

PDS-FEM を用いた破壊解析のための FEM モデルの 自動生成手法の開発

Development of Automatic Generator of FEM Model for Fracture Analysis by PDS-FEM

小坂未来*・田中美緒**・小國健二***

Miki KOSAKA, Mio TANAKA and Kenji OGUNI

*学士(工) 慶應義塾大学 理工学部 システムデザイン工学科

**学士(工) 慶應義塾大学 理工学部 システムデザイン工学科

***正会員 Ph.D. 慶應義塾大学准教授 理工学部 システムデザイン工学科 (〒 223-8522 神奈川県横浜市港北区日吉 3-14-1)

Development of automatic generator of FEM model for fracture analysis by PDS-FEM (particle discretization scheme finite element method) is presented in this paper. To perform Monte-Carlo simulation of crack propagation in heterogeneous body by PDS-FEM, numerous (e.g., 10,000) different meshes with precise distribution of heterogeneity is required. For this purpose, i) a random mesh generator which generates different meshes for an object and ii) an automatic converter from X-ray CT images to unstructured 3D FEM mesh, are developed. These two components compose an automatic generator of FEM model for fracture analysis by PDS-FEM.

Key Words : *PDS-FEM, Monte-Carlo simulation, random mesh generator, image-base modeling*

1. 不均質材料の破壊解析

材料が弾性域から塑性域を経て変形する過程は、詳細なモデルと大規模な計算資源があれば、適切な有限要素解析手法を用いた大規模計算により、高精度で予測することが可能である。コンクリートなどの不均質材料についても、変形過程の解析に限定すれば、適切な平均化を施すことにより、粗骨材や空隙など、不均質体を構成する材料の配置にあまり影響されことなく高精度な予測が可能である。材料の変形に関しては、十分に整備された有限要素解析手法、平均化手法が存在する。一方、材料の脆性破壊、あるいは塑性変形が大きくなった後の材料の破断の予測精度は十分ではなく、破壊現象の数値解析手法の開発は固体連続体力学の重要課題の一つとなっている^{1),2),3),4)}。

コンクリートなどの不均質材料の中での破壊進展には、粗骨材や空隙など、不均質体を構成する材料の配置が強い影響を与える^{5),6)}。したがって、不均質材料の破壊現象においては、平均化したモデルを用いた解析とそこから得られる破壊進展経路には、重要な意味はない。また、固体連続体力学で用いる通常の空間スケールでは均一体とみなしてよいような材料(PMMAなどのプラスチック材料、ガラス、コピー用紙など)を破断する実験を行うと、いかに精密に供試体・载荷条件をコントロールしても、全く同じ破断面を得られることはない。つまり、材料の破壊挙動には、あらゆる空間スケールの材料物性の乱れの影響があらわれる。特に、確率的に生じる「空間スケールの小さい乱れ」が破壊挙動に大きな違いを与える。これを破壊現象の本

質のひとつと認めると、ローカルな乱れのない均質体に対応する数値問題を精度良く解いて厳密解への収束を図るという数値解析の王道は、破壊挙動に対しては有効に機能しないと考えられる。

材料の中の「空間スケールの小さい乱れ」の決定論的モデル化は難しく、確率論的な手法を用いざるを得ない。また、確率空間のスペクトル分解をこのような乱れに適用することも難しい。結果的に、材料定数の乱れを確率的に発生させた多数(1万個程度)のモデルを個別に解析して解析結果の確率分布を得る、モンテカルロシミュレーションが選択肢として残される。

破壊現象のモンテカルロシミュレーションにおいては粗骨材や空隙の分布といった空間スケールの大きい乱れに加えて、個別にモデル化することが不可能なほど空間スケールの小さい乱れの影響を適切に反映しなくてはならない。また、材料の確率モデル内で発生する個々の亀裂の進展解析の可能性を考えると、従来の手法の枠組みでは亀裂の進展に応じて要素を作り直すリメッシュ^{7),8)}・予め亀裂面を設定するジョイント要素など、計算負荷が大きい(リメッシュ)、一般性がない(ジョイント要素)といった問題を持つ技巧が必要となる。計算負荷の制約から、従来手法を用いたモンテカルロ・シミュレーションは非常に難しい。破壊進展解析において、計算負荷を抑えつつ高精度を確保する計算手法が必要である。

上記を背景に、著者らのグループは、粒子離散化手法(Particle Discretization Scheme, PDS)を組み込んだ有限要素法であるPDS-FEMを開発してきた⁹⁾。PDS-

FEM は、いたるところ不連続かつ重なりのない形状関数を用いた特殊な有限要素法と位置づけられる手法であり、通常の有限要素法と同等の計算負荷で破壊進展問題を亀裂の成長パターンのばらつきも含めて精度よく解析することが可能である。

後述するが、PDS-FEM を用いた破壊現象の解析において、「空間スケールの小さい乱れ」は破壊面の候補としてモデル内に埋め込まれる Voronoi 分割の境界面の空間分布により表現される。したがって、PDS-FEM を用いたモンテカルロシミュレーションにおいては、ひとつの解析対象について異なったメッシュを多数準備してそれぞれについて破壊進展解析を行うことになる。

以下、本論文では、第2節で破壊進展経路と要素分割との関係に着目しつつ、PDS-FEM の定式化を概説する。第3節で、ひとつの解析対象について多数の異なったメッシュを効率よく作成するランダムメッシュジェネレータについて詳述する。ランダムメッシュジェネレータでメッシュを多数作成することは、PDS-FEM を用いたモンテカルロシミュレーションにおいて「空間スケールの小さい乱れ」を導入することに対応する。第4節において、決定論的に導入できる「空間スケールの大きい乱れ」を扱う方法として、コンクリート円柱試験体の X 線 CT 画像情報を四面体非構造メッシュに対応させてコンクリートの詳細 FEM モデルを自動生成する手法について述べる。ランダムメッシュジェネレータとイメージベース四面体非構造モデル自動生成手法を併せて「PDS-FEM を用いた破壊解析のための FEM モデルの自動生成手法」と呼ぶ。

2. PDS-FEM

本節では四面体一次要素を用いた PDS-FEM の定式化について述べる。PDS の定式化と、そこから得られる不連続な形状関数による離散化を用いた PDS-FEM の定式化を行う。特に、要素内での破壊を要素剛性マトリクスの変化により表現できること、破壊進展の経路が節点の配置（要素の形状）に依存することを示す。

