応用力学論文集 Vol.13, pp.57-63 (2010 年 8 月) 土木学会

PDS-FEM の亀裂入り構造要素の導出

Formulation of PDS-FEM cracked structural elements

藤田航平* ・堀宗朗**
Kohei FUJITA and Muneo HORI

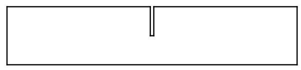
*学生 東京大学 工学部 社会基盤学科
**正会員 Ph.D. 東京大学教授 地震研究所 (〒 113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1)

Analysis of cracked structural members using solid elements of Finite Element Method (FEM) are computationally expensive, and cracked structural elements are substitutes for analyzing cracked members. This paper presents the formulation of cracked structural elements. Major points of the formulation are: 1) transformation of the functional of a 3-dimensional linear-elastic continuum to that of a structural member, and 2) discretization of the displacement function in the functional using particle discretization. Numerical experiments show that the elements derived possess adequate accuracy in case the crack is shallow. This suggests the applicability of cracked structural elements to practical use.

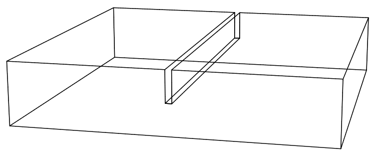
Key Words : *finite element of structural members, crack, particle discretization*

1. はじめに

大型構造物の有限要素法解析では，大規模な数値計算を必要とするソリッド要素の代わりに，梁・板要素などの構造要素[1),2),3)] が使われることが多い．しかし，通常の構造要素では，部材表面の疲労亀裂による剛性低下や疲労亀裂の進展を数値解析することは難しい．通常の構造要素の限界を超えるため，亀裂入り構造要素の導出が望まれる．なお，亀裂入り要素とは，図–1 に示すように，任意深さの亀裂が中央に入った要素である．



a) 亀裂入り梁要素



b) 亀裂入り板要素

図–1 亀裂入り構造要素

亀裂入り構造要素の導出は簡単ではない．これには二つの理由がある．第一の理由は，亀裂が入ることで変わる部材の変形特性を明らかにすることが難しい点である．構造力学では，部材の変形特性の分析にたわみ角や断面力を用いた直感的な図形解法を使っているが，図形解法では亀裂が変形特性に与える影響を分析することは難しい．第二の理由は，関数の離散化に滑らかな基底関数を使う有限要素法は，本来，亀裂という不連続性を持つ変位関数の数値解析に適さないという点である．

上記の問題を解決するため，構造力学の母体である連続体力学に立ち返って，構造要素の導出の手順を分析する．微小変形・線形弾性・準静的状態を仮定すれば，構造部材は，特殊な形状を持つ 3 次元弾性体である．連続体力学では，3 次元弾性体には境界値問題が設定されている．しかし，変位が 3 変数関数であるためこの境界値問題を解析的に解くことは難しい．このため，構造力学では，構造部材の変形特性を考慮した仮定を変位関数に加える．例えば，梁の変位は 1 変数関数，板の変位は 2 変数関数を仮定する．前述の図形解法を使って，仮定された変位関数の境界値問題を設定し，変位関数を離散化することで構造要素を導くのである．一方，3 次元弾性体の境界値問題には，等価な変分問題が設定されている．この変分問題の汎関数に，構造力学で仮定された変位関数を代入して変分を計算すると，構造部材の境界値問題を導くことができる．さらに，変位関数を離散化すると，汎関数の変分から構造要素を導出することもできる．

構造部材に亀裂が入った場合でも，同じ手順で構造要素が導出できる．連続体力学では亀裂は連続体の境界として取り扱われるため，3 次元弾性体の汎関数に亀裂に対応する境界を加えるだけで，亀裂が変形特性に与える影響を考慮できる．さらに，不連続性を表現する離散化を使うことで，亀裂入り構造要素も計算できる．粒子離散化手法 (Particle Discretization Scheme, PDS)[4),5)] は，特性関数を基底関数とする離散化であり，不連続性を表現することができる離散化である．汎関数の変分や PDS の計算は煩雑であるが機械的であり，

直感に訴える図形解法とは全く異なるものの，亀裂入り構造要素の導出が可能となる．なお，この手順で導出された亀裂入り構造要素の精度は不明である．精度の検証が不可欠である．

上記を背景とし，本論文では，亀裂入り構造要素の導出手順を確立し，実際に，梁と板の亀裂入り構造要素を導出する．ソリッド要素を使った計算との比較から，亀裂入り構造要素の精度も検証する．本論文の構成は以下のようである．第 2 章において，亀裂入り構造要素の導出手順を説明し，導出のための汎関数や離散化の定式化を示す．具体例として，梁と板の亀裂入り構造要素の導出を第 3 章に示す．第 4 章において亀裂入り板要素の精度を検証する．

