

き裂の不安定成長問題への X-FEM の適用

An Application of X-FEM to the unstable crack growth

沖中知雄*

Tomoo OKINAKA

*正会員 Ph.D. 近畿大学 理工学部社会環境工学科 (〒 577-8502 東大阪市小若江 3-4-1)

A numerical algorithm to simulate the unstable crack growth under quasi-static loading condition is proposed in this work. Proposed algorithm consists of three factors: modification of X-FEM to the dynamic problem, evaluation of the dynamic J-integral around the unstably growing crack tip, and the determination of crack growing rate based on the evaluated dynamic J-value. The proposed algorithm is applied to the unstable crack growth in rectangle specimen under the quasi-static three-point bending test. The accuracy is discussed through the comparison of the fringe patterns, the crack length and the crack growing rate with ones which are experimentally captured by the ultra-high speed camera with the frame rate of 1Mfps. As a result, it is shown that the proposed algorithm has a sufficient accuracy.

Key Words : unstable crack growth, X-FEM, dynamic J integral

1. はじめに

準静的な载荷下でのき裂の進展問題は固体の破壊現象を考える上で重要な問題であり、既に多くの解析的研究がなされている。解析手法として、メッシュ再生成法¹⁾、接合要素法^{2),3),4)}、移動有限要素法^{5),6),7)}等の手法が提案され、き裂の進展解析に適用されている。しかしながら、これらの手法では予めき裂の進展経路上に二重節点や接合要素を配置したり、き裂の進展に応じて節点や要素を再配置する必要があり、効率的なき裂進展解析の妨げとなってきた。

一方、X-FEM^{8),9),10)}はき裂を含む連続体中の変位場を、不連続面に起因する変位の不連続性を表現する基底関数と、き裂先端部近傍の変位場を表現する基底関数の重ね合わせで表現する。そのため、き裂の進展解析に際してき裂の成長に合わせてメッシュを再生成したり移動させたりする必要がない。またき裂進展経路、進展量をメッシュに依存せずに決定できるため効率的なき裂進展解析が可能である。き裂の進展解析は対象とするき裂の進展速度によって準静的な安定成長問題と動的な不安定成長（不安定破壊）問題に大別できるが、特に動的なき裂の不安定成長の解析に際してはき裂の進展量が増分計算の安定性に大きく影響する。そのため、き裂を要素内で進展させることができ、従って進展量をメッシュサイズに依存せずに決定できる X-FEM は不安定成長の解析に適しているといえる。

沖中¹¹⁾は X-FEM を 2 次元動的問題に拡張し、モード I き裂の不安定成長問題に適用した。解析結果は実験により得られた画像解析結果と比較され、両者は良好に一致することが示された。この結果から、動的な

き裂の不安定成長の問題への X-FEM の拡張の妥当性が示された。しかしながら、き裂の不安定成長の解析において重要な問題となるき裂の進展経路、進展量については十分な議論がなされていない。沖中の解析では、き裂の進展経路、進展量として実験により計測された結果を参照しており、解析結果からき裂進展量を決定するには至っていないためである。

そこで本研究では、不安定成長中のき裂の動的 J 積分を求め、求められた J 積分値からき裂の進展量を決定してき裂の不安定成長を解析することを試みる。本研究ではまず、X-FEM の 2 次元動的問題への拡張について記述し、実験により求められたき裂計測結果を用いてき裂進展量を決定した解析結果を示す。これにより、X-FEM を 2 次元動的問題に拡張することの妥当性を示す。次に、不安定成長中のモード I き裂周りの動的 J 積分を求め、き裂の進展速度と動的 J 積分値の関係について検討を加える。最後に動的 J 積分値からき裂進展速度を決定し、モード I き裂の不安定成長の解析を行うことを試みる。解析結果は実験により画像計測された供試体中の主応力差分布、き裂進展量、き裂進展速度と比較され、解析精度が検討される。

2. き裂進展の動的解析手法の定式化

本研究では X-FEM を 2 次元の動的問題に拡張する。X-FEM では、き裂を含む連続体中の変位場を

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^m \phi_I(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}}_I + \sum_{I \in C} \phi_I(\mathbf{x}) \sum_{k=1}^4 \gamma_k(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{a}}_I^k + \sum_{I \in J} \phi_I(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{b}}_I \quad (1)$$

として近似する．ここで ϕ_I は通常有限要素法で用いられる形状関数， γ_k はき裂先端近傍の変位場の漸近解を表す基底関数， H はき裂面での不連続性を表現するヘビサイド関数であり， m は要素を構成する節点数， C はき裂先端部近傍で変位の漸近解の特性を考慮する節点の集合， J はき裂面による不連続性を考慮する節点の集合である．き裂先端近傍の変位場の漸近解を表す基底関数 γ_k は

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \\ \gamma_2 &= \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \\ \gamma_3 &= \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \\ \gamma_4 &= \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta\end{aligned}\quad (2)$$

として与えられる．ここで r はき裂先端からの距離， θ はき裂延長方向となす角度である．

式 (1) を変形し，

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^m \phi_I(\mathbf{x}) \psi_I(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{d}}_I \quad (3)$$