2.1 PDS の定式化

領域 $D(\in R^3)$ 上に節点を振りまく。この時 D に対して、節点群を母点とした Voronoi 分割 $\{\Phi^\alpha\}$ と Delaunay 分割 $\{\Psi^\beta\}$ が定義できる。PDS では、それぞれの分割の上に立つ特性関数を用いて関数の離散化を行う。 Φ^α と Ψ^β に対して、以下のように ϕ^α と ψ^β を定義する。

$$\phi^\alpha(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in \Phi^\alpha \\ 0 & \mathbf{x} \notin \Phi^\alpha \end{cases} \quad (1)$$

$$\psi^\alpha(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in \Psi^\alpha \\ 0 & \mathbf{x} \notin \Psi^\alpha \end{cases} \quad (2)$$

PDS ではこれらを用いて関数 f とその微分 $f_{,i}$ を次のように離散化する。

$$f^d(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha} f^{\alpha} \phi^{\alpha}(\mathbf{x}) \quad (3)$$

$$g_i^d(\mathbf{x}) = \sum_{\beta} g_i^{\beta} \psi^{\beta}(\mathbf{x}) \quad (4)$$

この時、 f^{α} 及び g_i^{β} は、

$$f^{\alpha} = \frac{1}{\Phi^{\alpha}} \int_{\Phi^{\alpha}} f(\mathbf{x}) dv \quad (5)$$

$$g_i^{\beta} = \frac{1}{\Psi^{\beta}} \int_{\Psi^{\beta}} \sum_{\alpha} f^{\alpha} \phi_{,i}(\mathbf{x}) dv \quad (6)$$

である。

関数 f に変位場を割り当てて上記の離散化を施せば Voronoi 分割の境界で離散化された変位場は不連続となる。これは、Voronoi 分割の境界で破壊面を表現できることを意味する。また、Delaunay 分割で変位場の微分が離散化されるため、この上で歪み場を評価することができる。PDS を用いて変位場を離散化することとは、Voronoi 分割線であらわされる破壊面の候補を設定することに対応する。したがって、PDS で変位場の不連続が生じる問題を扱う場合、節点の配置が重要な役割を担う。

2.2 PDS-FEM の定式化

以下に示す三次元の線形弾性体の境界値問題を考える。

$$\begin{cases} c_{ijkl} u_{k,li} = b_j & \mathbf{x} \in D \\ u_i = \bar{u}_i & \mathbf{x} \in \partial D \end{cases} \quad (7)$$

ここで、 u_i は変位場を、 c_{ijkl} は弾性係数を表す。式 (7) と等価な変分問題として、以下の汎関数を停留させる問題を考える。

$$\begin{aligned} I(\mathbf{u}, \epsilon, \sigma) = & \int_D \frac{1}{2} \epsilon_{ij}(\mathbf{x}) c_{ijkl} \epsilon_{kl}(\mathbf{x}) \\ & - \sigma_{ij}(\mathbf{x}) (\epsilon_{ij}(\mathbf{x}) - u_{j,i}(\mathbf{x})) \\ & - b_i(\mathbf{x}) u_i(\mathbf{x}) dv \end{aligned} \quad (8)$$

変位 u_i と体積力 b_i を Voronoi 分割上の特性関数 $\{\phi^\alpha\}$ を用いて離散化する。

$$u_i(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha} u_i^{\alpha} \phi^{\alpha}(\mathbf{x}) \quad (9)$$

$$b_i(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha} b_i^{\alpha} \phi^{\alpha}(\mathbf{x}) \quad (10)$$

また、 σ_{ij} 、 ϵ_{ij} 、 c_{ijkl} は Delaunay 分割上の特性関数 $\{\psi^\beta\}$ で離散化する。

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \sum_{\beta} \sigma_{ij}^{\beta} \psi^{\beta}(\mathbf{x}) \quad (11)$$

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{x}) = \sum_{\beta} \epsilon_{ij}^{\beta} \psi^{\beta}(\mathbf{x}) \quad (12)$$

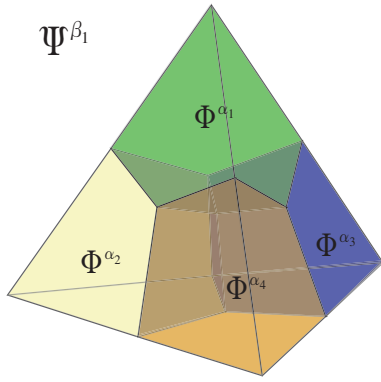


図-1 四面体一次要素 Ψ とそれを構成する 4 つの Voronoi 分割 Φ

$$c_{ijkl}(\mathbf{x}) = \sum_{\beta} c_{ijkl}^{\beta} \psi^{\beta}(\mathbf{x}) \quad (13)$$

これらを汎関数 I に代入して得られる離散化した汎関数を $\hat{I}$ と呼ぶ. $\frac{\partial \hat{I}}{\partial \epsilon_{ij}^{\beta}} = 0$ および, $\frac{\partial \hat{I}}{\partial \sigma_{ij}^{\beta}} = 0$ より,

$$\sigma_{ij}^{\beta} = c_{ijkl}^{\beta} \epsilon_{kl}^{\beta} \quad (14)$$

$$\epsilon_{ij}^{\beta} = \sum_{\alpha} B_i^{\beta\alpha} u_j^{\alpha} \quad (15)$$

$$B_i^{\beta\alpha} = \frac{1}{\Psi^{\beta}} \int_{\Psi^{\beta}} \phi_i^{\alpha}(x) dv \quad (16)$$

また, $\frac{\partial \hat{I}}{\partial u_i^{\alpha}} = 0$ より,

$$\sum_{\alpha'} k_{ij}^{\alpha\alpha'} u_j^{\alpha'} - \Phi^{\alpha} b_i^{\alpha} = 0 \quad (17)$$

$$k_{ij}^{\alpha\alpha'} = \sum_{\beta} \Psi^{\beta} c_{ijkl}^{\beta} B_k^{\beta\alpha} B_l^{\beta\alpha'} \quad (18)$$

式(18)の $k_{ij}^{\alpha\alpha'}$ は, 四面体一次要素を用いた通常の FEM の要素剛性マトリクスの成分と等しい.

