B]\det[J]\,dL_1dL_2dL_3 \tag{4}$$

式(4)の[D]は応力－ひずみマトリックス，[J]はヤコビアンマトリックスである．これ以降，本要素を RGNTet4 と称することにする．

RGNTet4 の変位境界条件の設定は，一般の要素とは異なる．詳細は文献 12) 14)に詳しいが，ここではその設定方法について簡単に述べることにする．今，図―2 における $\overline{12}$ 辺において，既知変位量 u_0,v_0,w_0 を用いて，変位境界条件が次のように与えられているとする．

$$u=u_0\,,v=v_0\,,w=w_0 \tag{5}$$

式(5)より，辺$\overline{12}$ 上における x 軸上の変位は次式のように与えられる．

$$u(\overline{12})=N_1u_1(x)+N_2u_2(x)$$

$$=N_1\left[1\quad 0\quad 0\quad 0\quad (z-z_1)\quad -(y-y_1)\right]D_1 \tag{6}$$

$$+N_2\left[1\quad 0\quad 0\quad 0\quad (z-z_2)\quad -(y-y_2)\right]D_2$$

ここで，

$$D_i=\left(u_i\quad v_i\quad w_i\quad \theta_{ix}\quad \theta_{iy}\quad \theta_{iz}\right) \tag{7}$$

表－1　RGNTet4 の境界条件処理方法

境界条件	節点自由度に関連する所定の値					
	u_i	v_i	w_i	θ_{ix}	θ_{iy}	θ_{iz}
$u=u_0$	u_0	Free	Free	Free	0	0
$v=v_0$	Free	v_0	Free	0	Free	0
$w=w_0$	Free	Free	w_0	0	0	Free

である. 所定の境界条件を得るためには, 次式が成立する.

$$u_1 = u_2 = u_0 \tag{8}$$

また，回転自由度 θ_{1y}，θ_{2y}，θ_{1z}，θ_{2z} は定数 c_1，c_2 を用いて次式のように拘束される.

$$\theta_{1y} = \theta_{2y} = c_1 \,,\quad \theta_{1z} = \theta_{2z} = c_2 \tag{9}$$

式(8)，式(9)を式(6)に代入すると，

$$u(\overline{12}) = (N_1 + N_2)u_0 + c_1((z - z_1)N_1 + (z - z_2)N_2)$$

$$-c_2((y - y_1)N_1 + (y - y_2)N_2) \tag{10}$$

が得られる．定数 $c_1 = c_2 = 0$ とすれば，次式のように節点 1 に関連する変位境界条件を無条件に満足できる.

$$u_1 = u_0, \theta_{1y} = \theta_{1z} = 0 \tag{11}$$

RGNTet4 の境界条件の処理方法をまとめたものを表－1 に示した.

2.2　RGNTet4 の精度評価

ここでは，図―3 に示すような片持ち梁の曲げ問題に対する RGNTet4 の精度を評価する．材料のヤング率は 1,000N/mm^2, ポアソン比は 0.0 とした. 比較する理論解は, ティモシェンコによるせん断変形を考慮した自由端の荷重方向たわみであり，次式で表すことができる [15].

$$u = \frac{Pl}{3EI}\left\{1.0 + 0.71\left(\frac{h}{l}\right)^2 - 0.1\left(\frac{h}{l}\right)^3\right\} \tag{12}$$

ここで，E はヤング率，l は梁の長さ，I は断面二次モーメント，h は梁成，P は自由端での荷重である．比較として定ひずみ四面体要素での解析も行った.

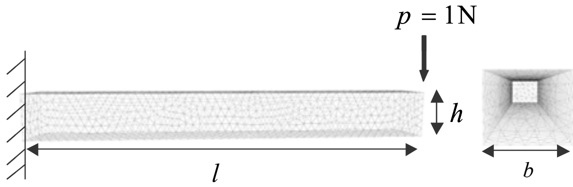
図―4 に解析値を式(12)で正規化した正規化変位と要素数の関係を示す．同図より，RGNTet4 が，定ひずみ四面体要素に比べ高い精度を有していることが分かる.

3.　有限要素法における「不確かさ」の取り扱い

3.1　モンテカルロ法及びモンテカルロ積分

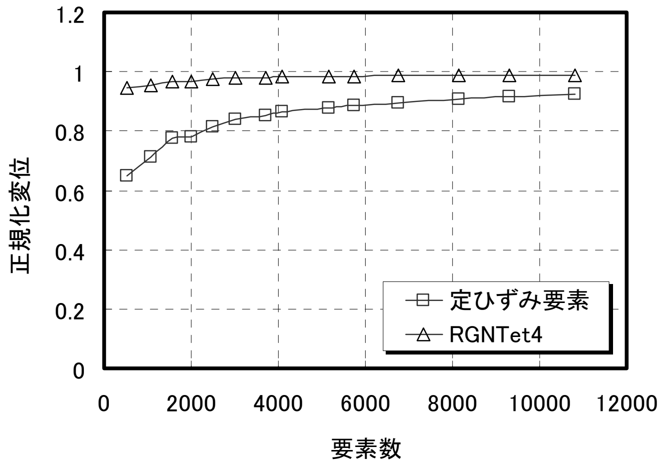
モンテカルロ法とは, Von Neumann らが考案した手法で, 乱数を用いた試行計算を行い, 真値を統計的に推定する手法である [8]．このモンテカルロ法を利用した数値積分をモンテカルロ積分と呼び，次式で表すことができる.

