応用力学論文集 Vol.13, pp.123-131　(2010 年 8 月)　土木学会

ハイブリッド型仮想仕事の原理による RBSM 平板要素の要素内モーメント

On moment in element of thin plate element of RBSM by using principle of hybrid-type virtual work

田尻　康之*・山村　和人**・竹内　則雄***
Yasuyuki Tajiri, Kazuto Yamamura and Norio Takeuchi

*工修 法政大学大学院　システムデザイン研究科（〒162-0843 東京都新宿区市谷田町 2-33）
**工修　新日本製鐵株式会社　環境・プロセス研究開発センター（〒293-8511 千葉県富津市新富 20-1）
***正会員 工博 法政大学教授 理工学部機械工学科（〒184-8584 東京都小金井市梶野町 3-7-2）

The analysis of the thin plate bending problem is possible for the plate bending element of RBSM in spite of the only 3 degrees of freedom. The discrete limit analysis of brittle materials is easily possible. However, since the rigid-body displacement field is assumed, the moment distribution in the element is uncomputable. On the other hand, using the principle of hybrid type virtual work, the authors are applying the Kirchhoff-Love's theory to the secondary displacement field, and developed the plate bending element by the hybrid type penalty method (HPM) in consideration of the deformation in the element. In this paper, it applied the rigid-body displacement field to the displacement field of the HPM, and proposed the computing method for the moment in the element in RBSM approximately. Some examples of the numerical computation discussed the accuracy of the solution. As a result, the moment in the element of high accuracy was obtained.

Key Words: *RBSM, HPM, Plate bending, moment distribution*
キーワード：RBSM，HPM，板曲げ，モーメント分布

1．はじめに

川井によって開発された剛体ばねモデル（RBSM : Rigid Bodies-Spring Model)は一般化された離散化極限解析用のモデルで，要素を剛体と仮定し，要素境界面上に設けたばねを用いて，要素内の仕事のかわりに表面力のエネルギーを評価する方法である [1]．著者らは，コンクリート板などの離散化極限解析用モデルとして，一般的な RBSM に薄板の仮定を設定し，RBSM の板曲げ要素を開発した [2) 3)]．このモデルは，z 方向のたわみと，x-y 平面内の剛体回転の 3 つを自由度とするきわめてシンプルな要素で，2 次元，3 次元の RBSM と同様，要素間に設けられたせん断，曲げ，ねじりの 3 つの変形に抵抗するばねに蓄えられるエネルギーを元に離散化解析をおこなう．したがって，従来の RBSM と同様に，例えば曲げばねを 0 にするなど，ばねに非線形特性を持たせれば，1 要素 3 自由度という少ない自由度で容易に板曲げ問題の離散化極限解析が可能となる [2)]．

しかし，RBSM は極限荷重や崩壊モードを効率よく求められるが，要素を剛体と仮定しているため，要素内のモーメント分布などの情報は得られない．一方，著者らは，ハイブリッド型仮想仕事の原理 [4)] を元に，不連続 Galerkin (dG : discontinuous Galerkin) 法 [5)6)] における interior penalty (IP) FEM [7)] と同様に，部分領域境界において，法線方向の導関数におけるジャンプをペナルティ関数により拘束し C^1 連続性を弱く課する，ハイブリッド型ペナルティ法 (HPM : Hybrid-type Penalty Method) を開発した [8)9)]．さらに，著者らは，2 次元，3 次元の一般的な固体力学に対する展開において，HPM の変位場を剛体とすることで，RBSM と HPM の関係を説明し，RBSM により求まった解から，要素毎に要素内の応力状態を推測する方法を提案した [10)]．

このような，HPM と RBSM の関係を用いれば，様々な薄板の仮定が含まれた板曲げ問題に対しても同様な展開が可能のはずである．そこで，本論文では，RBSM による板曲げ解析において，要素内のモーメント分布といった直接的には求められない情報を提供することで，解析結果の評価に貢献することを目的として，

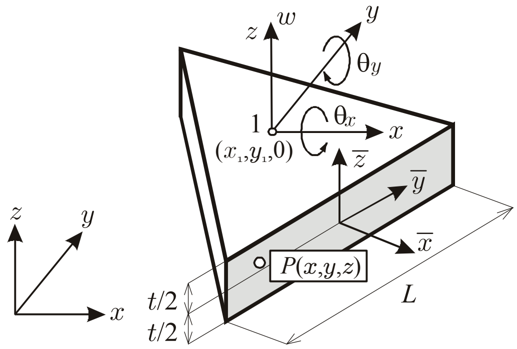
1）HPM の板曲げモデル [11)] と RBSM の板曲げ要素 [2)] の関係
2）RBSM の要素内モーメントの求め方

について述べる．さらに，得られる要素内モーメントの精度をいくつかの数値計算例から検証する．なお，本手法は RBSM の結果を利用しており，本手法の解の精度は RBSM の解の精度に依存するため，併せて，RBSM の解の精度についても説明を加える．

2. RBSM と HPM の板曲げモデル

2.1 RBSM の板曲げ要素

面外荷重が作用する RBSM の平板要素 (e) における剛体変位場 $\boldsymbol{u}^{(e)}$ は，**図－1**に示すように，z 軸方向のたわみ(w)と x 軸，y 軸回りの剛体回転角 (θ_x , θ_y) によって以下のように表す.



図－1　RBSM の面外変形平面要素

$$\boldsymbol{u}^{(e)} = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{N}_{z_d}^{(e)}\boldsymbol{d}_z^{(e)} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{d}_z^{(e)} = \lfloor w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1} \rfloor^t$$

$$\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} Z & 0 & 0 \\ 0 & Z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{N}_{z_d}^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & Y & -X \end{bmatrix}$$

$$X = x - x_1 \ , \ Y = y - y_1 \ , \ Z = z - z_1 = z$$

いま，式(1)を要素境界辺 <s> における局所座標系 $\overline{\boldsymbol{x}} = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ の成分$\overline{\boldsymbol{u}}^{(e)}$に変換すれば,

$$\overline{\boldsymbol{u}}_{<s>}^{(e)} = \boldsymbol{R}_{<s>}^{(e)}\boldsymbol{u}^{(e)} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{R}_{<s>}^{(e)} = \begin{bmatrix} l_{<s>}^{(e)} & m_{<s>}^{(e)} & 0 \\ -m_{<s>}^{(e)} & l_{<s>}^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となる．ここで，$l_{<s>}^{(e)}, m_{<s>}^{(e)}$ は要素(e)の辺<s>における方向余弦である．具体的に式(1)を式(2)の変換行列用いて変換すると次のように表すことができる.

$$\overline{\boldsymbol{u}}_{<s>}^{(e)} = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{\theta}_{n<s>} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\theta}_{n<s>} = \lfloor \theta_{\overline{x}}, \theta_{\overline{y}}, w \rfloor^t$$

ここで, $\boldsymbol{\theta}_{n<s>}$ は要素境界辺上の局所座標系 $\overline{\boldsymbol{x}}$ に対するねじり，曲げ，せん断方向の変位を意味している.