と置く．ここで

$$\hat{\mathbf{d}}_I = \begin{cases} \{(\hat{\mathbf{u}}_I)_1, (\hat{\mathbf{u}}_I)_2\}^T & I \notin C, J \\ \{(\hat{\mathbf{u}}_I)_1, (\hat{\mathbf{u}}_I)_2, (\hat{\mathbf{a}}_I^1)_1, (\hat{\mathbf{a}}_I^1)_2, \\ (\hat{\mathbf{a}}_I^2)_1, (\hat{\mathbf{a}}_I^2)_2, (\hat{\mathbf{a}}_I^3)_1, \\ (\hat{\mathbf{a}}_I^3)_2, (\hat{\mathbf{a}}_I^4)_1, (\hat{\mathbf{a}}_I^4)_2\}^T & I \in C \\ \{(\hat{\mathbf{u}}_I)_1, (\hat{\mathbf{u}}_I)_2, (\hat{\mathbf{b}}_I)_1, (\hat{\mathbf{b}}_I)_2\}^T & I \in J \end{cases}$$

$$\psi_I(\mathbf{x}) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & I \notin C, J \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_2 & 0 & \gamma_3 \\ 0 & 1 & 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_2 & 0 \\ & & 0 & \gamma_4 & 0 & & \\ & & \gamma_3 & 0 & \gamma_4 & & \end{bmatrix} & I \in C \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & H & 0 \\ 0 & 1 & 0 & H \end{bmatrix} & I \in J \end{cases}$$

である．

速度場と加速度場は式 (3) を時間微分することによって得られ，

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^m \phi_I(\mathbf{x}) \dot{\psi}_I(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{d}}_I + \sum_{I=1}^m \phi_I(\mathbf{x}) \psi_I(\mathbf{x}) \dot{\hat{\mathbf{d}}}_I \quad (4)$$

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) &= \sum_{I=1}^m \phi_I(\mathbf{x}) \ddot{\psi}_I(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{d}}_I + 2 \sum_{I=1}^m \phi_I(\mathbf{x}) \dot{\psi}_I(\mathbf{x}) \dot{\hat{\mathbf{d}}}_I \\ &\quad + \sum_{I=1}^m \phi_I(\mathbf{x}) \psi_I(\mathbf{x}) \ddot{\hat{\mathbf{d}}}_I\end{aligned}\quad (5)$$

となる．

動的問題の釣り合い方程式

$$\begin{aligned}\int_V \delta \mathbf{u} \rho \ddot{\mathbf{u}} dV + \int_V \delta \varepsilon \sigma dV \\ = \int_V \delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{F}} dV + \int_{S_\sigma} \delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{T}} dS\end{aligned}\quad (6)$$

に，式 (3)，(4)，(5) を代入することにより，

$$\mathbf{M}_0 \ddot{\hat{\mathbf{d}}} + 2\mathbf{M}_1 \dot{\hat{\mathbf{d}}} + (\mathbf{M}_2 + \mathbf{K}) \hat{\mathbf{d}} = \mathbf{F} \quad (7)$$

が得られる．ここで $\mathbf{K}$ は FEM で通常用いられる全体剛性行列であり，

$$\mathbf{M}_0 = \sum_e \int_{V_e} \Psi^T \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} \Psi dV_e \quad (8)$$

$$\mathbf{M}_1 = \sum_e \int_{V_e} \Psi^T \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} \dot{\Psi} dV_e \quad (9)$$

$$\mathbf{M}_2 = \sum_e \int_{V_e} \Psi^T \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} \ddot{\Psi} dV_e \quad (10)$$

$\mathbf{N}$ ， Ψ は各々 ϕ と ψ を要素を構成する節点群毎に行列の形に整理したものである．本研究ではここに減衰項を加え，

$$\mathbf{M}_0 \ddot{\hat{\mathbf{d}}} + 2\mathbf{M}_1 \dot{\hat{\mathbf{d}}} + \mathbf{C} \dot{\hat{\mathbf{d}}} + (\mathbf{M}_2 + \mathbf{K}) \hat{\mathbf{d}} = \mathbf{F} \quad (11)$$

として解析を行った．減衰マトリックスにはレイリー型減衰を採用し，

$$\mathbf{C} = \alpha_0 \mathbf{M}_0 + \alpha_1 \mathbf{K} \quad (12)$$

を用いた．

式 (11) に Newmark-Beta 法を適用し，

$$\begin{aligned}\left\{ \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M}_0^{(n)} + \frac{\delta}{\beta \Delta t} (2\mathbf{M}_1^{(n)} + \mathbf{C}^{(n)}) + \mathbf{M}_2^{(n)} \right. \\ \left. + \mathbf{K}^{(n)} \right\} \hat{\mathbf{d}}^{(n)} = \mathbf{M}_0^{(n)} \left\{ -\left(1 - \frac{1}{2\beta}\right) \ddot{\hat{\mathbf{d}}}^{(n-1)} \right. \\ \left. + \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\hat{\mathbf{d}}}^{(n-1)} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \hat{\mathbf{d}}^{(n-1)} \right\} \\ + (2\mathbf{M}_1^{(n)} + \mathbf{C}^{(n)}) \left\{ \left(-1 + \frac{\delta}{2\beta}\right) \Delta t \ddot{\hat{\mathbf{d}}}^{(n-1)} \right. \\ \left. \left(-1 + \frac{\delta}{\beta}\right) \dot{\hat{\mathbf{d}}}^{(n-1)} + \frac{\delta}{\beta \Delta t} \hat{\mathbf{d}}^{(n-1)} \right\} - \mathbf{F}^{(n)}\end{aligned}\quad (13)$$