図-1 に, 四面体一次要素 PDS-FEM の要素を 1 つ示す. 1 つの Delaunay 分割には 4 つの Voronoi 分割の断片が互いに重なりを持たずに含まれている. Voronoi 分割の境界面が破壊面の候補であり, 節点の配置が異なるメッシュは, 破壊面の候補の分布も異なったメッシュということになる.

2.3 破壊の表現

PDS-FEM では, Voronoi ブロックの境界近傍の領域 $\partial\Phi$ での c_{ijkl} の値を変化させることで破壊を表現する. この時, 要素内で c_{ijkl} が変化するため, 式(18)のように, c_{ijkl} を定数として, 積分の外に出すことができない. つまり,

$$k_{ij}^{\alpha\alpha'} = \sum_{\beta} \frac{1}{\Psi^{\beta}} \int_{\Psi^{\beta}} \phi_{,k}^{\alpha} c_{ijkl}^{\beta} \phi_{,l}^{\alpha'} dv \quad (19)$$

ここで, 要素内に破壊面がある場合, c_{ijkl} が次のよう

に定義されているとする.

$$c_{ijkl} = \begin{cases} c_{ijkl}^0 & \mathbf{x} \notin \partial C \\ c'_{ijkl} & \mathbf{x} \in \partial C \end{cases} \quad (20)$$

ただし, ∂C は $\partial\Phi$ のうち, 破壊が起こった領域を表す. この時, 式(19) は次のように計算される.

$$k_{ij}^{\alpha\alpha'} = \sum_{\beta} \frac{1}{\Psi^{\beta}} \left(\int_{\Psi^{\beta}-\partial C} \phi_{,k}^{\alpha} c_{ijkl}^{0\beta} \phi_{,l}^{\alpha'} dv + \int_{\partial C} \phi_{,k}^{\alpha} c'_{ijkl}{}^{\beta} \phi_{,l}^{\alpha'} dv \right) \quad (21)$$

ここで, たとえば $c'_{ijkl} = 0$ の時, 式(21) はさらに,

$$k_{ij}^{\alpha\alpha'} = c_{ijkl}^{0\beta} \int_{\Psi^{\beta}-\partial C} \phi_{,k}^{\alpha} \phi_{,l}^{\alpha'} dv \quad (22)$$

これは, 要素内に破壊面が発生した場合の $k_{ij}^{\alpha\alpha'}$ の変化が, 式(16)であらわされる B マトリクスの成分の変化のみ (B マトリクスの成分を計算するときの積分領域の変化のみ) で表せることを意味する.

3. ランダムメッシュジェネレータ

現在 (市販, 無料版を問わず) 入手可能な四面体非構造メッシュジェネレータは, ほぼ全てが, 1) 表面パッチの作成, 2) 表面付近から逐次的に Delaunay 四面体を生成, 3) smoothing 処理, Sliver 要素 (ほぼ平面上に配置された 4 つの節点から四面体要素が構成されることによる紙のように薄い要素) ¹⁰⁾ 除去などによるメッシュ品質の改善, の手順で非構造メッシュを生成する. これらのメッシュジェネレータでは, 指定されたモデルの幾何形状と節点密度に対して, ただ一つ of 非構造メッシュが作成される.

一方, 本研究が目的とする「PDS-FEM を用いた破壊のモンテカルロシミュレーション」を行うためには, 指定されたモデルの幾何形状と節点密度に対して, 異なる節点配置, 要素配置を持つ非構造メッシュを多数 (数千~数万個) 生成する必要がある. これを実現するために, 本研究では全ての節点をランダムに配置した上で Delaunay 四面体メッシュ作成, メッシュ品質の改善を行うランダムメッシュジェネレータを開発した.

このランダムメッシュジェネレータのポイントは, 以下の条件を満たすように節点をランダムに配置することである.

- 節点の発生の仕方はランダムであるが, 再現性を保つこと
- 所定の形状を守ること
- 所定の密度分布を守ること
- 所要時間を短くすること

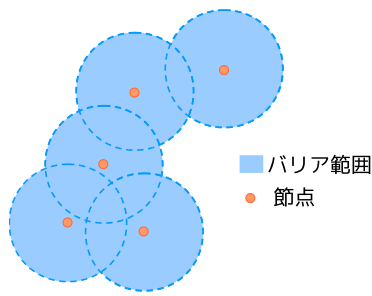


図-2 バリア範囲

特に最後の「所要時間を短くする」という条件は、節点配置の異なるメッシュを数千～数万個作成するために不可欠な条件である。しかし、以下に述べるように、節点のランダム配置は計算負荷が大きく、愚直なアルゴリズムでは計算時間の抑制が非常に困難なタスクである。以下、節点をランダム配置する計算の高速化について詳述する。

3.1 節点のランダム配置手法

メッシュの再現性を保ちつつ節点をランダムに発生させるために、C++言語の標準 rand 関数を用いてランダムな座標を取得した。異なる seed 番号を用いることにより、異なる節点配置、ひいては異なるメッシュが得られる。また、メッシュの再現性は seed 番号により担保される。

物体内に節点を生成するとき、節点を無秩序に生成すると、物体の境界が保存されない、節点の配置が偏る、などの問題が発生する。これを回避し、モデルの所定の形状を保存するために、節点を 1) モデルの稜線、2) モデルの表面、3) モデル内部の順に発生させる。また、所定の節点密度を守るために、節点の周りに、その中には他の節点が入れないバリア範囲(図-2)を設ける。

(1) 節点を逐次的に生成する手法

最も簡単な節点生成方法、節点の逐次生成の方法を以下に示す。

節点を逐次的に生成する手法とは、ランダムに得られた座標を節点として物体内に配置し、希望する個数まで節点が物体内に配置されたら終了する手法である。このとき、全ての節点が高他の節点のバリア範囲外にある。