RBSM では, 式(2)で表される変位を用いて，隣接する 2 要素間のねじり, 曲げ, せん断に関する相対変位を計算し, それに抵抗するばねを設けてばね剛性行列を作成する．いま，局所座標系に沿った相対変位を $\boldsymbol{\delta}$ ，ねじり，曲げ，せん断に関する相対変位を $\delta\boldsymbol{\theta}$ とすれば，式(3)より

$$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{Z}\delta\boldsymbol{\theta} \tag{4}$$

なる関係がある.

一方，RBSM では，相対変位 $\boldsymbol{\delta}$ と単位面積当たりの表面力 $\boldsymbol{t}$ の間に次の関係を仮定している.

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{k}\boldsymbol{\delta} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} k_s & 0 & 0 \\ 0 & k_n & 0 \\ 0 & 0 & k_s \end{bmatrix}$$

$$k_n = \frac{E}{(1-\nu^2)h} \ , \ k_s = \frac{E}{(1+\nu)h}$$

ここで，E は弾性係数，ν はポアソン比，h は各要素図心から要素境界辺に下した垂線の高さの和である．したがって，要素境界辺上 <s> のエネルギーは

$$V = \int_{\Gamma_{<s>}} (\boldsymbol{\delta}^t\boldsymbol{k}\boldsymbol{\delta})d\Gamma = \delta\boldsymbol{\theta}^t \int_{\Gamma_{<s>}} (\boldsymbol{Z}^t\boldsymbol{k}\boldsymbol{Z})d\Gamma\delta\boldsymbol{\theta} \tag{6}$$

と表される．ちなみに，RBSM の板曲げ要素におけるばね行列 $\overline{\boldsymbol{k}}_{<s>}$ は式(5)と(6)より以下のようになる.

$$\overline{\boldsymbol{k}}_{<s>} = \int_{\Gamma_{<s>}} (\boldsymbol{Z}^t\boldsymbol{k}\boldsymbol{Z})d\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{t^3}{12}k_s & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t^3}{12}k_n & 0 \\ 0 & 0 & tk_s \end{bmatrix} \tag{7}$$

RBSM のより詳細な定式化については文献(2)(3)に譲るが，最終的に RBSM の板曲げ要素に関する離散化方程式が以下のように求められる.

$$\boldsymbol{K}_{dd}\boldsymbol{d} = \boldsymbol{P}_d \tag{8}$$

ここで，$\boldsymbol{d}$ は式(1)で述べた，要素図心のたわみ（剛体変位）と剛体回転角を全自由度分並べたベクトルである.

2.2 HPM の板曲げモデルと RBSM の関係

RBSM では，式(6)のように，ばねに蓄えられるエネルギーをもとに離散化方程式を誘導するが，HPM では，以下に示すハイブリッド型仮想仕事式をもとに離散化方程式の誘導が行われる.

$$\sum_{e=1}^{M}\left(\int_{\Omega^{(e)}} \boldsymbol{\sigma}:\mathrm{grad}\delta\boldsymbol{u}\,dV - \int_{\Omega^{(e)}} \boldsymbol{f}\cdot\delta\boldsymbol{u}dV - \int_{\Gamma^{(e)}} \tilde{\boldsymbol{t}}\cdot\delta\boldsymbol{u}\,dS\right) - \sum_{s=1}^{N}\left(\delta\int_{\Gamma_{<s>}} \boldsymbol{\lambda}\cdot(\tilde{\boldsymbol{u}}^{(a)} - \tilde{\boldsymbol{u}}^{(b)})\,dS\right) = 0 \tag{9}$$

ここで，$\boldsymbol{\sigma}$：Cauchy 応力，$\boldsymbol{f}$：物体力，$\tilde{\boldsymbol{t}}$：表面力，$\boldsymbol{\lambda}$：Lagrange の未定乗数，$\delta(\bullet)$ は $(\bullet)$ の変分量を表している．また，$\delta \boldsymbol{u}$ は境界条件を満たす仮想変位で，$\tilde{\boldsymbol{u}}^{(a)}$，$\tilde{\boldsymbol{u}}^{(b)}$ は，隣接する部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ の境界辺 $\Gamma_{<ab>}$ 上の変位を意味している．

HPM の板曲げモデルにおける変位場は，3 次元の一般的な 2 次の変位場をもとに，Kirchhoff-Love の仮定を適用して誘導する [11]．この結果は次のとおりである．

$$\boldsymbol{u}^{(e)} = \boldsymbol{Z}\left(\boldsymbol{N}_{z_d}^{(e)} \boldsymbol{d}_z^{(e)} + \boldsymbol{N}_{z_g}^{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}_z^{(e)}\right) \tag{10}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_z^{(e)} = \lfloor \varepsilon_{x,z}, \varepsilon_{y,z}, \gamma_{xy,z} \rfloor^t$$

$$\boldsymbol{N}_{z_g}^{(e)} = \begin{bmatrix} X & 0 & Y/2 \\ 0 & Y & X/2 \\ -X^2/2 & -Y^2/2 & -XY/2 \end{bmatrix}$$

すなわち，式(1)で表された RBSM の剛体変位場に，要素内変形を表現するひずみの影響を加えた形となっている．式中，$\varepsilon_{x,z}$ といった表現は ε_x を z で微分することを意味している．