が得られる．ここで右肩の (n) は時刻 $t = t_n$ を表す．式 (13) を解くことにより， $\hat{\mathbf{d}}^{(n)}$ を逐次的に決定した．

3. き裂進展解析

3.1 解析モデル

モード I の破壊靱性試験として多く用いられる矩形供試体の 3 点曲げ試験の解析を行い，解析結果を実験結果と比較する．比較に用いられる実験は沖中¹¹⁾によ

表-1 解析に使用した材料定数

ヤング係数	2.69 GPa
ポアソン比	0.379
密度	$1.15 \times 10^3 \text{ kgf/m}^3$
光弾性係数	$9.3 \times 10^{-3} \text{ mm/N}$
供試体厚さ	6.5 mm

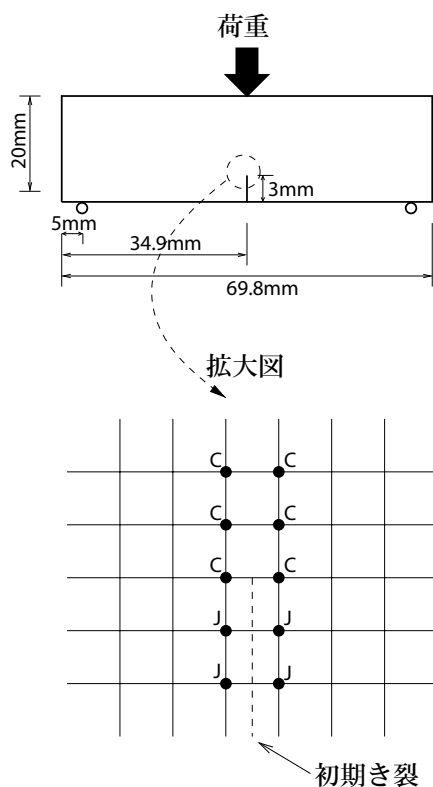


図-1 解析モデル図

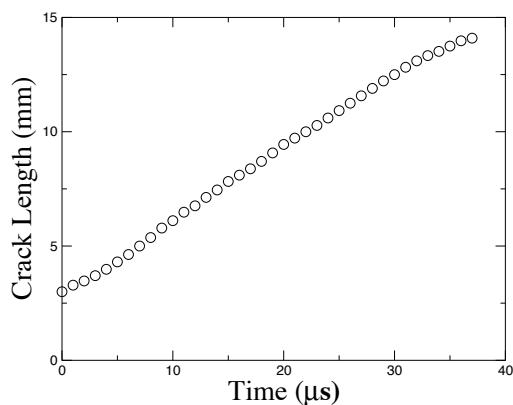


図-2 計測されたき裂長さの時間変化

り報告されたエポキシ樹脂製矩形供試体の準静的な3点曲げによるき裂の不安定成長実験である。供試体中の応力場は動的光弾性試験装置を用いて主応力差の干渉縞として可視化された。き裂の進展状況と可視化された応力分布は毎秒100万枚の撮影速度をもつ超高速度ビデオカメラにより、1 μs の時間間隔で画像計測されている。

解析に使用したモデルを図-1に示す。縦20mm、横69.8mmの矩形供試体を0.2mm刻みで分割し、35,350節点、34,900四角形要素の解析モデルを作成した。初

期き裂として、矩形供試体下辺中央部に長さ3mmの初期き裂を設定している。計算に使用した材料定数を表-1に示す。また減衰定数は解析結果と実験結果との比較から、 $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 3.33 \times 10^{-7}$ を採用した。

解析結果との比較に用いる実験では、供試体は変位制御の荷重装置によって荷重し、破壊荷重を計測している。そのため、先ず破壊荷重627.9Nを荷重境界条件として矩形供試体の上辺中央部を挟む2つの節点に与えた予備解析を行い、荷重点における節点変位を求めた。得られた荷重点の節点変位を変位境界条件として与え、供試体が変形した状態から変位境界条件一定の条件下でき裂を進展させ、き裂進展解析を行った。

3.2 実験結果からき裂進展量を決定した解析

本小節の解析では、実験により計測されたき裂長さからき裂先端位置の決定を行う。実験により得られたき裂長さの時間変化を図-2に示す。図-2に示された結果を内挿することにより、計算ステップ毎のき裂先端位置を決定し、き裂進展解析を行った。Newmark-Beta法の定数として $\delta = 0.5$, $\beta = 0.25$ を、時間増分として $\Delta t = 5.0 \times 10^{-8}$ 秒を採用し、解析条件は平面応力とした。

解析結果と実験結果の比較を図-3に示す。図中には、進展開始後0 μs , 5 μs , 10 μs , 15 μs , 20 μs での実験結果と解析結果を示している。なお、実験で画像計測された領域は供試体全体ではなく、高さが供試体下辺から16mmまで、幅は初期き裂を中心とした40.7mmである。解析は供試体全体について行っているが、実験結果との比較を容易にする目的で、実験により撮影された領域のみを切り出して図示している。