上記の手法を用いて、直径 10.0cm、高さ 30.0cm の円柱にバリア範囲 2mm、終了条件を節点を生成する間隔が 5 分以上開いたときに配置を終了することとして節点を生成した結果、72 時間(3 日間)経過後も節点生成作業の終了条件が満たされず、処理が終了しなかった。その理由として、実時間で 3 分間に 1 つ程度の速度で新しい節点が配置されていくことがあげられる。そこで、終了条件の間隔を実時間で 3 分間プログラムを回し続けたものにとすると、希望する密度の節点群が得

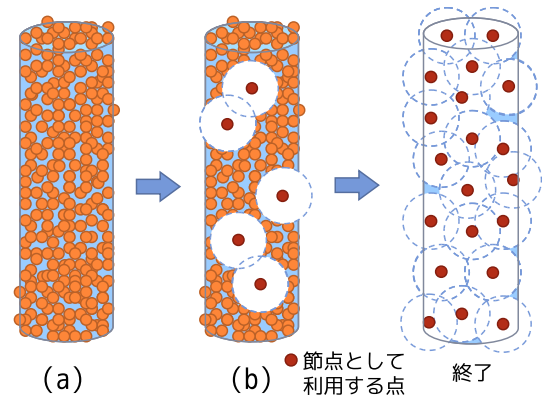


図-3 節点削除方式

られる前に節点生成が終了した。閾値 3 分では、高い確率で生成終了条件が満たされる事例が発生する。ここにはパーコレーション的な相転位¹¹⁾の存在がうかがわれ、閾値は臨界点に対応している。パーコレーション的な相転位とは、ある閾値を境に系の振る舞いが変わる現象である。節点を逐次的に生成する手法ではプログラム終了のための待ち時間が、ある閾値以下であれば節点密度の条件を満たす確率が極めて低く、ある閾値より大きければ発見できる確率が極めて低い隙間を探しつづけ、プログラム終了までに膨大な時間を費やすことになる。本問題ではパーコレーションで扱う諸量の定義式や、クラスターの大きさ、周縁クラスターの総数を求めることができないため、閾値の設定が困難である。現在入手可能な四面体非構造メッシュジェネレータが節点のランダム配置を採用していない理由の一つは、この逐次的な節点配置の裏にあるパーコレーション的な相転移であると考えられる。(なお、ここまで述べた計算と以降の計算に用いた CPU は、Intel Core i7 920 (2.67GHz) であり、マシンのメモリサイズは 12GB である。)

節点を逐次的に生成する限り、このパーコレーション相転移の問題は回避できないため、以下に示す節点削除方式による節点生成を提案する。

(2) 節点削除方式

節点削除方式は

1. 物体内に高密度で点を生成する(図-3(a))
 2. 点群から節点として利用する点を抜き出す
 3. バリア範囲内にある他の点を削除する(図-3(b))
- という順序で節点を配置していく方法である。この方法を用いれば、節点を逐次的に生成する手法とは異なり、節点生成可能な領域にすでに点が存在するので、当てはまる点を探し出す必要がなくなり、それらを偶然発見することに費やす時間がなくなる。

上記の手法を用いて直径 10.0cm、高さ 30.0cm の円柱にバリア範囲 2mm で節点を配置した結果、節点数 118,819 の配置を 20 分 24.7 秒で終了した。この時間の

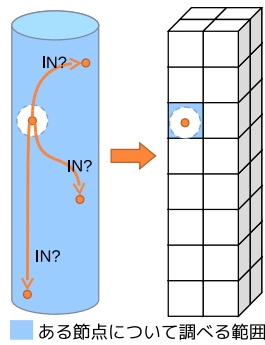


図-4 円柱をボックスに分けたときの探索範囲

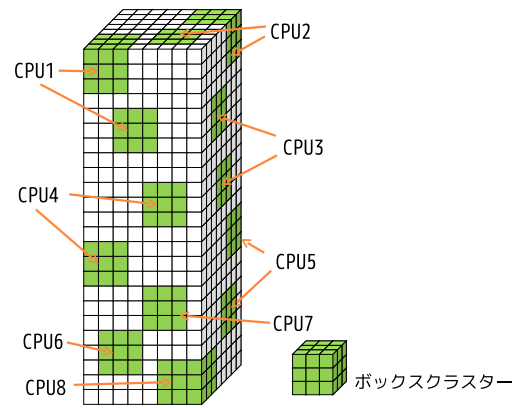


図-7 ボックスクラスターの割り当て

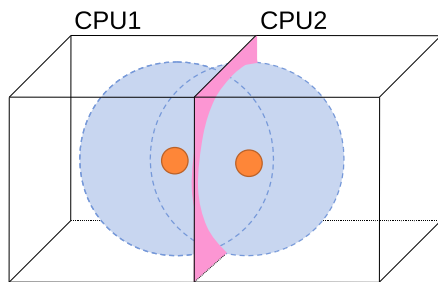


図-5 ボックスの境界付近

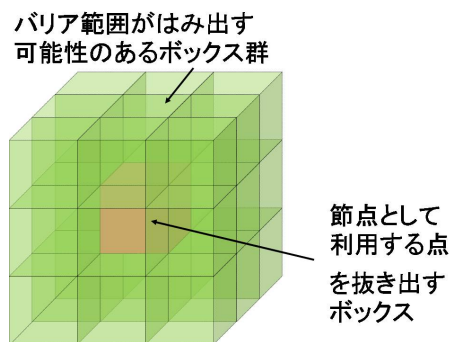


図-6 ボックスクラスター

ほとんどは節点の削除に費やされており、点を高密度（バリア範囲内に 10 個の節点が存在する密度）で発生させる作業はウォールクロックタイムで 1.64 秒で完了していた。よって、点を削除する作業の効率を上げることが、節点削除方式全体の効率向上につながる。

点を削除する作業の遅延要因は、ある点のバリア範囲内にあるかどうか調べる動作をすべての点に対して行ったため、図-4 の左図のように明らかにバリア範囲の外である領域も調べていたことである。これを解決するためには、物体内をいくつかのボックスに分け、自分の所属するボックス内の点のみを調べれば良い。こうすると、図-4 の右図のようにある節点の近傍以外の不要な領域を探索なくなり、作業時間が短縮される。