一方，Lagrange の未定乗数は，物理的には表面力を意味することから，RBSM における式(5)の関係のように隣接する部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ の間の境界辺 $\Gamma_{<ab>}$ 上の相対変位 $\boldsymbol{\delta}_{<ab>}$ とペナルティ行列 $\boldsymbol{k}$ を用いて，以下のように仮定する．

$$\boldsymbol{\lambda}_{<ab>} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\delta}_{<ab>} \tag{11}$$

このように，HPM では，RBSM とは異なり，$\boldsymbol{k}$ の具体的な成分として，以下のようにペナルティ関数 p_f を用いている．

$$k_n = k_s = p_f \tag{12}$$

詳細は文献(11)に譲るが，式(10)および式(11)の関係を式(9)に代入し，事前に板厚方向の積分を行えば，HPM における板曲げモデルの離散化方程式が以下のように求められる．

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{dd} & \boldsymbol{K}_{d\varepsilon} \\ \boldsymbol{K}_{\varepsilon d} & \boldsymbol{K}_{\varepsilon\varepsilon} + \boldsymbol{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{\varepsilon_z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{P}_d \\ \boldsymbol{P}_{\varepsilon_z} \end{Bmatrix} \tag{13}$$

ここで，$\boldsymbol{d}$ は RBSM と全く同じ，要素図心のたわみ（剛体変位）と剛体回転角を全自由度分並べたベクトルである．また，$\boldsymbol{\varepsilon_z}$ は要素ごとのひずみの z 方向の勾配を並べたベクトルである．

式(13)における $\boldsymbol{K}_{dd}, \boldsymbol{K}_{\varepsilon d}, \boldsymbol{K}_{\varepsilon\varepsilon}$ は式(9)の付帯条件から得られる係数行列であり，$\boldsymbol{D}$ は，部分領域の曲げ剛性を表す構成行列

$$\boldsymbol{D}^{(e)} = \frac{t^3}{12} \cdot \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{14}$$

を重ね合わせた係数行列で，部分領域の面積を $A^{(e)}$ として以下の関係にある．

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}_z = \sum_e \left(A^{(e)} \boldsymbol{D}^{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}_z^{(e)}\right) \tag{15}$$

HPM の離散化方程式(13)において，変位場を剛体自由度のみとすれば，RBSM の離散化方程式(8)と類似の方程式が得られる．実際に，$\boldsymbol{K}_{dd}$ の成分は，式(5)で示したばね定数と式(12)で示したペナルティ関数の違いがあるだけで，それ以外の係数は全く同じである．

このように，RBSM の離散化方程式は，ばねに蓄えられるエネルギーという概念で誘導されたが，剛体変位場を仮定する HPM の特殊なケースと考えることも可能である．

3. RBSM における要素内モーメントの求め方

式(13)を式の形式で書き直すと以下のようになる．

$$\boldsymbol{K}_{dd}\boldsymbol{d} = \boldsymbol{P}_d - \boldsymbol{K}_{d\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}_z \tag{16}$$

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}_z = \boldsymbol{P}_{\varepsilon z} - (\boldsymbol{K}_{\varepsilon d}\boldsymbol{d} + \boldsymbol{K}_{\varepsilon\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}_z) \tag{17}$$

ところで，薄板の微小変形理論では，

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x,z} \\ \varepsilon_{y,z} \\ \gamma_{xy,z} \end{Bmatrix} \tag{18}$$

なる関係がある．一方，薄板では，モーメントを以下のように計算することができる．

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -\tilde{D}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ M_y &= -\tilde{D}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\ M_{xy} &= -\tilde{D}(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial xy} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

$$\tilde{D} = \frac{t^3 E}{12(1-\nu^2)}$$

したがって，部分領域 (e) におけるモーメント$\boldsymbol{M}^{(e)}$は，

$$\boldsymbol{M}^{(e)} = \boldsymbol{D}^{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}_z^{(e)} \tag{20}$$

と表すことができる．

いま，式(15)の関係を用い，

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}_z = \sum_e \left(A^{(e)} \boldsymbol{M}^{(e)} \right) = \boldsymbol{M} \tag{21}$$

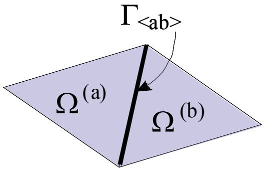
と表せば，式(17)は次のように書くことができる．

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{P}_{\varepsilon z} - (\boldsymbol{K}_{\varepsilon d}\boldsymbol{d} + \boldsymbol{K}_{\varepsilon\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}_z) \tag{22}$$

RBSM の離散化方程式は，式(22)において$\boldsymbol{\varepsilon_z} = 0$ とすることによって求められるので，

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{P}_{\varepsilon z} - \boldsymbol{K}_{\varepsilon d}\boldsymbol{d} \tag{23}$$

となる．ここで，$\boldsymbol{M}$ は，式(21)のように，部分領域内のモーメント (M_x, M_y, M_{xy}) を並べたベクトルに部分領域の面積を掛けたものであることから，この式は部分領域ごとに独立な式となる．したがって，$\boldsymbol{\varepsilon_z} = 0$ とした式(16)の解，すなわちRBSMの解を利用して，式(23)から部分領域単位に，領域内のモーメントを近似的に求めることができる．



図－２　隣接する部分領域とその境界

いま，図－２に示す，隣接する部分領域 $\Omega^{(a)}$ に対する式(23)の $\boldsymbol{K}_{\varepsilon d}$ の $\Gamma_{<ab>}$ に関する被積分項は次のように表すことができる．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{k}^{(a)}_{\varepsilon_d} &= \boldsymbol{R}^{(a)}_{<ab>} \boldsymbol{N}^{(a)}_{z_g} \boldsymbol{k}\boldsymbol{\delta}_{<ab>} \\ &= \boldsymbol{R}^{(a)}_{<ab>} \boldsymbol{N}^{(a)}_{z_g} \boldsymbol{M}_{n<ab>} \end{aligned} \tag{24}$$