実験結果で示された供試体中の黒い縞は動的光弾性装置により主応力差の分布が干渉縞パターンとして可視化されたものである。実験結果の干渉縞パターンと比較するため、解析結果でも干渉縞を再現して示している。光弾性試験では局所的な輝度は

$$I = A_0 \sin^2 \{ \alpha t (\sigma_1 - \sigma_2) \} \quad (14)$$

として与えられる。ここで A_0 , α , t , σ_1 , σ_2 は各々輝度振幅、供試体の光弾性感度、供試体厚さ、最大主応力、最小主応力である。解析により得られた要素中心での最大、最小主応力を式(14)に代入し、要素中心での輝度を計算することにより干渉縞を再現して示している。

解析結果のき裂先端部近傍では干渉縞の間隔が要素幅より小さくなる。このため縞を形成できておらず、実験結果との比較が困難になっている。進展開始後10 μs までの範囲で図-3(a)と(b)、図-3(c)と(d)、図-3(e)と(f)を比較すると、干渉縞を形成している領域では、実験結果と解析結果では干渉縞の形状、縞次数ともによく一致している。15 μs における図-3(g)と(h)、20 μs

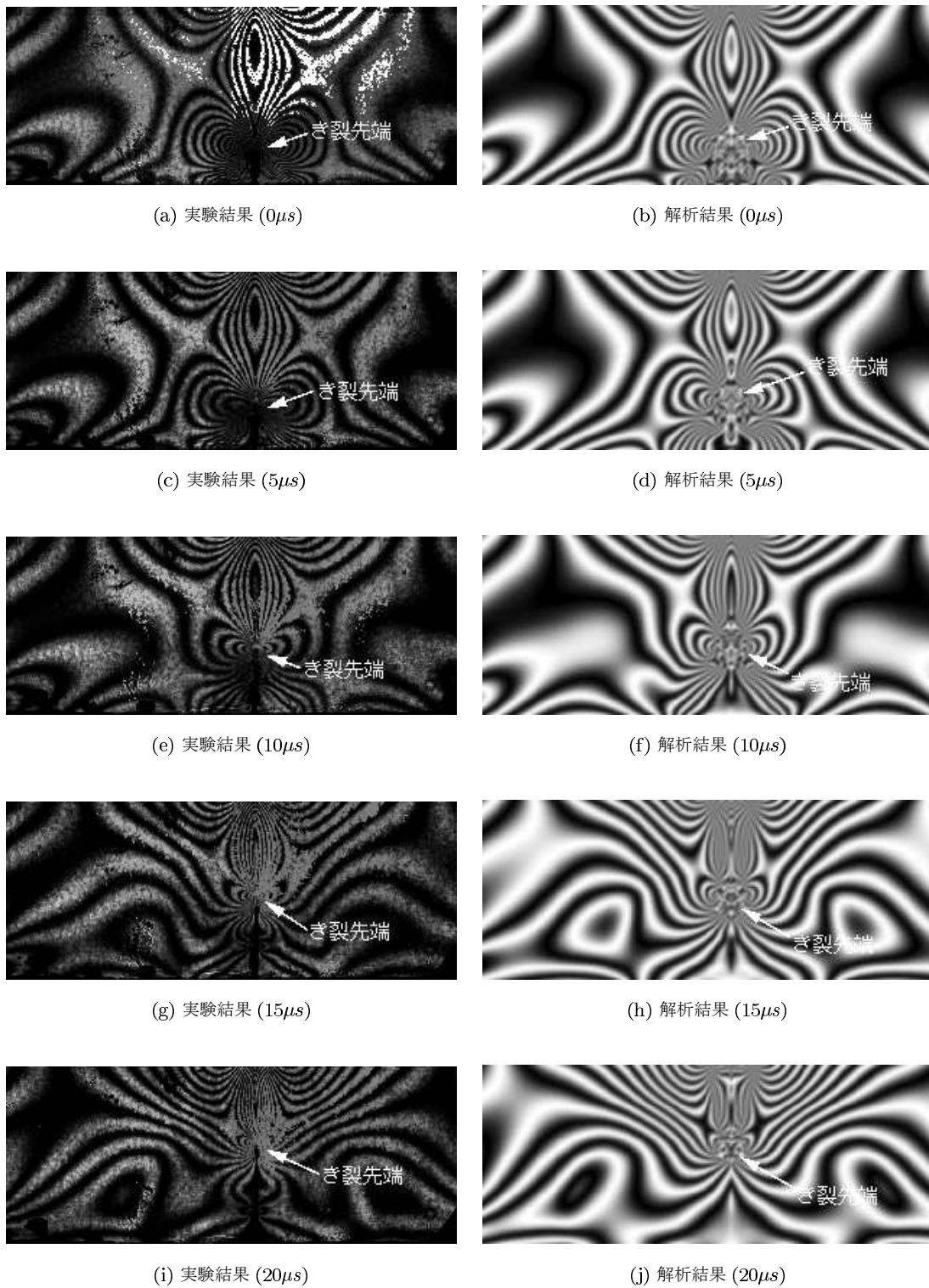


図-3 実験結果からき裂先端位置を決定した数値解析結果と実験結果の比較

での図-3(i) と (j) の比較では、き裂先端部近傍で解析結果は実験結果より縞次数が 1 次高い結果を示しており、き裂先端部近傍の応力を過大に評価している傾向が示された。しかしながら供試体全体の干渉縞形状は実験結果と解析結果で良好な一致を示しており、き裂