2. 亀裂入り構造要素の導出手順

最初に基となる連続体の汎関数を定義する．等方線形弾性体を B，変位，歪，応力の関数を $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{\epsilon}$，$\boldsymbol{\sigma}$，直交座標 x_i での成分を u_i，ϵ_{ij}，σ_{ij} とし，変位境界条件を仮定すると，汎関数は

$$\mathcal{L}^B[\boldsymbol{u}] = \int_B \left\{ \frac{1}{2}\epsilon_{ij}c_{ijkl}\epsilon_{kl} + \sigma_{ij}(u_{i,j} - \epsilon_{ij}) \right\} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad (1)$$

となる．添え字 i, j, k, l は 1 から 3 までの範囲で和をとっている．ここで c_{ijkl} は等方弾性テンソルであり，$\mathcal{L}^B$ の [ ] の中から $\boldsymbol{\epsilon}$ と $\boldsymbol{\sigma}$ を省いている．勿論，$\boldsymbol{\epsilon}$ と $\boldsymbol{\sigma}$ の変分から構成則 $\sigma_{ij} = c_{ijkl}\epsilon_{kl}$ と歪-変位関係 $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ が，さらに $\boldsymbol{u}$ の変分から支配方程式 $(c_{ijkl}u_{k,l})_{,i} = 0$ が導かれる．

2.1 連続体力学の枠組みでみた構造部材

式 (1) の $\boldsymbol{u}$ は 3 変数であるが，構造力学では，構造部材の変形特性を考慮してこの変位を 1 変数ないし 2 変数関数として近似する．梁や板の場合，直交座標が関数の変数となるが，曲がり梁やシェルでは部材に沿って導入された曲座標が関数の変数となる．いずれにせよ，1 変数ないし 2 変数関数の変位を仮定することは，構造部材を 3 次元空間の中の 1 次元ないし 2 次元の多様体 M と考えることである．多様体 M の座標と変位関数を $\boldsymbol{\xi}$ と $U_p(\boldsymbol{\xi})$ とすると，変形特性を考慮した変位の仮定はこの $U_p(\boldsymbol{\xi})$ を決めることになる．さらに，この $U_p(\boldsymbol{\xi})$ を座標変換した B の変位関数を $\mathcal{L}^B$ に代入することで，M で定義された関数 $\boldsymbol{U}$ の汎関数，

$$\mathcal{L}^M[\boldsymbol{U}] = \int_M (U_p \text{ の関数})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \quad (2)$$

が導かれる．ここで () の中の U_p の関数は，実際に $U_p(\boldsymbol{\xi})$ の座標変換を $\mathcal{L}^B$ に代入して計算される．

式 (1) の $\mathcal{L}^B$ は 3 次元の積分であるが，式 (2) の $\mathcal{L}^M$ は 1 次元ないし 2 次元の積分である．$\mathcal{L}^B$ から $\mathcal{L}^M$ への変換で，例えば，梁の場合は断面の，板の場合は板厚方向の積分が行われる．断面や板厚方向の積分領域と座標を H と $\boldsymbol{\zeta}$ とすると，正確には B の積分を

$$\mathcal{L}^{M\times H}[\boldsymbol{u}] = \int_M \left(\int_H u_i \text{ の関数 } J \,\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta} \right) \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \quad (3)$$

とし，$\boldsymbol{\zeta}$ の積分を計算した後に式 (2) の右辺が導かれるのである．ここで，$\boldsymbol{\xi}$ が 1 次元ないし 2 次元であれば $\boldsymbol{\zeta}$ は 2 次元ないし 1 次元となるから，$\boldsymbol{\xi}$ と $\boldsymbol{\zeta}$ を合わせた 3 次元の座標を $\boldsymbol{\xi}'$ とすると，式 (3) の右辺の J は $\boldsymbol{x}$ から $\boldsymbol{\xi}'$ への座標変換のヤコビアンである．板部材を例に，式 (3) から式 (2) への変換を付録 I で例示する．

敢えて M を多様体と考えなくとも，(曲) 座標 $\boldsymbol{\xi}'$ を使って仮定された $\boldsymbol{U}$ を直交座標 $\boldsymbol{x}$ の $\boldsymbol{u}$ に変換し，$\boldsymbol{\zeta}$ の積分を計算し，式 (2) を導く，と考えることもできる．この考え方では，M は (曲) 座標の積分領域である．また M を多様体と考えるか考えないかによらず，数式処理は同一である．しかし，本論文では，数理的には構造部材が多様体 M として扱われ，$\boldsymbol{U}$ が $\boldsymbol{\xi}$ の関数となることを強調するため，M を多様体として説明する．

2.2 亀裂入り構造要素の導出手順

亀裂入り構造要素は，最初に，亀裂が入った構造に対応する汎関数を計算することが第一歩である．具体的には，亀裂が入った線形弾性体の汎関数に，構造要素のために仮定された変位を座標変換した関数を代入し，積分を計算することである．そして仮定された変位を適当に離散化し，この離散化された変位関数を代入することで亀裂入り構造要素が導出される．これが導出手順の概略であり，以下に詳細を示す．