ここで，$\boldsymbol{M}_{n<ab>}$ は，RBSM によって求まった要素境界辺上の表面力（ねじりモーメント，曲げモーメント，せん断力）である．式(23)における $\boldsymbol{K}_{\varepsilon d}$ の被積分項の式(24)は要素境界辺に対して積分されるため，ある部分領域(e)に対する式(23)の関係は以下のように整理される [10]．

$$\boldsymbol{M}^{(e)} = \frac{1}{A^{(e)}} \left(\boldsymbol{P}^{(e)}_{\varepsilon z} - \oint_{\Gamma^{(e)}} \boldsymbol{R}^{(e)} \boldsymbol{N}^{(e)}_{z_g} \boldsymbol{M}^{(e)}_n \mathrm{d}\Gamma \right) \tag{25}$$

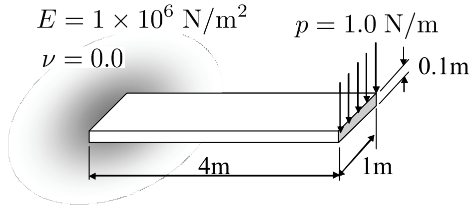
以上のように，式(25)を用いることで，RBSM によって求まった要素周辺の表面力から，要素毎に要素内モーメントが求められることになる．

4. 数値計算例

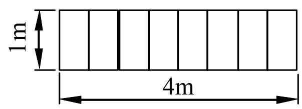
式(25)で求まった，近似的な要素内モーメントの精度をいくつかの数値計算例で検証する．

(1) 集中荷重が作用する片持ちばり

図－３は集中荷重が作用する片持ちばりの解析例である．図 (a) にモデル寸法と材料定数，荷重状態を示す．ただし，はり理論の解と比較するためポアソン比を 0 とした．図(b) は要素分割例で，矩形要素を用い，奥行き方向を 1 分割に固定，スパン方向を 2 分割から 10 分割に細分割した．

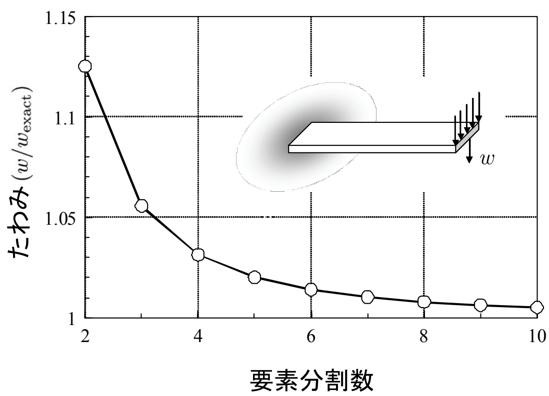


(a)　解析モデル

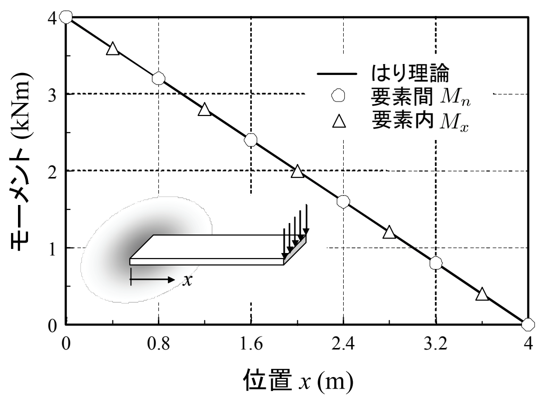


(b) スパン方向の要素分割例

図－３　片持ちばりの解析モデル



図－４　RBSM のたわみ (w) の精度



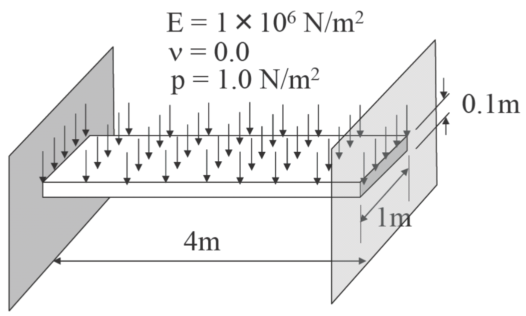
図－５　本手法と RBSM のモーメント分布

図－４にRBSMのたわみの精度を確認した結果を示す．横軸は要素分割数，縦軸は RBSM の解をはり理論の値で除した値である．7 分割で誤差が 1%程度になり，10 分割では0.5%であった．

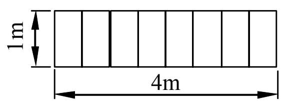
一方，**図－５**は，モーメント分布の結果である．この例の要素分割数は 5 である．横軸ははりスパン方向の位置，縦軸はモーメントである．図中，実線ははり理論による解，○印が RBSM による要素境界辺上の曲げモーメント，△印が，本手法による解である．両者の解とも，はり理論による解と一致している．なお，この解析例では分割数によらず，モーメントは，はり理論による解と一致した．

(2) 分布荷重が作用する両端固定板

分布荷重 ($p = 1.0\ \mathrm{N/m^2}$) が作用した場合の，本手法による要素内モーメントの精度を検証するため，**図－６**に示すような両端を固定した板の解析を行った．材料定数は図に示すとおりである．要素分割は片持ちばりの解析例と同様に矩形要素を用い，奥行き方向を１分割に固定し，スパン方向を細分割した．



(a)　解析モデル



(b) スパン方向の要素分割例

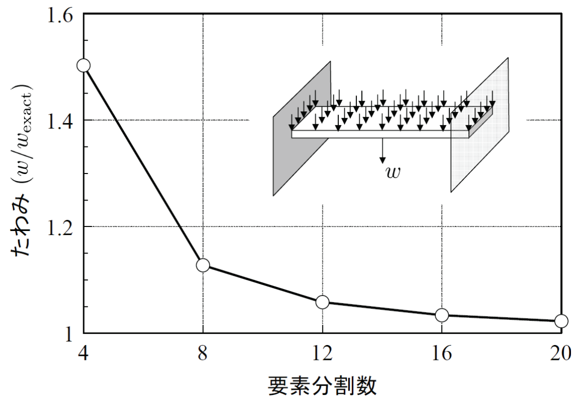
図－６　両端固定板

はじめに，RBSM による解の収束性を示すため，要素分割を細分した場合のスパン中央部におけるたわみの状況を**図－７**に示す．縦軸は RBSM による解をはり理論による解で除した値，横軸は**図－６(b)**に示すスパン方向の要素分割数である．20 分割で 2.25%の誤差であった．RBSM では，要素分割を細分化するにつれ，大きめの値から正解に近づいており，要素内変形を考慮した HPM の場合と逆の傾向を示している [5]．