進展量を実験結果から決定した場合、動的に拡張された X-FEM は良好な解析精度を有しているといえる。

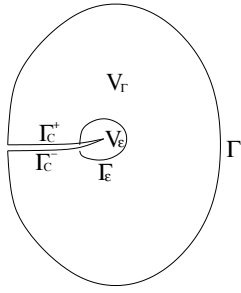


図-4 J 積分経路

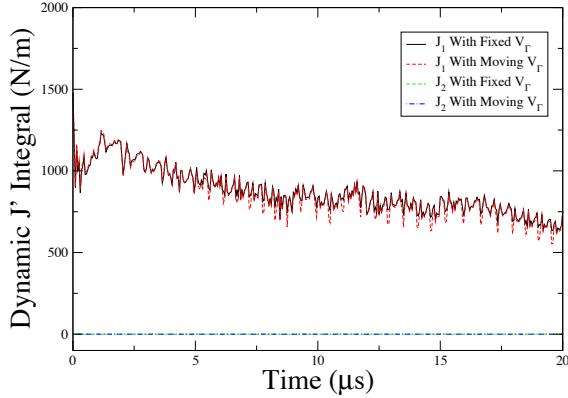


図-5 動的 J 積分値の時間変化

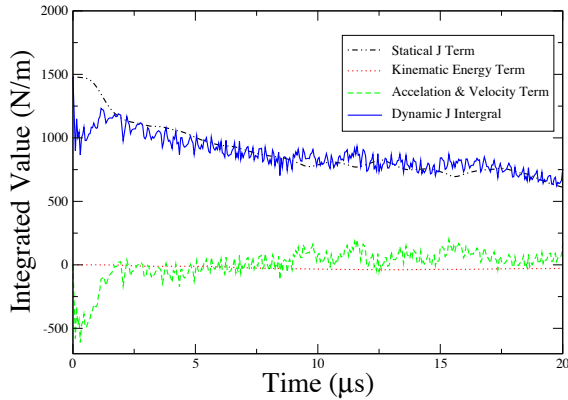


図-6 動的 J 積分各項の時間変化

3.3 き裂の動的 J 積分評価

不安定成長するき裂の破壊力学パラメーターとして、Nishioka 等¹²⁾、Nikishkov 等¹³⁾ によって経路独立な動的 J 積分が導出されており、

$$J'_k = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma + \Gamma_c} [(W + K)n_k - t_i u'_{i,k}] dS + \int_{V_r - V_\epsilon} [\rho \ddot{u}'_i u'_{i,k} - \rho \dot{u}'_i \dot{u}'_{i,k}] dV \right\} \quad (15)$$

として求められている。ここで W, K, t は各々ひずみエネルギー密度、運動エネルギー密度、表面力である。

また変位 u' はき裂先端に定義されたき裂座標方向の変位成分であり、 $(\cdot)_{,k} = \partial(\cdot)/\partial x'_k$ で表された空間に関する偏微分もき裂座標に関する微分となる。図-4 に示すように、 $\Gamma, \Gamma_c, \Gamma_\epsilon$ は各々遠方場、き裂面、近傍場経路であり、 Γ_ϵ に囲まれた領域と Γ と Γ_ϵ に囲まれた領域を各々 V_ϵ, V_r としている。

$\mathbf{x} \in V_r$ で 1、境界 Γ 上で 0 の値をとる滑らかな関数 s を用いて式 (15) に等価領域積分を適用すると、

$$J'_k = \int_{V_r} \{ \sigma'_{ij} u'_{i,k} - (W + K)s_{,k} + \rho \ddot{u}'_i u'_{i,k} s - \rho \dot{u}'_i \dot{u}'_{i,k} s \} dV \quad (16)$$

が得られることが Nikishkov 等¹³⁾ によって示されている。本研究では式 (16) を用いて不安定成長中のき裂周りの動的 J 積分を算定した。

前小節で示した、3 点曲げ試験の解析で得られた J'_1 と J'_2 を図-5 に示す。図中には V_r として固定領域と移動領域を設定した 2 つのケースを示している。固定領域としては初期き裂から解析終了時のき裂までをを包含するように、き裂を含む幅 9.6mm、高さ 3.8mm の矩形領域を設定し、移動領域としてはき裂先端を中心とした半径 7.5 要素、1.5mm の円形領域を設定している。2 つの積分領域での計算結果はよく一致しており、積分領域を移動させたことによる影響は見られなかった。また、 J'_1 には振動がみられるが、これは式 (16) 中の加速度と速度の貢献項が振動しているためである。加速度と速度の項の振動の原因として二つの要因が考えられる。一つは、本解析では式 (13) で得られた変位から節点速度と節点加速度を各々

$$\dot{\mathbf{d}}_I^{(n)} = \left(1 - \frac{\delta}{2\beta}\right) \Delta t \ddot{\mathbf{d}}_I^{(n-1)} + \left(1 - \frac{\delta}{\beta}\right) \dot{\mathbf{d}}_I^{(n-1)} + \frac{\delta}{\beta \Delta t} (\dot{\mathbf{d}}_I^{(n)} - \dot{\mathbf{d}}_I^{(n-1)}) \quad (17)$$

$$\ddot{\mathbf{d}}_I^{(n)} = \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right) \ddot{\mathbf{d}}_I^{(n-1)} - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{d}}_I^{(n-1)} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\dot{\mathbf{d}}_I^{(n)} - \dot{\mathbf{d}}_I^{(n-1)}) \quad (18)$$