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \frac{V}{N_i}\cdot\sum_{i=1}^{N_i} f(x_n^i, y_n^i, z_n^i) \tag{13}$$

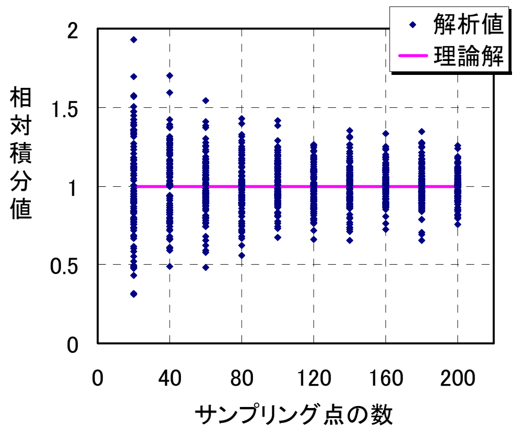


$l = 10$ mm　, $h = 1$mm　, $b = 1$mm

図―3　片持ち梁有限要素モデル



図－4　RGNTet4 の精度評価



図―5　モンテカルロ積分の精度評価

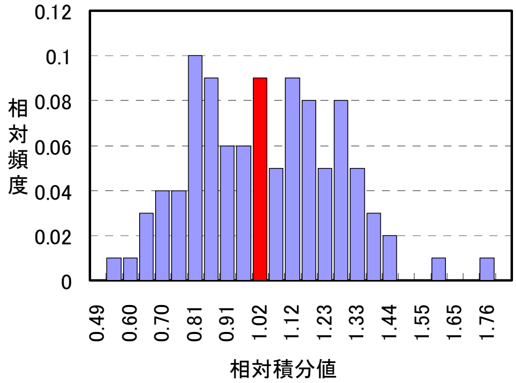
ここで，V は体積，N_i はサンプリング点の数である.

モンテカルロ積分を利用すると, 任意関数の多重積分を多数の試行値のみの利用で求めることができる．また，任意の点を配置するだけでよいので, 多次元積分に有効であることが知られている [16].

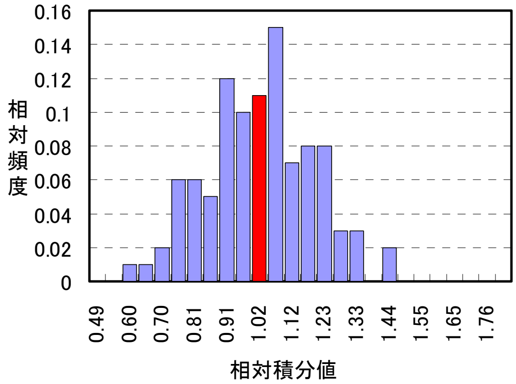
ここで，モンテカルロ積分の妥当性を示すために，次式に示す一次元領域における 5 次関数の積分計算を行った.

$$f(x) = \int_0^{10} (x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x)dx \tag{14}$$

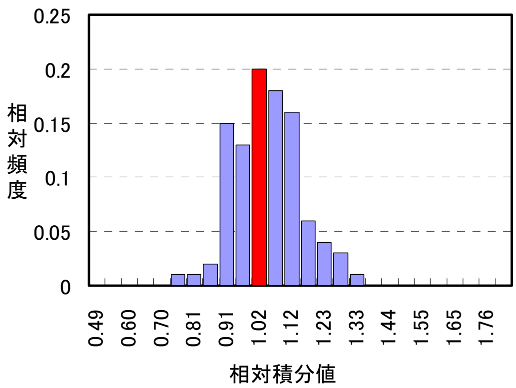
本例題では，サンプリング点の異なるモデルを 10 個用意し，モデル毎に 100 回の試行計算を行った．図―5 に得られた値と理論解を示し，図―6 には得られた解のヒストグラムを示した．なお，図―5 の相対積分値とは，得られた解析値を理論解で正規化した値であり，図―6 の相対頻度とは, 解析値がその積分値区間に入った頻度を試行回数