3 次元弾性体 B に亀裂が入った場合，亀裂面を境界とする薄い領域が B から除かれることになる．残りの領域を B' とすると，汎関数の積分領域が B から B' に代わることになる．すなわち，式 (1) の $\mathcal{L}^B$ が $\mathcal{L}^{B'}$ となった結果，式 (3) の $\mathcal{L}^{M\times H}$ が $\mathcal{L}^{M\times H'}$ に代わる．亀裂が入ったため，H が H' に代わるのである．亀裂が入っていない場合と同様，右辺の $\boldsymbol{\zeta}$ の積分を計算すると式 (2) の $\mathcal{L}^M$ が導かれる．勿論，H が H' に代わる結果，右辺の () の中の U_p の関数は変わる．

次に離散化を説明する．多様体 M の適当な領域分割を $\{\Phi^\alpha\}$ とし，小領域 Φ^α の特性関数を ϕ^α とする (Φ^α の中では $\phi^\alpha = 1$，外では $\phi^\alpha = 0$)．この $\{\phi^\alpha\}$ を基底関数として離散化された関数 $f = \sum f^\alpha \phi^\alpha$ は，各 Φ^α の境界で不連続となる．別の領域分割 $\{\Psi^\beta\}$ とその特性関数 $\{\psi^\beta\}$ を使って，f の微係数を $f_{,p} = \sum g_p^\beta \psi^\beta$ として離散化する．$\{\phi^\alpha\}$ と $\{\psi^\beta\}$ を使った関数とその微係数の離散化が PDS である．PDS の離散化を使った FEM を PDS-FEM と呼ぶ．

PDS-FEM の亀裂入り構造要素は，形式的には，$\mathcal{L}^M$ の汎関数に $\boldsymbol{U} = \sum \boldsymbol{U}^\alpha \phi^\alpha$ を代入することで計算される．しかし，実際は，離散化された $\boldsymbol{U}$ を座標変換して $\boldsymbol{u}$ を求め，元の $\mathcal{L}^{B'}$ に代入するほうが計算は簡単である．これは H' での積分を実際に行うことができるか

らである．亀裂入り板要素を例に，$\mathcal{L}^{B'}$ の積分計算の詳細を付録 II で説明する．

3. 亀裂入り構造要素の導出例

前章で示された手順に従って，実際に亀裂入り梁要素と板要素を導出する．変位の仮定と離散化を詳しく説明し，亀裂の深さに依存して変わる要素剛性マトリクスを示す．

3.1 亀裂入り梁要素

簡単のため，梁の曲げ変形に絞って亀裂入り要素を導出する．勿論，反り変形等へ拡張することも可能である．梁を B，その中立軸を 1 次元多様体 M とし座標 ξ_1 を取る．ξ_1 と直交する方向に (ζ_2, ζ_3) を取り，変形後の平面保持を仮定することで変位を次のように設定する．

$$\{U_1, U_2, U_3\} = \{-\zeta_2 W_{,1}(\boldsymbol{\xi}), W(\boldsymbol{\xi}), 0\}.$$

勿論，U_1 は ξ_1 の方向である．$\boldsymbol{\xi}$ と $\boldsymbol{\zeta}$ から決まる $\boldsymbol{\xi}'$ は直交座標となるから，$\boldsymbol{x}$ をこれと一致させると，式 (1) の $\mathcal{L}^B$ の被積分関数は

$$\frac{1}{2} c_{1111}\, \epsilon_{11}^2 - \sigma_{11}(\zeta_2\, W_{,11} + \epsilon_{11})$$

となる．

次に PDS を使った離散化を行う．前章で説明された PDS を拡張し，分割領域 Φ^α の基底関数に，特性関数と線形関数を使う．すなわち，$1 \times \phi^\alpha$ と $\xi_1 \times \phi^\alpha$ であり，この基底関数の係数は変位と撓み角に対応する．変位の微係数と関連するため，歪と応力は Ψ^β の基底関数 ψ^β を使った $\zeta_2 \times \psi^\beta$ と $\zeta_2 \xi_1 \times \psi^\beta$ を基底関数として離散化する．Ψ^β の基底関数に ζ_2 が含まれているのは，梁の厚さ方向によって変化する歪・応力を離散化するためである．なお，ϕ^α も ψ^β も M で定義されているため ξ_1 のみの関数である．

以上の準備を基に，亀裂入り梁要素を計算する．上記の PDS の離散化の結果，梁の両端で変位と撓み角が与えられるため，亀裂入り梁要素の要素剛性マトリクスは次の 4×4 マトリクスとなる．

$$[K] \;=\; \{1 - 3\varepsilon + 6\varepsilon^2 - 4\varepsilon^3\}^2\, [K^0]. \qquad (4)$$