(3) ボックスクラスターによる並列化

節点の生成・配置の時間をさらに短縮するため、節点を削除するプロセスを並列化する。

本研究では OpenMP を用いて並列化をした。OpenMP は共有メモリを用いた並列化をするので、別 CPU が同アドレスに同時に書き込むことを避けるための工夫が必要となる。各ボックスを各 CPU に割り当てて並列化すると図-5 のようにボックスとボックスの境界付近にある節点を削除する場合に自分の所属するボックス以外のボックスの点も消す必要がある。これでは他の CPU の領分を侵すことになり、データレースが発生する。この問題を解決するために図-6 のようなボックスクラスターを用いる。

ボックスクラスターは節点として利用する点を抜き出すボックスと、そのボックスを構成する 8 点を共有した周りのボックス 26 個の、合わせて 27 個のボックスをまとめたものである。ボックスクラスターを各 CPU に渡すことにより、バリア範囲のはみ出る可能性のある隣接したボックスも各 CPU が保持することになり、節点の多重削除をしなくなる。このボックスクラスターを図-7 のように各 CPU に割り当てて並列化した結果、節点数 1,053,215 の節点の生成が 35.4 秒で終了した。なお、このボックスクラスターによる並列化はボックス数を一定としており、ボックス内の節点数に制限がない点においてバケット法¹²⁾とは異なる。バケット法はバケット内の節点数を一定としているが、節点削除方式でこの手法を用いると節点を削除する前の節点数を基準としてバケットを生成することになり、削除後に空のバケットが発生する可能性が高い。その理由は、節点削除方式では、削除前に所望密度の 10 倍の密度で節点を配置することである。1 バケットに含まれる節点数が変動する場合、バケット法のように 1 バケットに含まれる節点数を一定としている方法はバケットの再割り当ての必要性などの理由から不適切である。さらに、バケット法では節点をランダム配置することができない。これらの理由から、ボックス内の節点数に

表-1 節点のランダム配置に要する計算時間

方法	所要時間 (節点数)
逐次式	over 72hr. (118,819)
節点削除	20min. 25sec. (118,819)
ボックスクラスター	35sec. (1,053,215)



図-8 円柱メッシュの外観

制限を設けないボックスクラスターによる節点削除の並列化を採用した。表-1 に節点のランダム配置に要する計算時間の変化を示す。

4. ランダムメッシュジェネレータの性能検証

前節で詳述した方法でランダム配置した節点群に Delaunay 分割を施すことにより、四面体非構造メッシュが作成される。Delaunay 分割の計算機上への実装は既に確立されており、多くのソフトウェアが開発されている。これらのソフトウェアのうち、本研究ではソースコードも公開されているフリーソフト TetGen¹³⁾を用い、節点群を渡し、要素群を得る関数を作成した。

メッシュの品質改善についても、標準的な手法が確立されている。本研究では一様密度の節点配置でのメッシュ生成を行っているため、要素のアスペクト比改善のためには、Laplacian Smoothing を用い、Sliver 要素除去のためには、Sliver 要素内に新たな節点を挿入し、要素を分割する方法¹⁴⁾を用いた。Smoothing 処理と Sliver 要素除去処理は共に 1 回ずつおこない、おこなった順番は Smoothing 処理、Sliver 要素除去処理の順である。

以上の手法を用いて直径 10.0cm、高さ 30.0cm の円柱にバリア範囲 1mm、seed=2 で生成したメッシュ（節点数 1,093,401、要素数 6,861,612）を図-8、図-9 に示す。

本節では、ランダムメッシュジェネレータの性能検証として、図-8 のメッシュおよび seed 番号を変えて生成した節点配置の異なるメッシュ群を用いて、メッシュのランダム性と要素の品質について述べる。

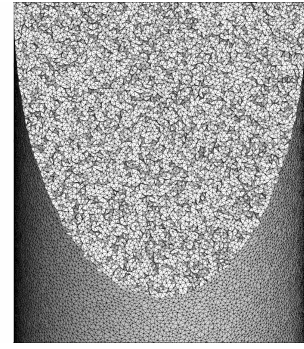


図-9 円柱メッシュの内部（拡大図）

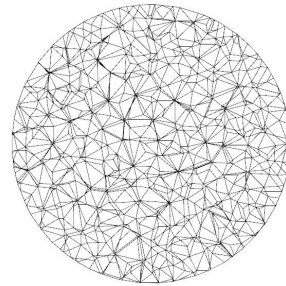


図-10 円柱モデルの断面図

4.1 メッシュのランダム性

メッシュのランダム性は seed 番号によって節点配置がばらばらであることで確認できると考えられる。そこで、以下の手順で節点配置を観察した。なお、本手法で用いた乱数は線形合同法による疑似乱数であるが、その規則性は無視できる。これは、PDS-FEM のモンテカルロシミュレーションにおいては、微小な領域内でのメッシュの差異が重要となるので、全体としての規則性は影響が無視できるほどに小さいと考えられるからである。

1. 直径 10.0cm、高さ 30.0cm の円柱にバリア範囲 1mm でメッシュを生成する。このとき、seed 番号を 1~200 と変化させ、異なる節点配置のメッシュを 200 個生成する。
2. それぞれのメッシュの下から 15cm の断面をとる
3. 断面を 10000 個の格子に区切る
4. 格子の中の、断面に現れた三角形と四角形の頂点を数える
5. 200 断面分の総和を格子ごとにとる

円柱モデルの断面図（図-10）に現れる三角形と四角形の頂点とは、四面体メッシュを構成する辺と断面との交点ということになる。節点の配置がランダムであれば、生成されるメッシュもランダムである。よって、そのメッシュの辺の位置もランダムであると考えられるので、本検証では断面に現れる頂点のランダム性を、節点配置のランダム性の指標として用いる。なお、格子の番号のつけ方は図-11 のようにする。

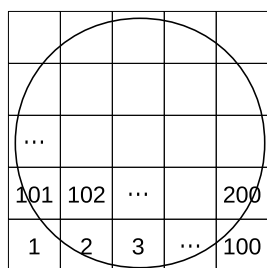


図-11 格子の番号のつけ方

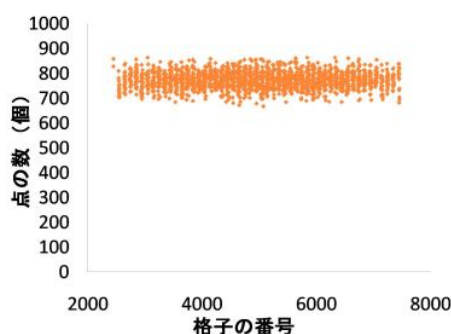


図-12 円柱の1断面の中心部での要素断面の頂点の分布

上記の手順に従い、格子番号と格子に含まれている点の総数を得た。モデルの境界付近では格子が境界で切断されて有効格子面積が小さいので、断面図の中心部分、直径6cmの円内に該当する格子のみを抽出して図-12を得た。