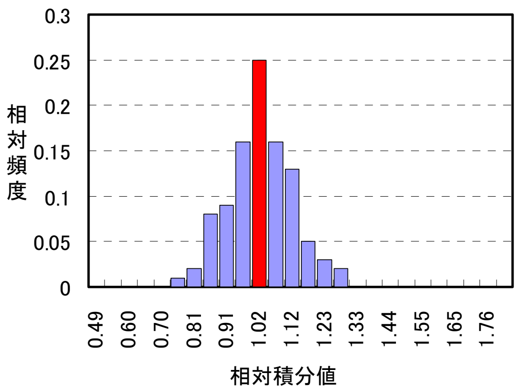
(a)　サンプリング点 40



(b)　サンプリング点 80

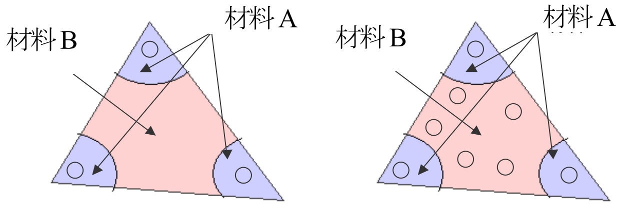


(c)　サンプリング点 160



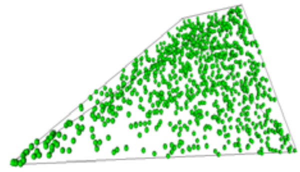
(d)　サンプリング点 200

図−6　モンテカルロ積分値のヒストグラム



(a)　ガウス積分法　　　(b)　モンテカルロ積分

図−7　要素内で異なる材料物性を示す要素


図−8　四面体要素内部にランダム配置した積分点

で除した値である．図−5 より，解析値は理論解を中心にばらついていることが分かる．図−6 では，サンプリング点の増加に伴い，解析値が理論解(赤棒部分)へ収束していく様子が分かる．以上より一次元領域ではモンテカルロ積分が妥当であることが示された．

3.2　モンテカルロ積分の有限要素法への適用

一般に，有限要素法では，要素剛性マトリックスの計算においてガウス積分法が用いられる．有限要素法を不均質材料の解析に適用した場合，図−7(a)の様になる．本研究では，3次元解析を行っているが，図−7は説明の簡略化のため三角形要素の3点積分の例を示している．なお，同図の積分点は要素内にあり，それらの面積座標は，それぞれ(4/6,1/6, 1/6)，(1/6, 4/6, 1/6)，(1/6, 1/6, 4/6)である．同図より，積分点の存在する「材料A」部分の物性は，ガウスの積分点で考慮する事が可能である．しかし，積分点の存在しない「材料B」部分の物性は，直接的には考慮することができない．

そこで本研究では，要素剛性マトリックスの計算にモンテカルロ積分の利用を提案する．本手法を用いることで，図−7(b)のように積分点をランダムに配置することが可能となる．これにより材料の「不確かさ」はモンテカルロ法による「確率分布」としてモデル化され，直接的に表現される．すなわち，不均質材料のもつ「不確かさ」を考慮した有限要素解析が可能となる．

図−8は実際に四面体要素内に積分点をランダム配置した例を示している．その配置方法は，本研究においては，4つの積分点の体積座標をそれぞれ，L1，L2，L3，L4と定義した場合，L1からL4の総和が1になることを利用し，この条件を満足するように，それぞれの値に対して0〜1の範囲でC言語のrand関数[17]を用い配置した．同図より明らかではあるが，要素内部の不均質性は，サンプリング点の個数分だけ考慮可能であることがわかる．本論文では，このモンテカルロ積分を適用した有限要素法をMC有限要素法と称することにする．

表−2　解析条件

R	サンプリング点の数
1	30，60，90，120
2	30，60，90，120
3	30，60，90

4.　数値解析例

本解析では解析条件として，繰り返し回数(以下 R)とサンプリング点の数をパラメータとして扱う．R とは，要素剛性マトリックスの計算回数であり，計算に使われる要素剛性マトリックスはそれらの平均値である．なお，R は，解析対象の個体差を想定しており，本研究では，個体差に対する確率変動は考慮せず，平均化することで評価したことになる．ここでは，この R とサンプリング点の数，要素数を変化させた計算を行い，本手法の妥当性を検証した．

4.1　片持ち梁モデルにおける性能評価

図−3 に示した片持ち梁モデルを用いて，MC 有限要素解析を行う．解析条件を表−2 に示した．

図−9 には，正規化変位(理論解で解析値を正規化した値)と，要素数の関係について，要素数の異なるモデル毎に 10 回の試行計算から得られた値とガウス積分を用いた有限要素法の解，およびティモシェンコ梁の理論解を示した．なお，ガウス積分を用いた有限要素法及び MC 有限要素法で用いたメッシュは同じものである．

図−10 には自由端変位のヒストグラム，表−3 及び表−4 には GUM 評価[18]を示した. ここで, GUM 評価とは, 解析結果の「不確かさ」を定量的に評価できる手法であり，真値の分からない問題に対して，一連の観測値の統計解析から合理的に測定量に結びつけられ得る値，すなわち真値の候補と考えられる値を求める事が可能である．GUM 評価式は n 個のデータが与えられているとき，

$$\bar{x} \pm u(\bar{x}) \tag{15}$$

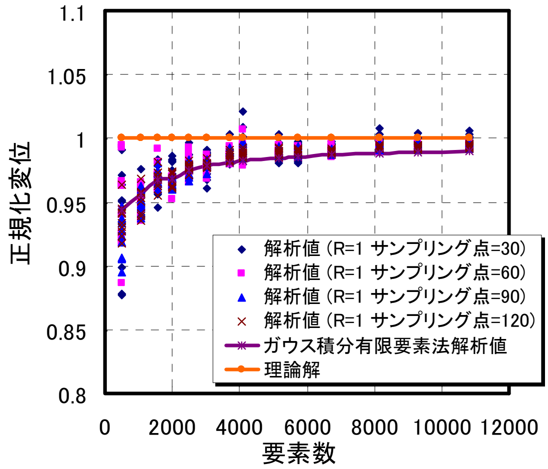
で定義される．式(15)に含まれる区間が真値の候補と考えられる値である．ここで，$\bar{x}$ はデータの平均値，$u(\bar{x})$ は標準不確かさと呼ばれ，次式で定義される．