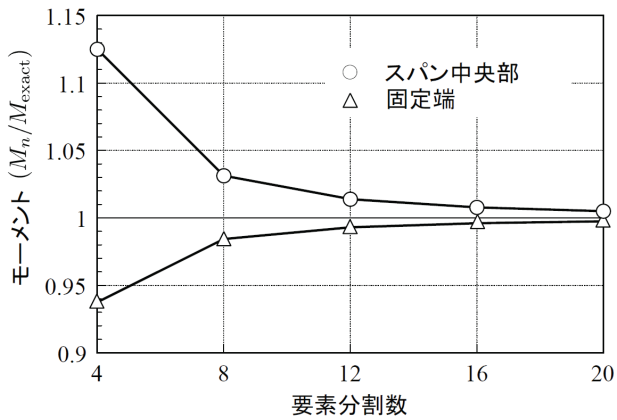
図－８はモーメントの収束状況を示した図である．縦軸は RBSM の解をはり理論で除した値，横軸はスパン方向の要素分割数である．○印がスパン中央部，△が固定端における収束状況を示している．スパン中央部，固定端とも 16 分割で 1%以下の誤差になり，20 分割ではスパン中央部で 0.5%，固定端で 0.25%の誤差であった．

図－９は，スパン方向に 8 分割した場合のモーメント分布を示した図である．実線がはり理論による解，○印が RBSM による要素間のモーメント，△印が本手法による要素内のモーメントである．RBSM および本手法による結果は，はり理論による解とほぼ一致している．

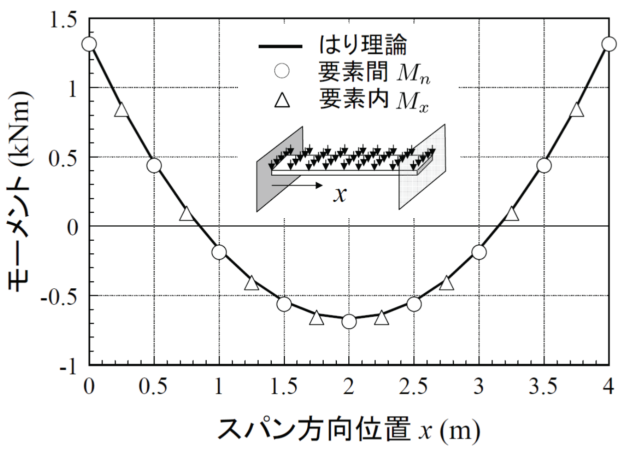
表－１はこれを詳細に示したものである．表は 20 分割の場合の代表的なスパン位置での値で，固定端から 0.7m の位置で相対誤差が 1.9%，その他の位置では 1%以下の相対誤差になっている．0.7m の位置では，モーメントの値そのものが小さいので，全体的には良好な結果が得られたものと考える．



図－７　RBSM のたわみ (w) の精度



図－８　RBSM のモーメント



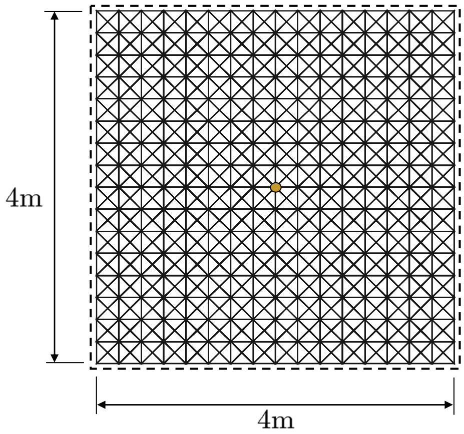
図－９　要素内モーメント分布

表－１　要素内モーメント（20 分割）

位置 (m)	本手法 (kNm)	はり理論 (kNm)	相対誤差 (%)
0.1	1.135	1.138	0.3
0.7	0.175	0.178	1.9
1.3	-0.425	-0.422	0.8
1.9	-0.665	-0.662	0.5

(3) 集中荷重が作用する周辺単純支持の矩形板

次に，周辺単純支持の矩形板に集中荷重や分布荷重が作用した場合の要素内モーメントの精度を検証する．**図－10** は，要素分割の例で，この例では，縦横，それぞれ 16 分割した矩形領域をさらにたすき掛けに分割して要素分割を行っている．図の例で 1024 要素である．解析に用いた材料定数を図中に示す．



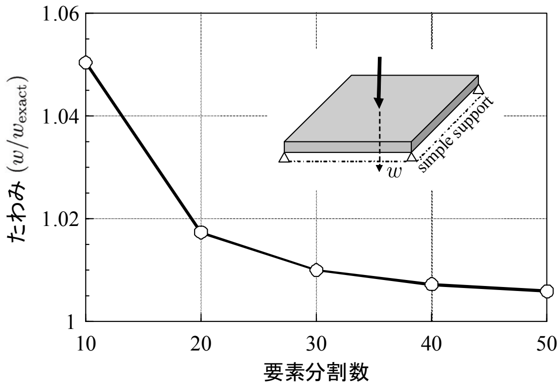
弾性係数　$E = 1.0 \times 10^6$ N/m^2
ポアソン比　$\nu = 0.0$
板厚　$t = 0.1$m

図－10　矩形板の解析モデル

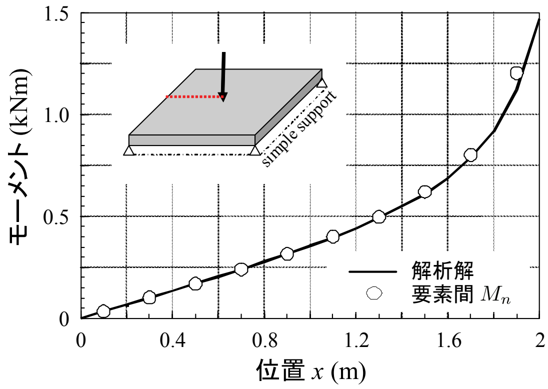
はじめに，矩形版の中央に集中荷重が作用した場合について検討する．**図－11** は，RBSM のたわみ解の収束性を確認した図である．縦軸は板中央部におけるたわみを薄板の理論解で除した値，横軸は分割数である．この分割数は，縦横の矩形領域の分割数で，例えば，分割数 20 の要素分割では，縦横，それぞれ 20 分割した矩形領域をたすき掛けに分割する．30 分割で誤差は 1%以下となり，50 分割で誤差は 0.6%であった．