として決定していることによる影響である。本解析では時間増分として 5.0×10^{-8} 秒を採用しているが、時間増分が小さいため、変位項の誤差の影響が速度項と加速度項で強く反映されていることが考えられる。他の一つは、き裂の進展が離散的に表現されていることの影響である。き裂は連続的に成長するが、本解析では時間ステップ毎にき裂を離散的に進展させている。このためき裂先端部分で解放されるエネルギーが時間増分毎に波動として解析モデル中を伝播していることが考えられる。以上の要因については、より一層の検討が必要であり、今後の課題である。

図-5 に示された J'_1 積分の値はき裂進展開始直後に値を低下させる。その後動的 J'_1 積分の値は一旦増加するが、き裂の進展に伴って徐々に減少していく傾向が

みられた．また，本解析で対象としているき裂はモードⅠで進展するき裂であるため， J_2' の値は解析全体を通してほぼ0となっている．

動的 J_1' 積分の時間変化をより詳細に検討する目的で，式 (16) に示された静的な J 積分項 $\int_{V_T} \sigma'_{ij} u'_{i,k} - W s_{,k} dV$ ，運動エネルギー項 $\int_{V_T} -K s_{,k} dV$ ，加速度・速度の貢献項 $\int_{V_T} \rho \ddot{u}'_i u'_{i,k} s - \rho \dot{u}'_i \dot{u}'_{i,k} s dV$ について，時間変化を図-6 に示す．動的な J_1' 積分はき裂進展開始直後に値を低下させるが，この時間域で静的な J 積分項は 1,400N/m 前後の高い値を保っている．この時間域で加速度・速度の貢献項は負の値をとり，き裂進展開始直後にき裂先端部から供試体に向けてエネルギーが流出していることを示している．このために動的 J 積分の値が低下している．流出するエネルギーが減少するにつれて動的な J_1' 積分は増大し，き裂進展開始後 1.5 μ s 付近でき裂からのエネルギーの流失がほぼ消失すると共に静的な J 積分項も漸減に移行する．以降は静的な J 積分項が動的 J 積分の主成分となり，き裂の進展に伴って解放されるエネルギーとき裂進展に消費されるエネルギーのバランスが回復したと考えられる．

3.4 動的 J 積分値からき裂進展量を決定した解析

本小節ではタイムステップ毎の解析結果から次のタイムステップでのき裂の進展量を決定することにより，逐次的にき裂の不安定成長の解析を行う．

き裂進展量を決定する破壊力学パラメーターとして動的 J 積分を採用することを試みる．動的 J 積分値はき裂の進展に伴って解放されるエネルギー量であり，解放されるエネルギーの一部が新たなき裂面の生成に消費されることから，動的 J 積分とき裂進展速度の間に相関関係のあることが期待されるためである．前節で実施した解析により得られた動的 J 積分値とき裂進展速度 (v) をき裂長さ (L) で除した値 v/L の比較を図-7 に示す．図-7 に示された結果はバラつきが大きいですが，全体

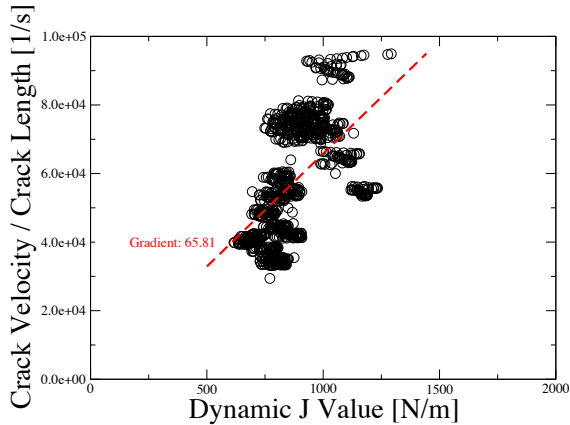


図-7 動的 J 積分値と v/L の関係

として正の相関が認められる．そこで本研究では線形近似を採用し，時間ステップ $t^{(n-1)}$ におけるき裂進展速度 $v^{(n-1)}$ をき裂長さ $L^{(n-1)}$ と動的 J 積分値 $J^{(n-1)}$ を用いて

$$v^{(n-1)} = \alpha L^{(n-1)} J^{(n-1)} \quad (19)$$

として求め，時間ステップ $t^{(n)}$ におけるき裂長さを

$$L^{(n)} = L^{(n-1)} + v^{(n-1)} \Delta t \quad (20)$$

として決定した．係数 α は図-7 に示された結果に最小 2 乗近似を適用し， $\alpha = 65.81$ としている．式 (9)，(10) 中の $\dot{\Psi}$ ， $\ddot{\Psi}$ に含まれるき裂先端からの距離 r とき裂延長方向からの角度 θ の一階，二階微分を各々

$$\dot{r} = \frac{1}{2\Delta t} (r^{(n+1)} - r^{(n-1)}) \quad (21)$$

$$\ddot{r} = \frac{1}{\Delta t^2} (r^{(n+1)} - 2r^{(n)} + r^{(n-1)}) \quad (22)$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{2\Delta t} (\theta^{(n+1)} - \theta^{(n-1)}) \quad (23)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{\Delta t^2} (\theta^{(n+1)} - 2\theta^{(n)} + \theta^{(n-1)}) \quad (24)$$