$$u(\bar{x}) = s/\sqrt{n} \tag{16}$$

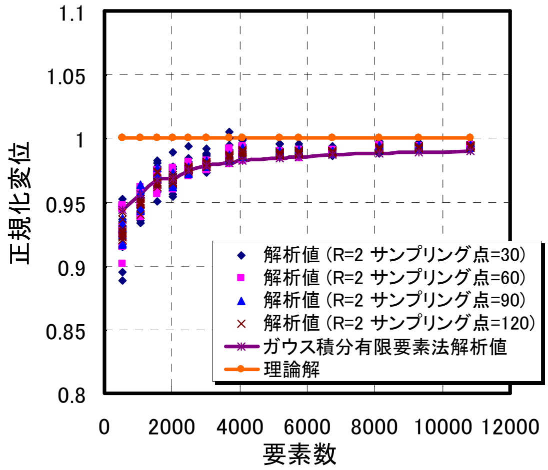
sは標準偏差である．

図−9から，MC有限要素法の解は，ガウス積分を用いた有限要素法の解付近でバラついている様子が分かる．また．繰り返し回数とサンプリング点の増加に伴い，解析値のバラつきが小さくなっていく様子も見られた. 理論解との差は要素数の少ないもので最大10%程度の差が見られる場合もあるが，要素数の増加に伴い，その差が小さくなっている．

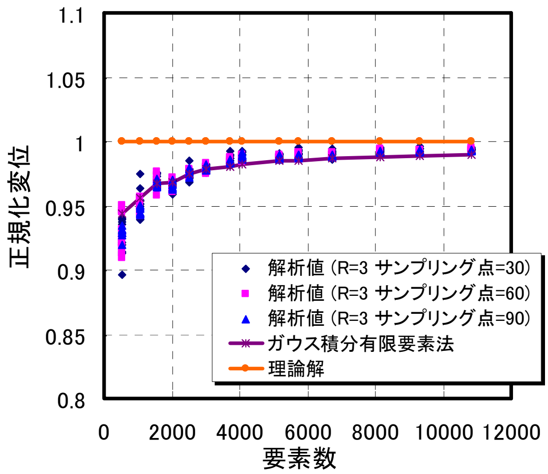
図−10のヒストグラムより，要素数の増加に伴い解析値が理論解へ収束していく様子が見られた．なお，同図の正規化変位区間とは，仮定した変位区間を，ティモシェンコ梁の理論解で正規化した区間である. また, 表−3にRが3,