図－12 は，RBSM による要素間の曲げモーメント分布を解析解と比較した図である．縦軸はモーメント，横軸は，板端部から中央に向けての距離である．図は 20 分割の例で，○印が RBSM による解，実線が解析解である．集中荷重が作用しているため，最も板中央部に近い箇所での誤差は 12%と大きくなるが，それ以外の箇所では 1%以下の誤差となっている．

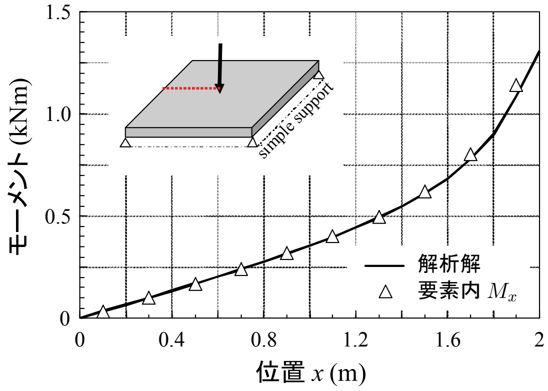
一方，**図－13** は本手法による要素内の曲げモーメント分布を示した図である．この結果も，要素分割数 20 の場合の結果である．△が本手法による解，実線が解析解である．縦軸，横軸の内容は**図－12** と同じである．傾向は，RBSM の要素間モーメントを同じで，最中央部で最も大きな誤差が生じるが，全体的な分布状況は，解析解と類似している．



図－11　集中荷重が作用するたわみ (w) の収束状況



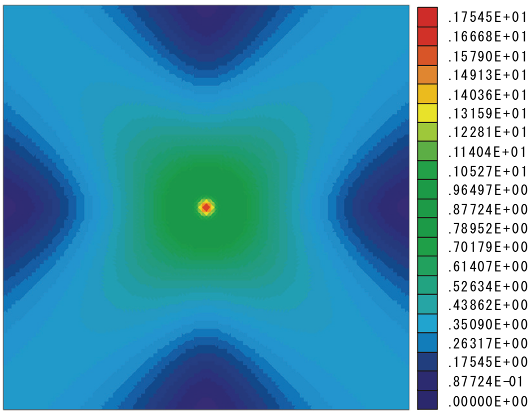
図－12　RBSM による要素間の曲げモーメント分布



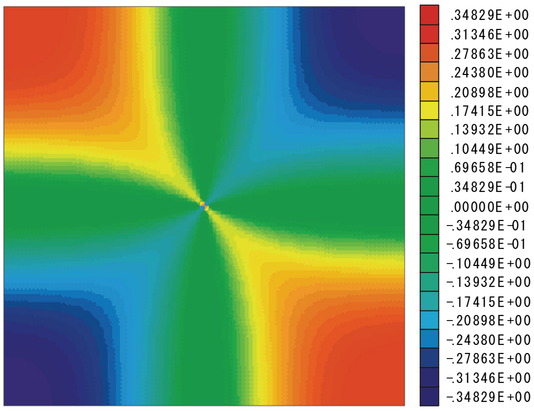
図－13　本手法による要素内の曲げモーメント分布

表－２　要素内モーメント（40 分割）

位置 (m)	本手法 (kNm)	解析解 (kNm)	相対誤差 (%)
0.1	0.0334	0.0337	1.0
0.7	0.240	0.239	0.6
1.3	0.497	0.493	0.9
1.9	1.141	1.085	5.2



図−14　要素内最大曲げモーメント分布（集中荷重）



図−15　要素内ねじりモーメント分布（集中荷重）

表−２は本手法による要素内モーメントを詳細に示したものである．表は 40 分割の場合の結果で，荷重作用位置に最も近い位置で 5.2%の誤差であったが，それ以外の仮称では 1%以下の精度で要素内モーメントが求まっている．

図−14 は要素内の最大曲げモーメント分布を，また，**図−15** は要素内のねじりモーメント分布をカラーコンターによって示した図である．要素分割数は 40000 要素（100×100×4）である．本手法によれば，RBSM では求めることができない要素内モーメントが得られるため，このようなモーメント分布の状況を表現するこが可能となり，解析者に，より多くの情報を提供することができる．

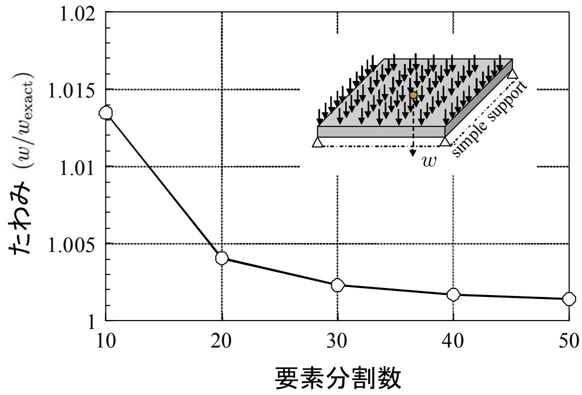
(4) 分布荷重が作用する周辺単純支持の矩形板

次に，**図−10** で示した解析例に分布荷重が作用した場合の例を用いて本手法による解の精度を検証した．分布荷重は ($p = 1.0$ N/m^2) とした．