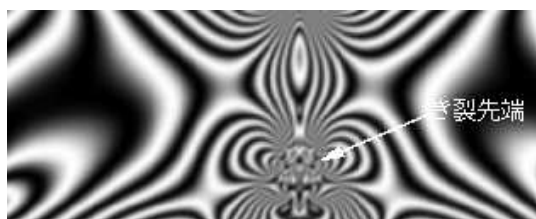
として決定しているため，時間ステップ $t^{(n)}$ の計算を行うためには時間ステップ $t^{(n+1)}$ でのき裂先端位置が必要となる．このため，き裂進展速度が一定であるとしてき裂長さ

$$L^{(n+1)} = L^{(n-1)} + 2v^{(n-1)} \Delta t \quad (25)$$

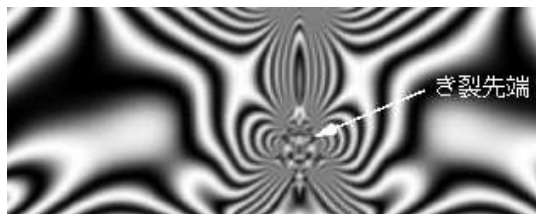
を求め，解析を行っている．時間ステップ $t^{(n+1)}$ でのき裂長さ $L^{(n+1)}$ の値は，時間ステップ $t^{(n)}$ の計算終了後に新たに求められた $J^{(n)}$ の値を用いて更新される．

20 μ 秒まで行った解析結果から，5，10，15，20 μ s での解析結果を図-8 に示す．図中には解析により求められた要素中心での最大・最小主応力から計算された干渉縞パターンを示している．解析は供試体全体について行っているが，図-3 に示した実験結果との比較を容易にする目的で，実験により画像計測された領域に対応する高さが供試体下辺から 16mm の高さまで，幅が初期き裂を中心とした 40.7mm 幅の領域を図-8 中に示している．時刻 5 μ s で実験結果図-3(c) と解析結果図-8(a) の干渉縞形状を比較すると，解析結果ではき裂先端部左右に広がる干渉縞の縦横比が実験結果と解析結果で異なっており，解析結果と実験結果のかい離を示している．しかしながら縞次数の比較では，実験結果と解析結果で縞次数が一致しており，主応力差の絶対値は一致していることが分かる．時刻 10，15，20 μ s で各々図-3(e) と図-8(b)，図-3(g) と図-8(c)，図-3(i) と図-8(d) を比較すると，き裂後方の応力場で実験結果と解析結果のかい離がみられるものの，き裂先端部近傍では干渉縞の縞次数，形状共によく一致しており，主応力差の分布は実測データと良好な一致を示しているといえる．

解析によって得られた動的 J 積分値から決定されたき裂長さの変化とき裂進展速度を各々図-9，図-10 に示す．各々の図中には実験により計測されたき裂長さ



(a) 解析結果 (5 μ s)



(b) 解析結果 (10 μ s)



(c) 解析結果 (15 μ s)



(d) 解析結果 (20 μ s)

図-8 解析からき裂先端位置を決定した数値解析結果

き裂長さの変化から求められたき裂進展速度を併記している。図-10 中でき裂進展速度に振動が発生している。これは 3.3 節で検討したように、動的 J 積分値に振動が発生しているため、得られたき裂進展速度にも振動が生じるものである。特にき裂進展速度を式 (19) により決定しているため、き裂長さが長くなるにつれて振動の振幅も大きくなっている。また、5 μ s までの領域で、実験結果ではき裂進展速度が低下し、その後急速に増大していく様子が観察されるが、解析結果ではき裂進展速度の低下と急速な増大は認められない。このことが 5 μ s における主応力差の干渉縞分布の比較で