(a)　繰り返し回数 1，サンプリング点 30，60，90，120



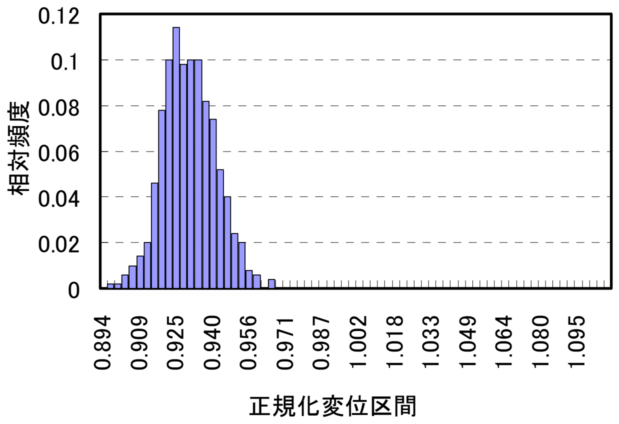
(b)　繰り返し回数 2，サンプリング点 30，60，90，120



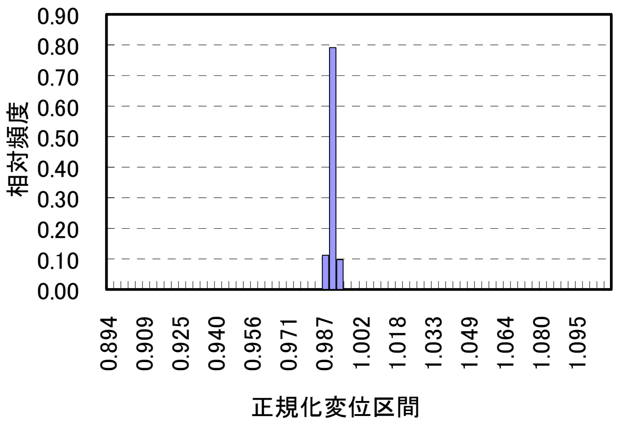
(c)　繰り返し回数 3，サンプリング点 30，60，90

図−9　片持ち梁モデルの精度評価

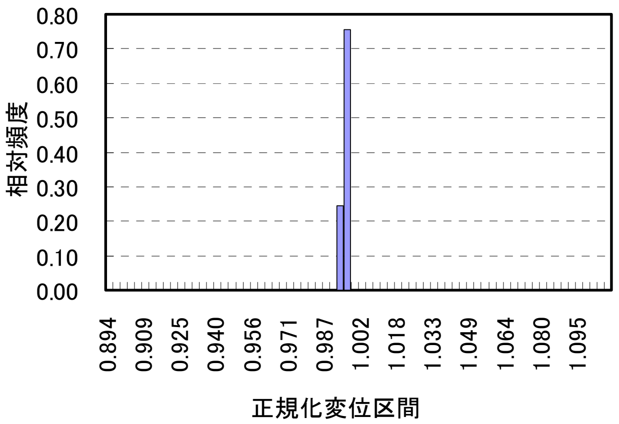
サンプリング点の数が 60 の場合における GUM 評価を示す．同表より，梁の曲げ解析における GUM 評価は，要素数 515 のときには約 3.74±0.002，5168 のときには約 3.98 ±0.0002，10816 のときには約 4.00±0.0001 であり，変位が 4.00 付近に収束してく様子がわかる．なお，表−4 は R やサンプリング点の数と，GUM 評価式との関係をまとめ



(a)　R=3　サンプリング点=60　要素数 515



(b)　R=3　サンプリング点=60　要素数 5168



(c)　R=3　サンプリング点=60　要素数 10816

図－10　片持ち梁モデル解析値のヒストグラム

たものであるが，同表より，要素数が等しいケースにおいて，繰り返し回数(R)やサンプリング点の数(S)にかかわらず，GUM 評価は，ほぼ一致していることがわかる．

4.2　薄板モデルにおける性能評価

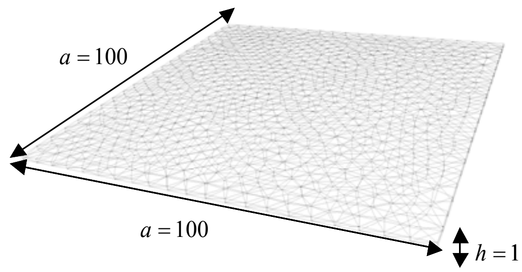
ここでは，図－11 に示す全周固定の正方形板に等分布荷重を与えた場合における変位の精度を検討する．材料のヤング率は 1,000N/mm^2，ポアソン比は 0.0 とした．理論解は，正方形板の最大たわみであり，次式で表せる [19]．

表－3　R=3，サンプリング点=60 における GUM 評価

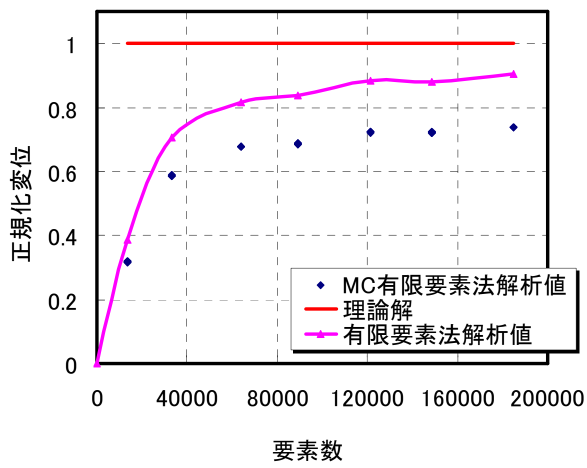
要素数	515	5168	10816
平均値	3.74	3.98	4.00
標準偏差	0.045	0.005	0.002
標準不確かさ	0.002	0.0002	0.0001
GUM評価	3.74±0.002	3.98±0.0002	4.00±0.0001

表－4　R 及びサンプリング点の変化による GUM 評価

R	S	要素数515	要素数5168	要素数10816
1	30	3.78±0.005	3.99±0.001	4.01±0.0004
1	60	3.75±0.004	3.99±0.0006	4.01±0.0003
2	30	3.76±0.005	3.99±0.0007	4.01±0.0003
2	60	3.75±0.003	3.98±0.0009	4.00±0.0001
3	30	3.75±0.003	3.98±0.0005	4.00±0.0001
3	60	3.74±0.002	3.98±0.0002	4.00±0.0001



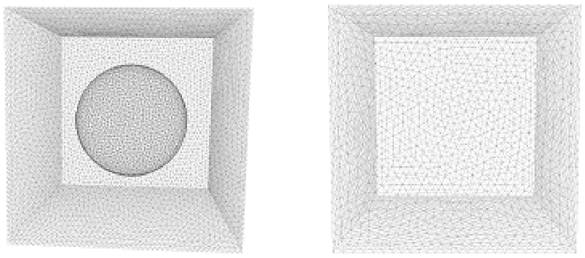
図－11　薄板有限要素モデル



図－12　薄板モデル性能評価

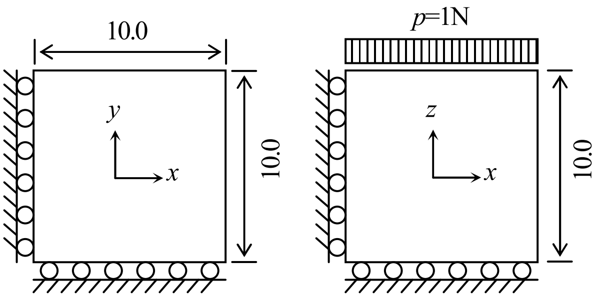
$$w_{\max} = 0.00126\,pa^4 \cdot \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3} \qquad (17)$$