ここで，亀裂深さと矩形断面の梁の高さを d と h とすると $\varepsilon = \frac{d}{h}$ であり，$[K^0]$ は $d = 0$，すなわち，亀裂がない場合の要素剛性マトリクスである．拡張された PDS の結果，この $[K^0]$ は通常の 2 節点 4 自由度梁要素と一致する．

導出された亀裂入り梁要素の精度は不明である．しかし，手順にしたがって，汎関数の数式処理のみで亀裂入り要素が導かれたことは確かである．亀裂が入った場合も，M で仮定された変位は同じである．このため，亀裂の影響は ζ_2^2 の積分領域が H から H' に代わったことにのみに現れることになる．すなわち，亀裂の影響は断面 2 次モーメントの低下であり，式 (4) はこれを表現している．亀裂が入ることで中立軸の位置は変わるが，歪と応力の基底関数に $1 \times \psi^\beta$ を加えることで，この効果を取り入れるとは可能である．

3.2 亀裂入り板要素

梁と同様，板を B，その中立面を 2 次元多様体 M とし，直交座標 (ξ_1, ξ_2) を取る．この座標系と直交する方向に ζ_3 を取り，変形後の平面保持を仮定することで曲げ変形と板面内変形の変位を次のように設定する．

$$\{U_1, U_2, U_3\} = \{V_1 - \zeta_3 W_{,1}, V_2 - \zeta_3 W_{,2}, W\}.$$

ここで $W(\boldsymbol{\xi})$ は曲げ変形に対応する面直角方向の変位であり，$V_1(\boldsymbol{\xi})$ と $V_2(\boldsymbol{\xi})$ は ξ_1 と ξ_2 方向の面内変形の変位である．式 (1) の $\mathcal{L}^B$ の被積分関数は

$$\sum_{i,j,k,l=1,2} \left(\frac{1}{2} \epsilon_{ij} c_{ijkl} \epsilon_{kl} + \sigma_{ij}(V_{i,j} - \zeta_3\, W_{,ij} - \epsilon_{ij}) \right)$$

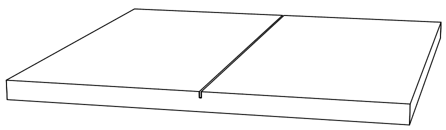
となる．

基底関数に多項式を加えるという PDS の拡張の結果，亀裂がない場合，PDS-FEM の梁要素の要素剛性マトリクスは通常の FEM の要素剛性マトリクスと一致する．同様な拡張を板要素でも試みる．具体的には，V_1 と V_2 は $1 \times \phi^\alpha$ のみを基底関数とし，W は $\{1, \xi_1, \xi_2\} \times \phi^\alpha$ の 3 つの基底関数を用いる．勿論，$\xi_1 \times \phi^\alpha$ と $\xi_2 \times \phi^\alpha$ の係数はそれぞれの方向の撓み角に対応し，$1 \times \phi^\alpha$ は変位に対応する．歪と応力の離散化は Ψ^β の特性関数を使い，$\{1, \zeta_3, \zeta_3 \xi_1, \zeta_3 \xi_2\} \times \psi^\beta$ の 4 つの基底関数を用いる．しかし，このように拡張された PDS-FEM の板要素の剛性マトリクスは，4 節点 12 自由度非適合板要素[1)]とは一致しない．

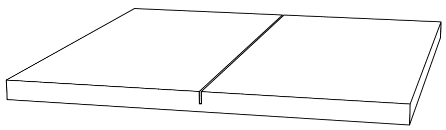
以上の準備から亀裂入り板要素の計算ができる．亀裂が ξ_1 方向に水平に入る場合に計算された亀裂入り板要素は，梁の場合のように亀裂のない要素の断面二次モーメントの低下としては現れず，マトリクスの各成分が変化する形で計算される．これは，亀裂が入ることによって剛性の変化が顕著に表れる節点の組み合わせと，そうでない組み合わせがあるためである．前述のように，本論文で拡張した PDS では，亀裂が無い場合の要素剛性マトリクスは通常の板の要素剛性マトリクスと一致しない．離散化が異なるため，本来，一致する必要はない．