直径10.0cmの円柱断面の中心から直径6.0cmの円内に分布する1.2mm四方の格子の数は2112個。図-12より、それぞれの格子の中に700～850個の頂点が含まれていることがわかった。また、全ての格子内に要素断面の頂点が見られる均一さで分布していることがわかった。

4.2 メッシュの品質

メッシュの品質はアスペクト比と体積で評価される。ランダム性の検証で使用した200個の円柱モデルのうちseed = 1～3の円柱モデルの各メッシュのアスペクト比の累積度数分布と体積のヒストグラムを比較したところ、seedによる差異は確認されなかったため、以降の議論ではseed=2の円柱モデルの品質についてのみ検討する。

今回生成したメッシュは一様メッシュなので、メッシュの体積が一様であることが望ましい。また、アスペクト比については、正四面体のアスペクト比3が、理論上の最小(最適)値なので、アスペクト比が3に近い要素が多いほど質の高いメッシュである。seed = 2の円柱モデルの、品質改善処理をしていない(SmoothingもSliver要素除去もしていない)メッシュ、Sliver要素

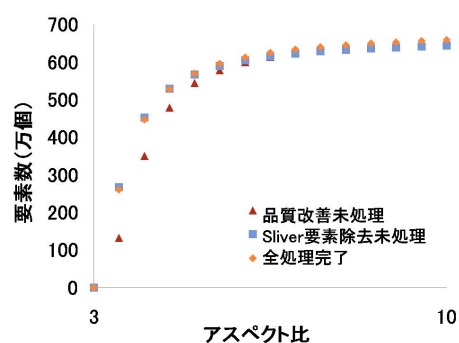


図-13 アスペクト比の累積度数分布

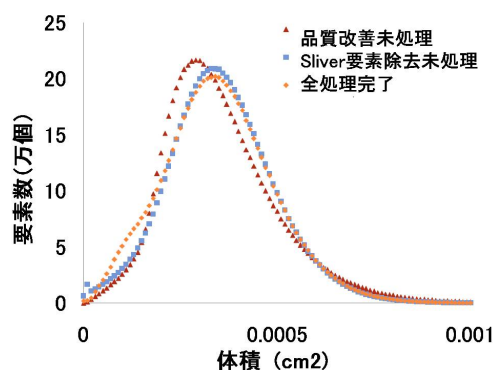


図-14 各メッシュの体積のヒストグラム

除去処理をしていないメッシュ、全ての処理を終えたメッシュのアスペクト比の累積度数分布と体積のヒストグラムを求めた。

図-13より、全メッシュ中のアスペクト比が3.5以下のものや、4.0以下のものが、品質の改善処理をしていないメッシュよりも品質の改善処理をした2つのメッシュの方が増えていることが確認できる。これより、本研究で用いたSmoothingでアスペクト比の大きい、質の悪いメッシュを減らすことができていると言える。なお、図-13において全処理完了後のメッシュの方が高アスペクト比の要素数が増えている原因は、Sliver要素除去処理時にメッシュを分割し、増加させたことである。メッシュの母数が増えたことに伴って、累積度数分布にすると同アスペクト比のメッシュ数は増加した。

図-14では、Sliver要素除去処理をしていないメッシュで、0.00002cm²以下の体積を持つメッシュが増えている。これが、Sliver要素である。また、Sliver要素を除去した後(全ての処理を終えたメッシュ)は0.00002cm²以下の体積を持つメッシュが減っている。そして、Sliver要素除去でSliver要素の周囲のメッシュが分割されたことに伴い、0.0001cm²から0.0002cm²の体積を持つメッシュが増えている。

5. コンクリート円柱試験体の FEM モデル自動生成

本論文の冒頭でも述べたように、コンクリートなどの不均質材料の中での破壊進展には、粗骨材や空隙など、不均質体を構成する材料の配置が強い影響を与える。本節では、コンクリート円柱試験体の水平断面を多数撮影した X 線 CT 画像群を用いて、四面体非構造メッシュの各要素に材料を適切に割り当てて、FEM モデルを自動生成する手法について述べる。

入力データとして用いた X 線 CT 画像は若木¹⁵⁾により撮影されたコンクリート円柱試験体（直径 57mm、高さ 114mm）の断面画像である。図-15(a) のような 1003×995 pixel（撮影範囲、約 60mm 四方）の画像が、高さ方向 0.39mm 間隔で 292 断面ある。通常、イメージベースの有限要素法では CT 断面画像をそのままボクセル要素に対応させる。しかし、本研究で念頭に置いているのは要素形状の違いが破壊の進展経路に影響を及ぼす PDS-FEM を用いた破壊解析であるため、構造メッシュであるボクセルの利用は好ましくない。四面体非構造メッシュの中の各要素にモルタル・空隙・粗骨材の三相から適切なものを自動的に割り当てなくてはならない。これをもって破壊解析のためのコンクリートの FEM モデルの自動生成とする。

断面画像データを割り当てる四面体非構造メッシュは、前節で述べたランダムメッシュジェネレータを用いて作成する。コンクリート円柱試験体の材料分布を可能な限り詳細に表現するためには、要素サイズは小さいほうが良いが、要素サイズが X 線 CT の断面画像の高さ方向の撮影間隔よりも小さくなると、不確定な補間に基づいて材料を割り当てられる要素の割合が増え、モデルの正確性を損なう。本論文でとりあげた X 線 CT 画像データは、平面方向の分解能（ピクセルサイズ）0.06mm に対して、高さ方向の分解能が 0.39mm と約 6 倍の開きがある。このように断面のデータの分解能に対して高さ方向の分解能が低いという状況は、多くの X 線 CT 断面画像に共通の問題と考えられる。この分解能のコントラストをうまく処理することと、適切な要素サイズを選択することが、X 線 CT 断面画像から三次元 FEM モデルを作成する際のポイントと言える。本研究では、全ての要素に少なくともひとつの CT スキャン断面との重なりをもたせつつ、高い空間分解能を実現するために、要素平均サイズ（1 辺の長さ）を 0.5mm とし、節点数約 100 万、要素数約 650 万の四面体非構造メッシュをランダムメッシュジェネレータで生成し、このメッシュに材料の割り当てを行う。