ここで，p は面にかかる荷重，a は一辺の長さ，E はヤング率，h は板厚，ν はポアソン比である．なお，解析条件は，前節の片持ち梁モデルの解析結果を参考にし，R＝2，サンプリング点の数を 90 に設定した．



(a) 有限要素モデル　　(b) MC 有限要素モデル

図－13　内部に 1 個の空洞を有するメッシュ分割モデル



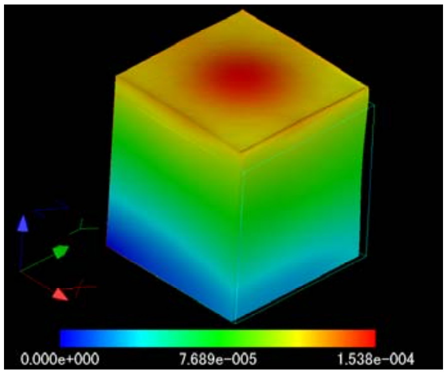
図―14　境界条件及び荷重条件

図－12には，MC有限要素法の解とガウス積分を用いた有限要素法の解及び理論解を示した．前節と同様に，両解析のメッシュは同じものを使用している．同図より，MC有限要素法の解は，理論解と比較して2~3割程度の差が生じているが, 理論解に収束していく様子が見られた. なお, 理論解と解析解の差については, 板の厚肉方向の要素分割不足によるものだと考えられる. 図－12より明らかではあるが，ガウス積分を用いた有限要素解析の結果は，MC有限要素法に比べ理論解に近い値となっている.

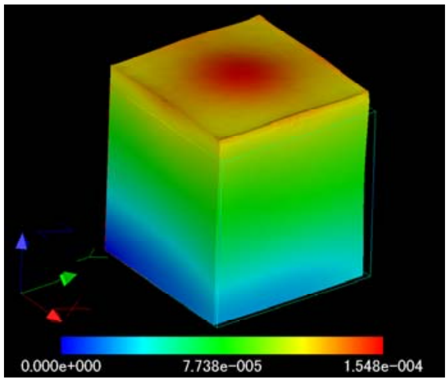
4.3　内部空洞を有する固体の弾性解析

ここでは，図－13に示すような，内部に球状の空洞を有する立方体モデルの応力解析を行う．立方体の一辺は10mmとし，ヤング率は1,000N/mm^2，ポアソン比は0.25とした．図－14に境界条件及び荷重条件を示す．ガウス有限要素モデルでは, 図－13(a)のようにメッシュを細かく切ることで空洞を表現した．空洞は球状で，立方体の中央に位置し半径は3mmとした．なお，立方体の中心の座標は$x=y=z=0$である．MC有限要素モデルでは，図－13(b)のようにガウス有限要素モデルに比べ, メッシュの粗い立方体モデルを作成し, ガウス有限要素モデルの空洞部分にあたる座標のヤング率を0.00001と極めて小さく設定することで, 空洞を擬似的に表現した. 解析条件はR＝2，サンプリング点の数を90とした．図－15に変形図を示す．変位量は，ガウス有限要素モデルで0.0～1.538e^{-4}mm，MC有限要素モデルで0.0～1.548e^{-4}mmであった．図－16には，座標$x=z=5$部分における，y座標のz軸方向変位を示した.

次に，図－17に示すような空洞の数を9個に増やした場場合を検討する．空洞の半径は1.5～2.5mmとし，立方体内部にランダムに配置した．MC有限要素モデルは，空洞が

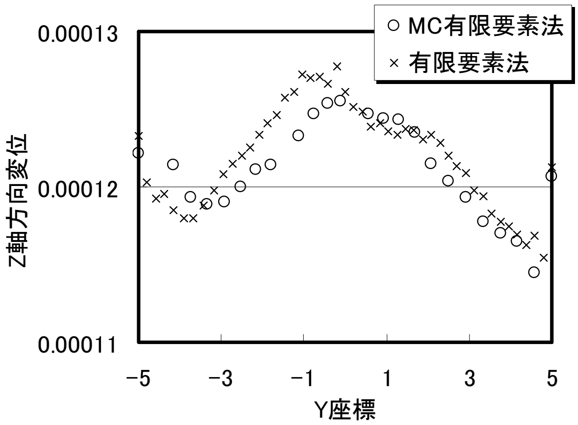


(a)　ガウス有限要素モデル



(b)　MC 有限要素モデル

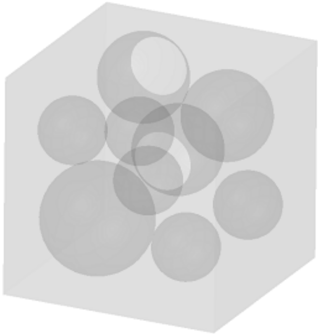
図－15　内部に 1 個の球状空洞を有する立方体の変形図



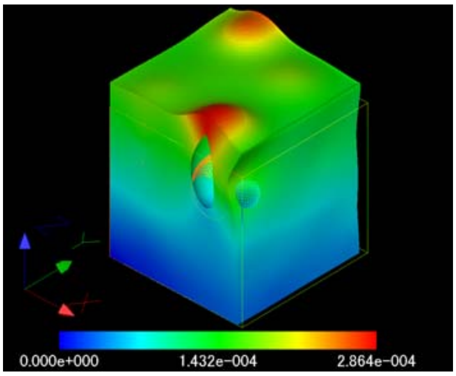
図－16　内部に 1 個の球状空洞を有する立方体の $x=z=5$ における z 方向変位