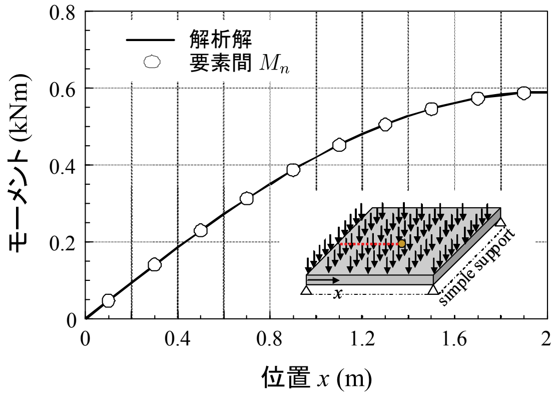
図−16 は RBSM のたわみの精度を検討した図で，横軸が分割数，縦軸が RBSM のたわみを解析解で除した値である．分割数の考え方は，集中荷重が作用する場合と同じである．分布荷重が作用する場合は，20 分割で 1%以下の誤差となり，50 分割では 0.14%であった．

図−17 は，RBSM による要素間モーメント分布で，分割数 20 の場合である．実線が解析解，○印が RBSM による解である．モーメントの値が小さい支持部に一番近い境界辺で約 1%，モーメントの大きな中央部で 0.05%の誤差であった．それ以外の箇所でも 1%以下の高い精度の解が得られている．

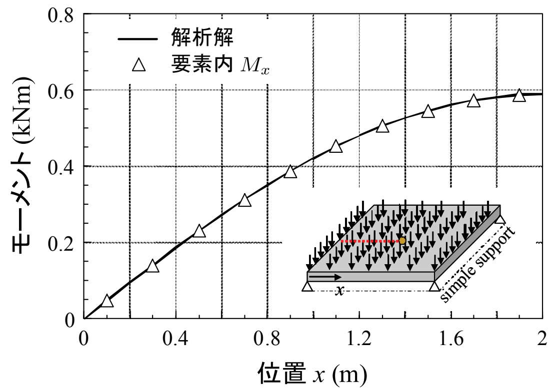
図−18 は本手法による要素内曲げモーメント分布を示した図である．実線が解析解，△印が本手法による解である．解析解と本手法による解はほぼ一致しているように見える．



図−16　分布荷重が作用するたわみ (w) の収束状況



図−17　RBSM による要素間の曲げモーメント分布



図−18　本手法による要素内の曲げモーメント分布

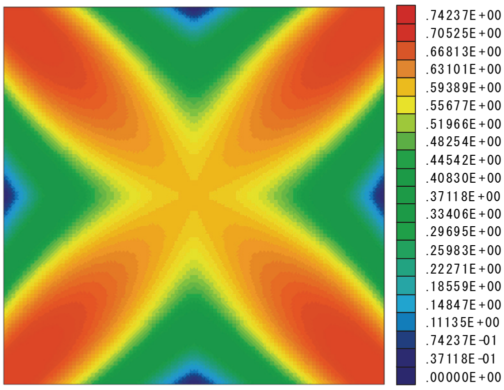
そこで，分割数を 40 分割とした場合に対して，詳細な値の比較を行った．その結果を**表−３**に示す．支持部に一番近い要素で 0.7%の誤差，それ以外の箇所では，小数点以下 3 桁まで，本手法による解と解析は一致していた．こ

のように，分布荷重が作用する場合では，RBSM の解の精度が高く，また，それを用いて計算される要素内モーメントの精度も極めて高いものとなる．

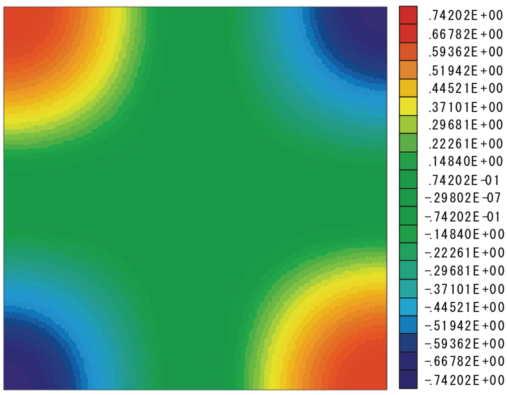
最後に，最大曲げモーメントとねじりモーメントの分布状況を**図−19** と**図−20** に示す．モーメントの分布状況を説明できる結果が得られている．

表−３　要素内モーメント（40 分割）

位置 (m)	本手法 (kNm)	解析解 (kNm)	相対誤差 (%)
0.1	0.0476	0.0473	0.7
0.7	0.313	0.313	0.0
1.3	0.505	0.505	0.0
1.9	0.587	0.587	0.0



図−19　要素内曲げモーメント分布（分布荷重）



図−20　要素内ねじりモーメント分布（分布荷重）

(5) Voronoi 分割を用いた周辺単純支持矩形板

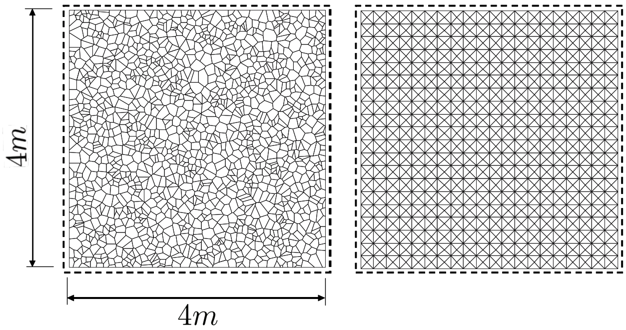
式(25)に示したように，本手法は，要素形状が任意多角形でも適用可能である．そこで，任意多角形の代表的な例として Voronoi 多角形を要素とした場合の精度を証した．

図−21 は解析モデルである．Voronoi 多角形は，乱数を用いて母点を与え作成した．要素の自由度位置は，図心ではなくこの母点とした．要素数は 1508 要素であった．一方，比較対象として，格子分割の例を図(b)のように作成した．分割数は，縦横 20 分割の計 1600 要素で，ほぼ Voronoi 分割と同じ分割数とした．解析に用いた材料定数を図中に示す．分布荷重は(4)の例題と同じ($p = 1.0\ \mathrm{N/m^2}$)とした．

図−22 は最大モーメントの分布状況を Voronoi 分割と格子分割で比較した図である．カラーレンジは両者で合わせてある．Voronoi 分割の場合，若干ばらけるが，全体のカラー分布は，格子分割と Voronoi 分割でほぼ類似の傾向を示した．