FEM モデル自動生成は以下の手順に則って行う。

1. CT 断面画像の 3 値化
2. 各断面での要素断面と材料の対応の把握
3. 重みづけ多数決方式による各要素の材料の割り当て

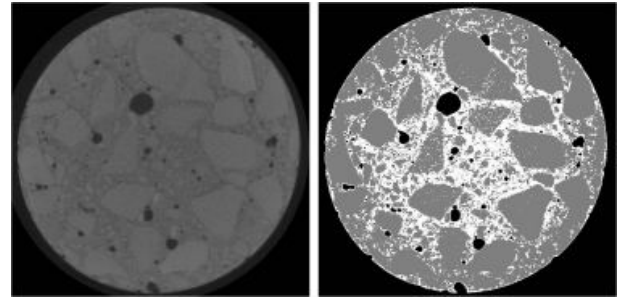


図-15 X 線 CT 断面画像とその三値化画像

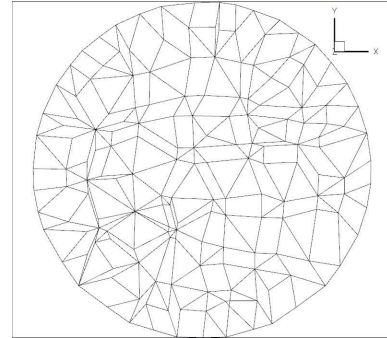


図-16 四面体非構造メッシュの断面

5.1 CT 断面画像の三値化

コンクリートをモルタル・空隙・粗骨材からなる三相材料とみなし、CT スキャン画像の輝度値に応じて、白（モルタル）・黒（空隙）・灰色（粗骨材）に三値化する。三値化に先立ち、Harmonic Mean Filter（調和平均フィルター：近傍画素の調和平均を用いる非線形空間フィルター）を用いて、材料間の輝度値のコントラストは保存しつつ、画像内の高周波ノイズを除去する。三値化に際し、全断面に共通な材料間の閾値の設定にはモデル作成者の判断が入る。モデル作成の完全自動化は、この点でのみ実現されていない。しかし、熟練を要しない簡便な判断により、閾値を 2 つだけ決定すれば、図-15(b) に示すような三値化画像が、全断面について得られる。

5.2 各断面での要素断面と材料の対応の把握

図-15(b) の三値化画像の各ピクセルに対応する材料の ID と図-16 の要素断面（図を見やすくするために、粗いメッシュの要素断面を示している。実際に用いたメッシュの断面には平均で約 15,000 個の要素断面が存在する。）との対応を取る。具体的には、各ピクセルがどの要素断面の内部に存在するかを判定し「要素 i の断面内に空隙が x ピクセル、モルタルが y ピクセル、粗骨材が z ピクセル存在する」というふうに、各要素に各材料のヒット回数を蓄積していく。これを全断面について行う。

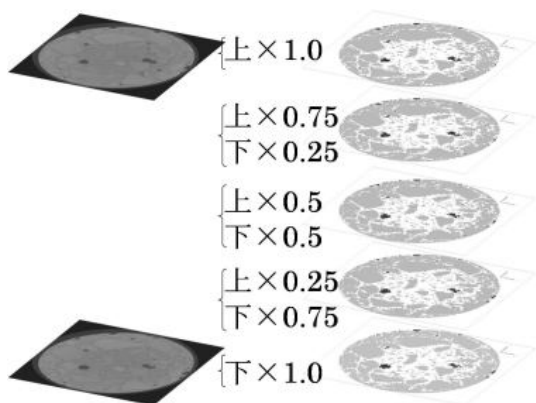


図-17 垂直方向画像補間の重みづけ

5.3 重みづけ多数決方式による各要素の材料の割り当て

上記のように CT 画像の各断面で要素断面と材料の対応をヒット回数として蓄積していくが、このとき問題となるのが高さ方向の分解能の低さ（断面間隔の大きさ）である。要素の平均サイズは 0.5mm であり、断面間隔より大きい、実際には断面の間に位置して材料を割り当てられない要素が多く存在する。これらの要素にも材料を割り当てるために、図-17 に示すように CT 画像断面の間の補間を、データの存在する断面からの距離に基づく重みづけにより行う。具体的には、1) CT 画像断面の間にメッシュの断面を設定し、この断面での要素断面形状を求める。2) この要素断面と、上下に存在する CT 画像断面との間で要素断面と材料の対応を取る。3) 上面のヒット回数と下面のヒット回数を距離に応じて重みづけして足し合わせ、要素のヒット回数として蓄積する。

以上のように、四面体非構造メッシュを X 線 CT 断面画像の高さ方向の間隔よりも短い間隔でスライスし、CT 断面と一致するメッシュ断面についてはそのまま材料との対応を取り、一致しないメッシュについては重みづけして対応を取る。このようにして、全ての要素について材料のヒット回数を蓄積し、全ての断面の対応の把握が終わった後で、各要素について空隙のヒット回数 x 、モルタルのヒット回数 y 、粗骨材のヒット回数 z を比較し、最大のヒット回数を記録した材料をその要素に割り当てる。つまり、ヒット回数の多数決により各要素の材料を決定する。

6. モデル生成の例

以上の手順に従い、コンクリート円柱試験体の X 線 CT 断面画像群から、FEM モデルを作成した。節点数約 100 万、要素数約 650 万の非構造四面体メッシュの各要素に、空隙・モルタル・粗骨材の材料定数がそれぞれ割り当てられた三相複合材料の FEM モデルで