1個の場合と同様に, 空洞9個分の座標とヤング率を指定し, 擬似的に空洞を表現している．なお，要素数はガウス有限要素モデルが392,433, MC有限要素モデルが98,009である.

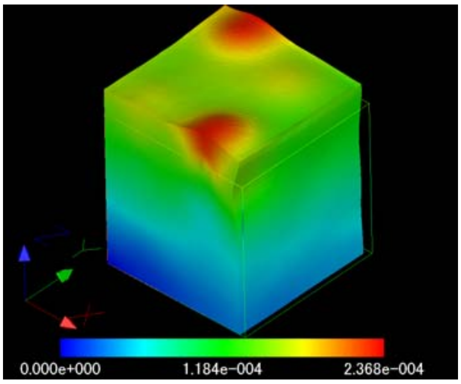
図－18に変形図を示す. 変形量はガウス有限要素モデルで0.0～2.864e^{-4}mm，MC有限要素モデルで0.0～2.368 e^{-4}mmとなった．次に，図－19でz軸断面におけるz方向の応力分布を示した．応力値はガウス有限要素モデルで-1.294e^{-2}～1.0478e^{-1}N/mm^2，MC 有限要素モデルで-1.638e^{-3}～5.317 e^{-2}N/mm^{2}となった．なお，ガウス積分を用いた有限要素法においては，当然ながら解は唯一ひとつであるが，モンテ



図－17　複数個の空洞を有するモデル



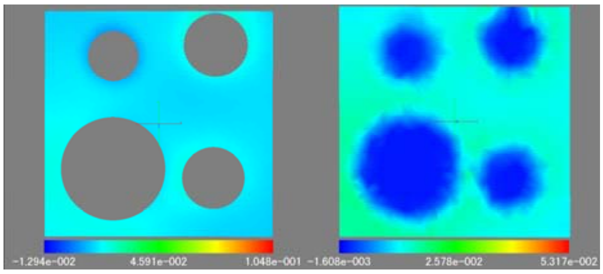
(a)　ガウス有限要素モデル



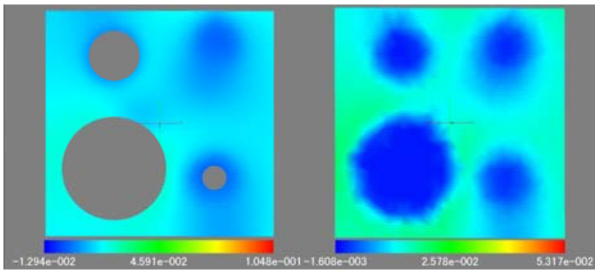
(b)　MC 有限要素モデル

図－18　空洞を複数有するモデルの変形図・変位量

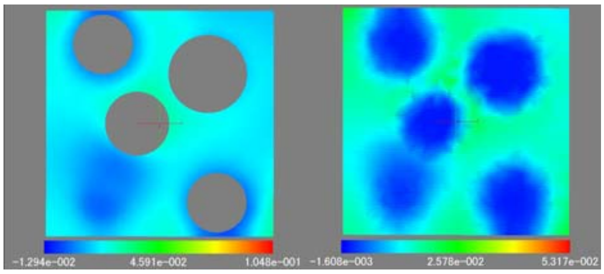
カルロ積分を用いた有限要素法から得られる解は，ある範囲でばらついている．そのばらつきは注目する部分によって異なり，その差が，この例題においても現れる結果となった．以上の結果から，MC 有限要素法は材料の不均質性を考慮することができていると考えられる．また，モデルの作成に関して，有限要素モデルは空洞の作成に，かなりの労力が必要となるが，MC 有限要素モデルは材料定数を設定するのみで良く，メッシュ数も有限要素モデルに比べ粗い状態でもほぼ同等の解析結果が得られ，極めて簡単な作業となる．したがって，不均質材料の解析に対して，MC 有限要素法が優れた解析法であることが考えられた．