一方，**図−23** はねじりモーメントの結果である．この結果もカラーレンジは，両者で合わせてある．両者を比較するとほぼ類似の分布状況を示している．

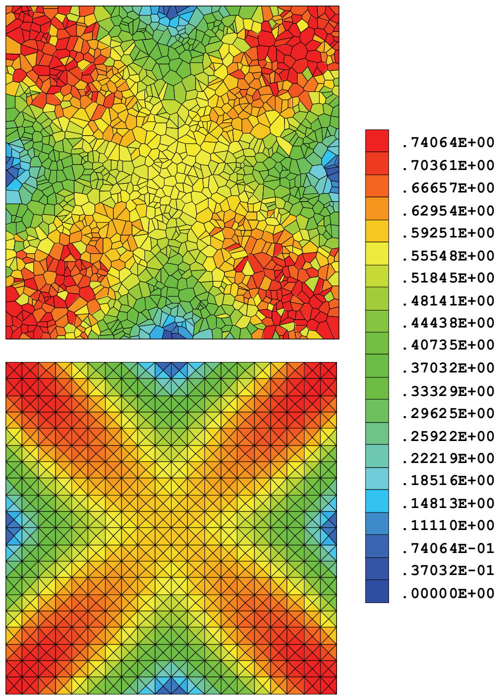
以上のように，本手法は，若干のばらつきはあるものの，必ずしも三角形要素によるレギュラーメッシュ分割ばかりでなく，Voronoi 分割のような任意多角形にも適用可能である．



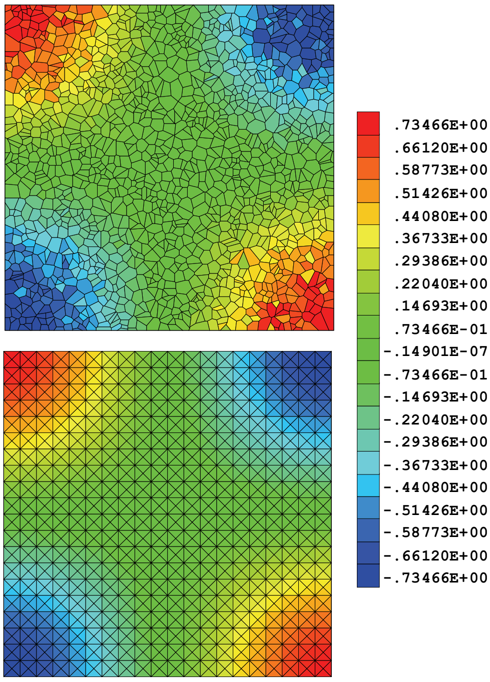
(a) Voronoi 分割 (1508 要素)　　(b)格子分割 (1600 要素)

弾性係数　$E = 1.0 \times 10^6\ \mathrm{N/m^2}$
ポアソン比　$\nu = 0.0$
板厚　$t = 0.1\mathrm{m}$

図−21　Voronoi 分割を用いた解析例



図−22　要素内曲げモーメント分布（分布荷重）



図ー23　要素内ねじりモーメント分布（分布荷重）

5. まとめ

本論文では，はじめに，板曲げ問題に対する RBSM と HPM の関係を述べ，RBSM の板曲げ要素が，HPM の板曲げモデルに対して剛体変位場を仮定する特殊なケースと考えることができることを示した.

次に，HPM の考え方を利用して，RBSM の結果から要素毎に要素内モーメントを求める方法を提案し，様々な解析例から本手法によって得られる要素内モーメントの精度を検証した．本手法は RBSM の結果を利用するので，得られる結果も RBSM の解の精度の影響を受けており，高精度の RBSM による解の場合，本手法も高い精度で要素内モーメントを求めることができた.

本手法は，要素形状が任意多角形であっても利用可能であり，この点を Voronoi 分割を用いて確認した．Voronoi 分割では RBSM の解が若干ばらついており，それが本手法による結果にも反映された結果となった．ただし，全体的なモーメントの分布状況は構造格子の結果と類似の傾向を示した.

本手法は，連立方程式を解析する必要がなく，要素毎に処理することができ，RBSM による解析のポスト処理の道具として利用することが可能である.

本論文では，提案手法の精度を検討するため解析解のある解析例を中心としたが，有用性については，今後，検証方法を検討して，より複雑な問題の解析を行う必要がある.

参考文献

1) Kawai, T. : New element models in discrete structural analysis, J. of the Society of Naval Architects of Japan, No.114, pp.1867-193,1977.
2) 竹内則雄 : RBSM 板曲げ要素を用いた離散化極限解析，構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，Vol.19, pp.125-130,1995.
3) 竹内則雄 : RBSM を用いた弾性地盤上の板曲げ要素について，構造工学論文集, Vol.42A, pp.255-262, 1996.
4) Washizu, K. : *Variational methods in elasticity and plasticity*, Pergamon Press, New York, 1968.
5) Arnold, D.N., Brezzi,F., Cockburn, B. and Marini, L.D. : Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems, *SIAM journal on numerical analysis,* Vol.39, No.5: pp.1749-1779, 2002.
6) Hughes,T.J.R, and Garikipati,K.:On the continuous/ discontinuous Galerkin(CDG) formulation of Poisson- Kirkhoff plate theory, *Computational mechanics-Theory and practice,* 2004.
7) Arnold,D.N. : An interior penalty finite element method with discontinuous elements. *SIAM journal on numerical analysis,* Vol.19, No.4: pp.742-760, 1982.
8) 竹内則雄，大木裕久，上林厚志，草深守人 : ハイブリッド型変位モデルにペナルティ法を適用した離散化モデルによる材料非線形解析，日本計算工学会論文集 (Transactions of JSCES Paper No.20010002)，2001.
9) 大木裕久，竹内則雄 : ハイブリッド型ペナルティ法による上下界解析，日本計算工学会論文集 (Transactions of JSCES Paper No.20060020)，2006.
10)田尻康之，山村和人，竹内則雄 : ハイブリッド型仮想仕事の原理による修正 RBSM の開発, 構造工学論文集, Vol.56A, pp.169-178, 2010.
11)田尻康之，見原理一，竹内則雄 : HPM による薄板の離散化極限解析，土木学会応用力学論文集，Vol.11, pp.233-242 , 2008.

(2010 年 3 月 9 日　受付)