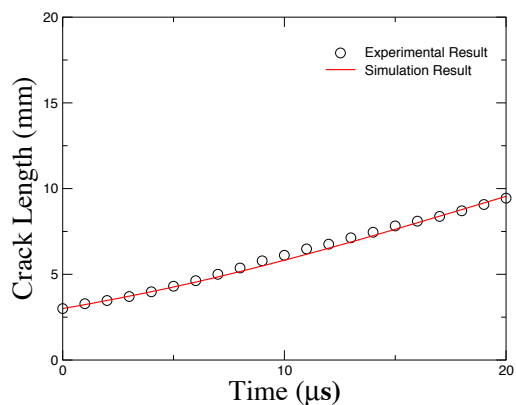


図-9 き裂長さ

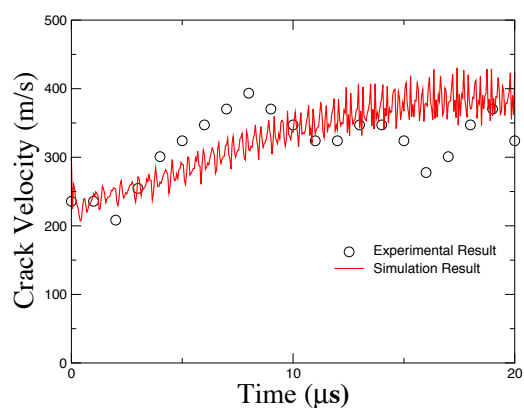


図-10 き裂進展速度

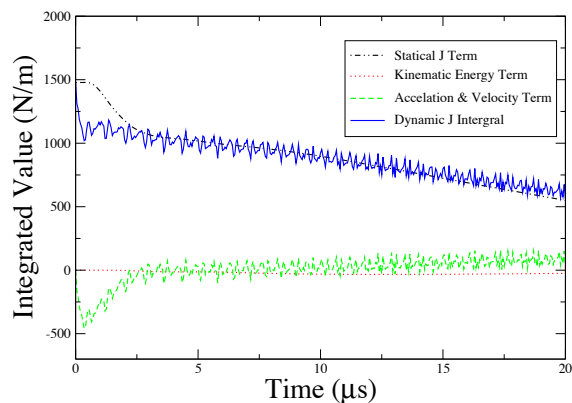


図-11 動的 J 積分の時間変化

実験結果と解析結果のかい離をもたらししていると考えられる。しかしながら、5 μ s 以降に速度がほぼ一定速度に収束していく傾向は実験値と理論値でよく一致している。このことから、動的 J 積分から決定したき裂進展量を用いた解析手法は、き裂進展開始初期に問題を残すものの全体的には十分な精度をもつものであることが示された。

解析によって得られた動的 J 積分の時間変化を図-11に示す。図中には静的な J 積分項、運動エネルギー項、加速度・速度の貢献項とこれらを合計した動的 J 積分の値を示している。図-6 に示された実験結果からき裂進展量を決定した解析結果と同様に、動的 J 積分値はき裂進展開始直後に値を低下させる。これは加速度・速度の貢献項が負の値をとることから示されるように、き裂進展開始直後にエネルギーがき裂先端から供試体へ流出しているためである。加速度・速度の貢献項は静的な J 積分項が低下するとともに小さくなり、 $2.5\mu\text{s}$ で正の値に転じる。その後はほぼ一定の値を保ち、供試体からき裂先端に向けて一定のエネルギーが流入している。このことから、解析により安定したき裂の成長を再現できていると考えられる。

4. まとめ

本研究では、2次元の動的問題に拡張された X-FEM を用いてモード I き裂の不安定成長の解析が示された。不安定成長するき裂周りの動的 J 積分が検討され、き裂の進展量を動的 J 積分から決定する解析手法が提案された。提案された解析手法は準静的な 3 点曲げ試験により矩形供試体中で不安定成長するモード I き裂の進展解析に適用され、解析結果が示された。解析結果は供試体中の主応力差分布、き裂長さ、き裂進展速度を用いて実験により画像計測された結果と比較され、提案された解析手法がき裂の成長開始直後を除いて良好な解析精度をもつことが示された。

参考文献

- 1) Wawrzynek, P.A. and Ingraffea, A.R.: An Interactive Approach to Local Remeshing Around a Propagation Crack, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol.5, pp.87-96, 1989.
- 2) Hoff, R., Rubin, C.A. and Hahn, G.T.: Viscoplastic Finite Element Analysis of Rapid Fracture, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.26, pp.445-461, 1987.
- 3) Kannan, K.S., Kumar, R.K. and Prabhakar, O.: Finite Element Crack Growth Algorithm for Dynamics Fracture, *Computational Mechanics*, Vol.12, pp.349-359, 1993.
- 4) Ramakrishnan, C.V., Owen, D.R. and Zienkiewicz, O.C.: A Viscoplastic Constitutive Model for Dynamic Fracture, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.23, pp.145-157, 1986.
- 5) Nishioka, T., Stonesifer, R.B. and Atluri, S.N.: An Evaluation of Several Moving Singularity Finite Element Models for Fast Fracture Analysis, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.15, pp.205-218, 1981.
- 6) Nishioka, T. and Atluri, S.N.: Numerical Modeling of Dynamic Crack Propagation in Finite Bodies, by moving Singular Elements Part1:Formulation, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.47, pp.570-576, 1980.
- 7) Nishioka, T. and Atluri, S.N.: Numerical Modeling of Dynamic Crack Propagation in Finite Bodies, by moving Singular Elements Part2:Results, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.47, pp.577-582, 1980.
- 8) Belytschko, T. and Black, T.: Elastic Crack Growth in Finite Elements with Minimal Remeshing, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol.40, pp.1483-1504, 1999.
- 9) Moes, N., Dolbow, J. and Belytschko, T.: A Finite Element Method for Crack Growth without Remeshing, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol.46, pp.131-150, 1999.
- 10) Budyn, E., Zi, G., Moes, N. and Belytschko, T.: A Method for Multiple Crack Growth in Brittle Materials without Remeshing, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol.61, pp.1741-1770, 2004.
- 11) 沖中 知雄: 準静的载荷下でのき裂の不安定成長の実験と数値解析による検討, 日本機械学会論文集, Vol.75 A, pp.1193-1201, 2009.
- 12) Nishioka, T. and Atluri, S.N.: Path-Independent Integrals, Energy Release Rates, and General Solutions of Near-Tip Fields in Mixed-Mode Dynamic Fracture Mechanics, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.18, pp.1-22, 1983.
- 13) Nikishkov, G.P. and Atluri, S.N.: Calculation of Fracture Mechanics Parameters for an Arbitrary Three-Dimensional Crack, by the 'Equivalent Domain Integral' Method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.24, pp.1801-1821, 1987.

(2010 年 3 月 9 日 受付)