4. 亀裂入り板要素を用いた数値解析例

簡単な板の問題を設定し，前章で導出された亀裂入り要素の精度を検証する．板の寸法を 1.0×1.0×0.05 m，ヤング率とポアソン比を 200GPa と 0.3 とする．四辺固定，等分布荷重 100N/mm^2 を加える．板の中央に深さ d m の微小厚さの亀裂を入れる (図–2 参照)．PDS-



a) 亀裂深さ $d/h = 0.1$



b) 亀裂深さ $d/h = 0.7$

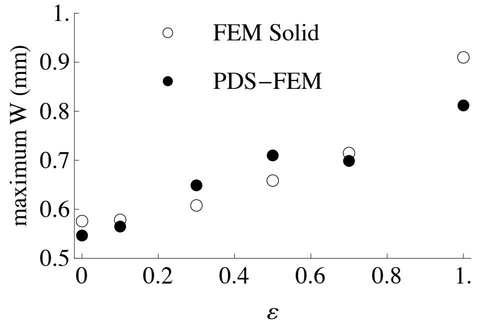
図–2 解析領域　板 B

FEM では多様体 M を $25 \times 25 = 625$ の正方形領域で分割する．亀裂は，x_1 方向 13 番目の列の要素の中央に入る．参照解となる 3 次元ソリッド要素 (4 面体 2 次要素) では，亀裂の深さによって変わるが，板 B の要素分割は 90,694~101,046 である．なお，計算には ADVENTURE on Windows[6)]を用いる．

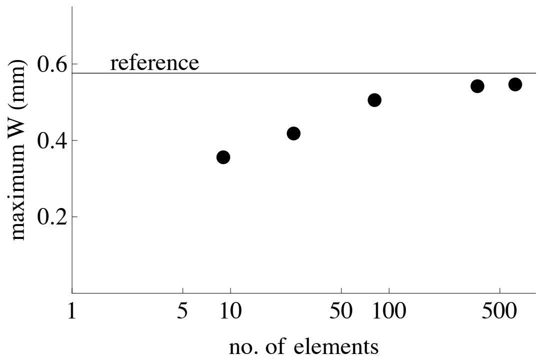
図–3 に亀裂深さと板の変形の関係を表す．横軸は $\varepsilon = \frac{d}{h}$，縦軸は W の最大値である．$\varepsilon = 1$ は，亀裂が板を貫通した状態を表し，板は 3 辺固定，1 辺自由の 2 つの板となる．ε が小さい場合，亀裂入り板要素を使った PDS-FEM の解は，亀裂の進展によって変位が増加している傾向を再現しており，参照解の値とも相応に一致する．しかし，ε が大きい場合，精度は悪い．特に ε が 0.5 から 0.7 の間では最大変位が減少するという不自然な結果となっている．これは，亀裂が深くなると，仮定された変位が適当でなくなることを示している．逆に言えば，仮定された変位が適当な $\varepsilon = 0.1$ 程度では，導出された亀裂入り板要素の精度が高いことを意味している．

亀裂が深い場合，亀裂入り板要素の精度が悪くなる原因が，仮定された変位にあることを確認するため，PDS-FEM の領域分割を変えて計算を行う．これは数値計算の解の収束性の検証にも使える．結果を図–4 に示す．横軸は領域分割の数，縦軸は W の最大値である．横線はソリッド要素によって計算された参照解である．$\varepsilon = 0$ と 0.1 では (図–4-a と図–4-b)，最大変位の収束値は参照解の値とほぼ一致しているが，$\varepsilon = 0.5$ では (図–4-c)，収束先は異なる．したがって，亀裂が深い場合の低精度の原因は，要素分割が足りないことではないことが理解できる．なお，$\varepsilon = 0$ と比べると，$\varepsilon = 0.1$ の収束速度はほぼ同じであるが，$\varepsilon = 0.5$ の収束速度は遅く，亀裂が深い場合には収束性も悪くなる．

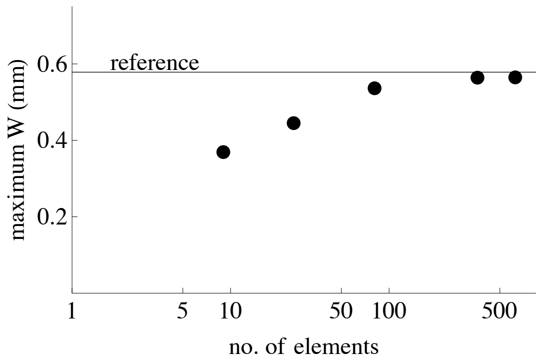
変位の誤差の空間分布を調べる．結果を図–5 と図–6 に示す．縦軸は PDS-FEM の解と参照解の差を，変位の最大値で割って正規化した値である．$\varepsilon = 0.1$ の場合 (図–5)，誤差の振れ幅は最大で 2.8%であるのに対し，