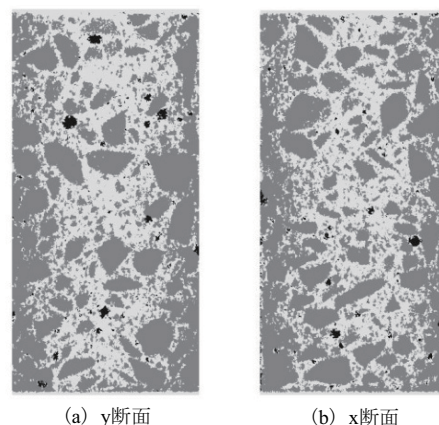


図-18 コンクリート円柱試験体の FEM モデルの垂直断面

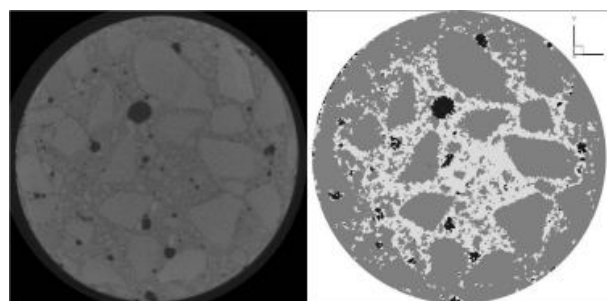


図-19 X 線 CT 断面画像とモデル断面画像の比較

ある。

モデルの垂直断面を図-18 に示す。X 線 CT 断面画像は図-18 の高さ方向にはとびとびにしか存在しないが、データのないところも自然に補間されていることが見て取れる。また、図-19 は、X 線 CT 画像が存在する断面で、X 線 CT 断面画像の情報が正しく FEM モデルに反映されていることが分かる。

ただし、図-19 右のモデル断面画像から見てとれるように、コンクリート試験体の表面付近で、多くの要素が「粗骨材」と判定されている。X 線 CT 画像を撮影した、実際のコンクリート試験体の粗骨材率は若木の文献¹⁵⁾には記載されていなかったが、本研究で得られたモデルの粗骨材率は約 64%であり、通常のコンクリート試験体よりも大きい。この理由としては、X 線 CT 画像の輝度値が中心部と周辺部で異なることを、三値化の際の閾値設定に反映させていないことが挙げられる。この影響により、図-15 右の三値化画像の周辺部は、ほとんど粗骨材となっている。より正確なモデル作成のためには、X 線 CT スキャン画像のキャリブレーションを行い、この結果を三値化の際の閾値設定に反映させなくてはならない。

7. まとめ

PDS-FEM を用いた破壊解析のための FEM モデルの自動生成手法として、同じ形状を持つ解析対象に対して、異なったメッシュを多数作成するランダムメッシュジェネレータと、コンクリート円柱試験体の X 線 CT 画像情報を四面体非構造メッシュに対応させてコンクリートの詳細 FEM モデルを自動生成する手法を開発した。個々の要素については、Sliver 除去手法の洗練、粗骨材・モルタル・空隙の三相複合材料としてモデル化したコンクリートに、粗骨材まわりの柔らかいモルタルを導入して四相複合材料とする、などの改良検討項目が挙げられるが、いずれも技術的困難は予想されない。

現在、PDS-FEM による圧縮破壊面の表現を解析コードに実装途中であり、この実装完了後のステップは、本研究で作成した多数のモデルを用いたモンテカルロシミュレーションの実行である。

参考文献

- 1) Wawrzynek, P.A. and Ingraffea, A.R.: Interactive approach to local remeshing around a propagating crack, *Finite Elements in Analysis and Design*, 5(1), 87-96, 1989.
- 2) Belytschko, T., Lu, Y.Y. and Gu, L.: Crack propagation by element-free Galerkin methods, *Engineering Fracture Mechanics* 51 (2), 295-315, 1995.
- 3) Yagawa, G. and Yamada, T.: Free mesh method: a new meshless finite element method, *Computational Mechanics* 18 (5), 383-386, 1996.
- 4) Sakaguchi, H. and Muhlhaus, H.S.: Mesh free modelling of failure and localization in brittle rock, *Deformation and Progressive Failure in Geomechanics*, Asaoka, Adachi and Oka (eds). Pergamon, 15-21, 1997.
- 5) Pimanmas, A. and Maekawa, K.: Multi-directional fixed crack approach for highly anisotropic shear behavior in pre-cracked RC members, *J. Materials, Conc. Struc., Pavements, JSCE*, No. 669/V-50, pp. 293-307, 2001.
- 6) Nagai, K., Sato, Y., Ueda, T. and Kakuta, Y.: Numerical Simulation of Fracture Process of Concrete Model by Rigid Body Spring Method, *コンクリート工学年次論文報告集*, Vol.24, No.2, pp.163-168, 2002.
- 7) Bouchard, P.O., Bay, F., Chastel, Y. and Tovenar, I.: Crack propagation modelling using an advanced remeshing technique, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 189 (3), 723-742, 2000.
- 8) Murotani, K., Yagawa, G.: Hierarchical meshing for the adaptive finite elements, *Computational Methods in Applied Sciences*, Vol. 14, Springer Verlag 2008, J. Eberhardsteiner, et al.(Editor), pp.291-305.
- 9) Hori, M., Oguni, K. and Sakaguchi, H.: Proposal of FEM implemented with particle discretization for analysis of failure phenomena, *Journal of the Mechanics and Physics of solids* 53 (3), 681-703, 2005.
- 10) Baker, T.J.: Automatic Mesh Generation for Complex Three-Dimensional Regions Using a Constrained Delaunay Triangulation, *Engineering with Computers* 5, pp.161-175, 1989.
- 11) 小田垣 孝: パーコレーションの科学, 裳華房, 1993.
- 12) Inaba, M., Fujisawa, T., Okuda, H. and Yagawa, G.: New local mesh generation algorithm for the free mesh method, *Dynamics and Design Conference* 338, 2002-09-13
- 13) <http://tetgen.berlios.de/>
- 14) Zhenqun Guan; Chao Song; Yuanxian Gu: The boundary recovery and sliver elimination algorithms of three-dimensional constrained Delaunay triangulation, *Int. J. Numer. Meth. Engng* 68 pp.192-209, 2006.
- 15) 若木伸也: "X 線 CT 法を用いたコンクリート円柱供試体の内部構成情報の抽出", 京都大学工学部地球工学科土木工学コース卒業論文, 2009.

(2010 年 3 月 9 日 受付)