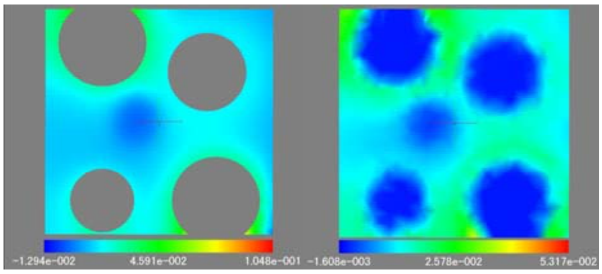
(a)　z=2mm 断面



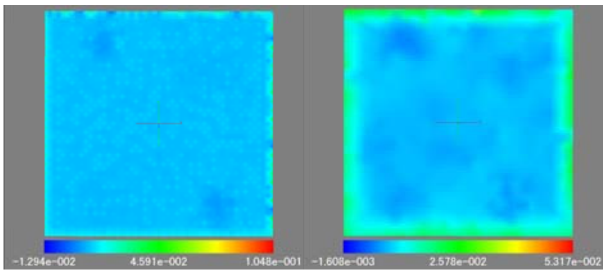
(b)　z=4mm 断面



(c)　z=6mm 断面



(d)　z=8mm 断面



(e)　z=10mm 断面

(左：有限要素モデル　右：MC 有限要素モデル)

図－19　　応力分布

5.　おわりに

本論文では，不均質材料に対する解析手法として，モンテカルロ積分を適用した有限要素法(MC 有限要素法)を提案し，その精度評価を行った．片持ち梁モデル及び薄板モ

デルの解析では，従来の決定論的な有限要素法の解にばらつきが導入可能で，高い精度を示していることが確認できた．解は，理論解を中心にはばらつかず，理論解よりも堅い部分でばらついていた．これは，ガウス積分を用いた有限要素法と同様に，ロッキングが生じているためだと考えられる．また，ばらつきの傾向については，梁ではガウス積分を用いた場合の解を中心に，薄板ではそれよりも堅めにばらつくという結果となった．

内部空洞を有する固体モデルにおいても，極めて高い精度を得ることができ，モデル作成の観点からも MC 有限要素法が不均質な材料に対して優れた解析手法であることが考えられた．

なお，その評価方法については，ガウス積分を用いた有限要素法との比較やGUM評価を用いた「数学的不確かさ」に留まっており，「物理的不確かさ」については，現段階で研究を行っていない．しかしながら，本手法とボクセル有限要素法[20]や，イメージベースドモデリング手法[21]等の，実際の画像データを用いた手法を併用することで，「物理的不確かさ」を考慮できる可能性があると考えられる．また，本論文では基礎的な検討のみが行われたが，将来的には，実問題における精度も評価すべきである．これらのことについては，今後の課題としたい．

参考文献

1) 青木久，前門晃，松倉公憲：琉球石灰岩の一軸圧縮強度に与える寸法効果と岩石物性の影響，応用地質，pp.2-8，2005

2) Makoto Kiyosumi，Osamu Kusakabe，Masatoshi Ohuchi，and Fang Le Peng：Yielding Pressure of Spread Footing above Multiple Voids，jornal of geotechnical and geoenvironmental environmental，pp.1522-1531，2007.

3) 前寺由貴，日下部治，清住真，大内正敏，高橋通夫，江藤政継：空洞を有する硬質地盤の二次元支持力模型実験，第 20 回沖縄地盤工学研究発表会，pp.53-56，2007.

4) 国土交通相道路局：長寿命化修繕計画策定事業費補助制度要綱，2007

5) 尾崎弘明，室谷浩平，松原仁，矢川元基：3 次元亀裂進展シミュレーションの自動化，計算力学講演会講演論文集，pp.181-182，2006

6) O.C ツィエンキーヴィッツ，R,L テイラー(矢川元基訳):マトリックス有限要素法 I，科学技術出版，1996

7) 寺田賢二郎，菊池昇：均質化法入門，丸善，2003

8) K. Hukushima and K. Nemoto : Exchange Monte Carlo Method and Application to Spin Glass Simulations, J. Phys. Soc. Jpn., 65, pp.1604-1611, 1996

9) 中桐滋：確率有限要素法，応用数理，pp.131-143，1992

10) 中桐滋：確率有限要素法とは何か，日本機械学會誌 92(847), 526-530, 1989

11) 松原仁，伊良波繁雄，富山潤，山城建樹，：高精度 3 次元フリーメッシュ法(回転自由度を有する四面体要素を用いたフリーメッシュ法)，土木学会論文集，Vol766／I-68，pp. 97-101，2004

12) Rong Tian，Hitoshi Matsubara and Genki Yagawa，Advanced 4-node tetrahedrons，international jornal for numerical methods in engineering，pp.1209-1231，2006

13) 鷲津久一郎，宮本博，山田嘉明，山本善之，川井忠彦：有限要素法ハンドブック I 基礎編，培風館，1981

14) Rong Tian and Genki Yagawa，Generalized nodes and high-performance elements，international jornal for numerical methods in engineering，pp.2039-2071，2005

15) S. チモシェンコ：材料力学（上），東京図書，1956.

16) 津田孝夫：モンテカルロ法とシミュレーション，培風館，1977

17) 山田和夫：基礎からの C，SoftBankCreative，2008

18) 榎原研正：不確かさ評価入門，2007

19) 関谷壮，斉藤渥：薄板構造力学，共立出版，1968

20) 鈴木克幸，ほか：ボクセル被覆による 3 次元ソリッドのメッシュレス解析，土木学会応力学論文集，Vol.11，No.1，pp.29-38，2000

21) 佐藤洋一：イメージベースド・モデリング / レタリング，日本機械学會誌，102(971)，611-615，1999

（2010 年 3 月 9 日　受付）