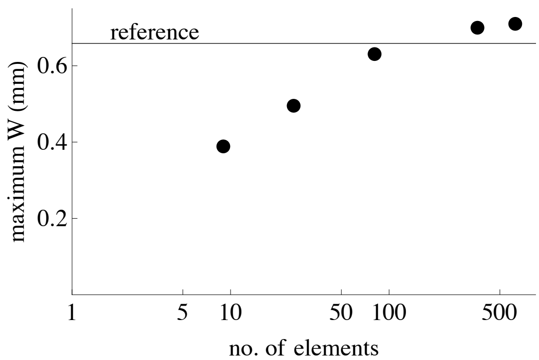
図–3 解析結果　変位場の推移



a) $\varepsilon = 0$



b) $\varepsilon = 0.1$

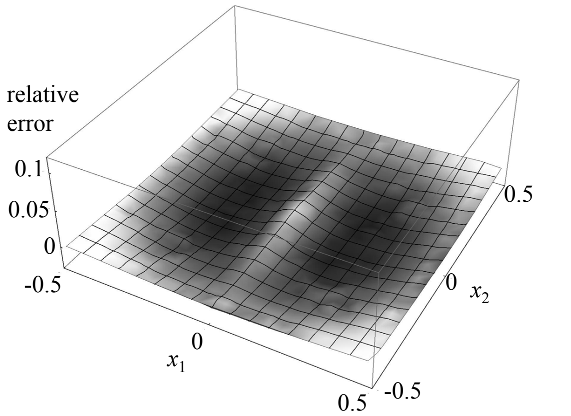


c) $\varepsilon = 0.5$

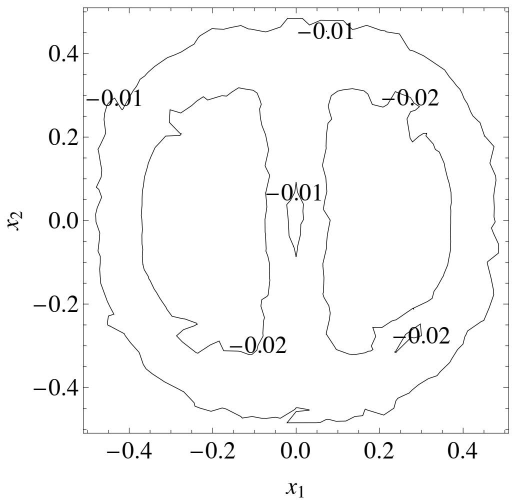
図–4 解析結果　収束速度

$\varepsilon = 0.5$ の場合 (図–6)，誤差は亀裂付近で最大 12%である．なお，亀裂から離れると誤差は数パーセントであり，亀裂が浅い場合と同等である．

簡単ではあるが，本章の数値計算から，導出された

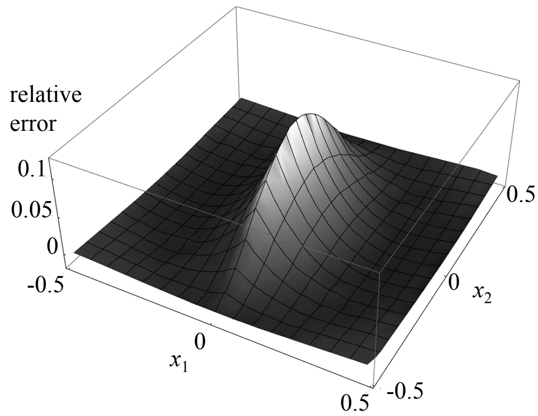


a) 俯瞰図

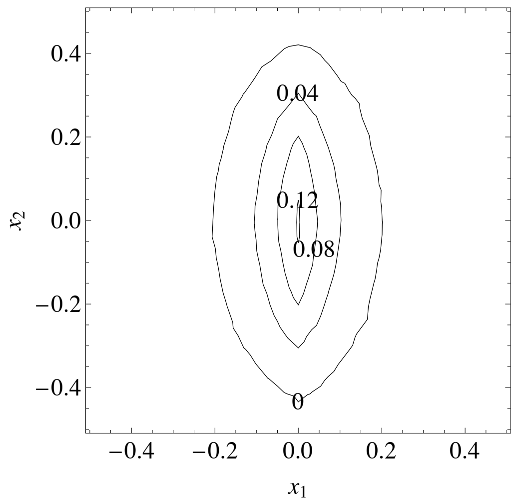


b) コンター

図–5 解析結果　変位場の誤差分布 $\varepsilon = 0.1$



a) 俯瞰図



b) コンター

図–6 解析結果　変位場の誤差分布 $\varepsilon = 0.5$

亀裂入り板要素の精度は，亀裂が深くなるにつれて低下するものの，板厚の10%程度であれば，変位の評価には利用できる程度の精度を持つことが示された．

5.　終わりに

本研究では，亀裂入り構造要素の導出手順を示し，実際に梁と板の亀裂入り要素を導出した．構造要素を1次元ないし2次元多様体とみなし，3次元弾性体の汎関数を使ってこの多様体の汎関数に変換すること，そして拡張したPDSを使って変位の離散化を行うことが，導出の要諦である．簡単な数値実験の結果，板厚の10%程度の亀裂であれば，亀裂入り板要素の精度は実用に足るレベルであることが示された．

本論文で示された亀裂入り構造要素の導出手順は，曲がり梁やシェルのような曲がった構造部材に対しても適用できる．このような曲がった部材では，直感的とはいえ，高度な図形解法が必要となるが，本論文の導出手順は，機械的な数式処理だけで構造要素を導くことができる．多様体の座標が曲座標となり，微分には共変微分を使わなければならず，それに応じて数式処理は煩雑になるが，決して難解ではない．

付録 I　$\mathcal{L}^M[\boldsymbol{U}]$ の被積分関数

板を例に，式(3)から式(2)への変換を例示する．具体的には，$\mathcal{L}^M$ の被積分関数を計算する．3.2節で説明した座標系と板面内変形・曲げ変形の変位 $V_i \cdot W$ を使う．式(2)の被積分関数は，

$$\sum_{i,j,k,l=1,2}\Bigg(\frac{1}{2}c_{ijkl}\int_H \epsilon_{ij}(\boldsymbol{\xi}')\epsilon_{kl}(\boldsymbol{\xi}')J\,\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta} \\ -\int_H \sigma_{ij}(\boldsymbol{\xi}')\epsilon_{ij}(\boldsymbol{\xi}')J\,\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta} \\ +V_{i,j}(\boldsymbol{\xi})\int_H \sigma_{ij}(\boldsymbol{\xi}')J\,\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta} \\ -W_{,ij}(\boldsymbol{\xi})\int_H \zeta_3\sigma_{ij}(\boldsymbol{\xi}')J\,\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}\Bigg)$$

に離散化した歪・応力を代入し，H の積分を行うことで計算される．被積分関数は $\boldsymbol{\xi}$ のみの関数となり，板を 2 次元多様体として扱うことが可能となる．

特性関数を用いて W を離散化した場合，$W_{,ij}$ の部分積分を用いて $\mathcal{L}^M$ を積分する．ところが，多様体は厚さ方向の次元をもたないので，亀裂による要素厚さの途中まで達する境界項の計算には再度 3 次元の積分 $\mathcal{L}^B$ に戻る必要があり，計算が煩雑である．このため，実際の亀裂入り要素の計算では上記と積分順序を代え，M を先に積分し，後に H' の積分を行う (付録 II)．なお，特性関数を使わない離散化を使った場合，部分積分の必要がないので $\mathcal{L}^M$ は直ちに積分することができる．

付録 II　$\mathcal{L}^{B'}[\boldsymbol{u}]$ の積分計算

板を例に，$\mathcal{L}^{B'}$ の積分を計算する．3.2 節で説明した座標系と板面内変形・曲げ変形の変位 V_i・W を使う．Φ^α と Ψ^β を ξ_1 軸と ξ_2 軸に平行な辺をもつ 2 次元多様体 M 上の長方形領域とし，3.2 節で説明した基底関数を使って関数の離散化を以下のように表記する．

$$\begin{aligned}
V_i(\boldsymbol{\xi}) &= \textstyle\sum_{\alpha,m} V_i^{\alpha m} p_{V_i}^m(\boldsymbol{\xi})\,\phi^\alpha(\boldsymbol{\xi}),\\
W(\boldsymbol{\xi}) &= \textstyle\sum_{\alpha,m} W^{\alpha m} p_W^m(\boldsymbol{\xi})\,\phi^\alpha(\boldsymbol{\xi}),\\
c_{ijkl}(\boldsymbol{\xi}') &= \textstyle\sum_{\beta,m} c_{ijkl}^{\beta m} p_c^m(\boldsymbol{\xi}')\,\psi^\beta(\boldsymbol{\xi}),\\
\epsilon_{ij}(\boldsymbol{\xi}') &= \textstyle\sum_{\beta,m} \epsilon_{ij}^{\beta m} p_\epsilon^m(\boldsymbol{\xi}')\,\psi^\beta(\boldsymbol{\xi}),\\
\sigma_{ij}(\boldsymbol{\xi}') &= \textstyle\sum_{\beta,m} \sigma_{ij}^{\beta m} p_\sigma^m(\boldsymbol{\xi}')\,\psi^\beta(\boldsymbol{\xi}).
\end{aligned}$$

右辺第一項は係数を，第二項は基底関数のうち多項式の部分を表し，第三項は特性関数を表す．例えば，$p_W^1(\boldsymbol{\xi}) = 1$, $p_W^2(\boldsymbol{\xi}) = \xi_1$, $p_W^3(\boldsymbol{\xi}) = \xi_2$ となる．式 (1) を

$$\mathcal{L}^{B'}[\boldsymbol{u}] = \int_{H'} \left(\int_M ()\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \right) \mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}$$

と変形したものに，これらの離散化した変数を代入する．被積分関数は，

$$\sum_{i,j,k,l=1,2} \Bigg(\sum_{\beta,m,n,o} \frac{1}{2} \epsilon_{ij}^{\beta m} c_{ijkl}^{\beta n} \epsilon_{kl}^{\beta o} \psi^\beta p_\epsilon^m p_c^n p_\epsilon^o J - \sum_{\beta,m,n} \sigma_{ij}^{\beta m} \epsilon_{ij}^{\beta n} \psi^\beta p_\sigma^m p_\epsilon^n J + \sum_{\beta,m} \sigma_{ij}^{\beta m} \mathrm{B}_{ij}^{\beta m} \Bigg)$$

と計算される．ただし，

$$\mathrm{B}_{ij}^{\beta m} = \sum_{\alpha,n} V_i^{\alpha n} (p_\sigma^m J \psi^\beta)(p_{V_i}^n \phi^\alpha)_{,j} - \sum_{\alpha,o} W^{\alpha o} (\zeta_3 p_\sigma^m J \psi^\beta)(p_W^o \phi^\alpha)_{,ij}$$

である．任意の滑らかな関数 $f(\boldsymbol{\xi})$, $g(\boldsymbol{\xi})$ に関して成り立つ以下の関係を用いて $\mathrm{B}_{ij}^{\beta m}$ の積分を計算する．

$$\begin{aligned}
\int_M (g\psi^\beta)(f\phi^\alpha)_{,11}\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} &= -\int_M (g\psi^\beta)_{,1}(f\phi^\alpha)_{,1}\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\\
&\quad + \int_{\partial M} \Big[(g\psi^\beta)(f\phi^\alpha)_{,1}\Big]_{\xi_1^-}^{\xi_1^+} \mathrm{d}\xi_2,\\
\int_M (g\psi^\beta)(f\phi^\alpha)_{,22}\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} &= -\int_M (g\psi^\beta)_{,2}(f\phi^\alpha)_{,2}\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\\
&\quad + \int_{\partial M} \Big[(g\psi^\beta)(f\phi^\alpha)_{,2}\Big]_{\xi_2^-}^{\xi_2^+} \mathrm{d}\xi_1,\\
\int_M (g\psi^\beta)(f\phi^\alpha)_{,12}\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} &= -\frac{1}{2}\int_M (g\psi^\beta)_{,1}(f\phi^\alpha)_{,2}\\
&\qquad +(g\psi^\beta)_{,2}(f\phi^\alpha)_{,1}\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\\
&\quad + \int_{\partial M} \Big[\frac{1}{2}(g\psi^\beta)(f\phi^\alpha)_{,2}\Big]_{\xi_1^-}^{\xi_1^+} \mathrm{d}\xi_2\\
&\quad + \int_{\partial M} \Big[\frac{1}{2}(g\psi^\beta)(f\phi^\alpha)_{,1}\Big]_{\xi_2^-}^{\xi_2^+} \mathrm{d}\xi_1.
\end{aligned}$$

ここで，亀裂による境界も ∂M に含まれることに注意する．また，上記に含まれる項は，

$$\int_M (g\psi^\beta)_{,i}(f\phi^\alpha)_{,j}\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} = \int_M g_{,i} f_{,j} \psi^\beta \phi^\alpha + g f_{,j} \psi_{,i}^\beta \phi^\alpha + g_{,i} f \psi^\beta \phi_{,j}^\alpha + g f \psi_{,i}^\beta \phi_{,j}^\alpha \,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$$

を用い，特性関数 ϕ^α, ψ^β の積分を行うことで計算する．

特性関数 ϕ^α, ψ^β の積分は，次のように計算できる．$\Phi^\alpha = \{0 < \xi_1, \xi_2 < 2\}$, $\Psi^\beta = \{-1 < \xi_1, \xi_2 < 1\}$ のとき，任意の滑らかな関数 $f(\xi_1, \xi_2)$ に関して，

$$\begin{aligned}
\int_M f\,\psi^\beta\phi^\alpha\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} &= \int_0^1 \mathrm{d}\xi_1 \int_0^1 \mathrm{d}\xi_2\, f,\\
\int_M f\,\psi_{,1}^\beta\phi^\alpha\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} &= -\int_0^1 \mathrm{d}\xi_2\, f(1,\xi_2),\\
\int_M f\,\psi^\beta\phi_{,1}^\alpha\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} &= \int_0^1 \mathrm{d}\xi_2\, f(0,\xi_2),\\
\int_M f\,\psi_{,2}^\beta\phi^\alpha\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} &= -\int_0^1 \mathrm{d}\xi_1\, f(\xi_1,1),\\
\int_M f\,\psi^\beta\phi_{,2}^\alpha\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} &= \int_0^1 \mathrm{d}\xi_1\, f(\xi_1,0),\\
\int_M f\,\psi_{,1}^\beta\phi_{,1}^\alpha\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} &= 0,\\
\int_M f\,\psi_{,2}^\beta\phi_{,2}^\alpha\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} &= 0,\\
\int_M f\,\psi_{,1}^\beta\phi_{,2}^\alpha\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} &= -f(1,0),\\
\int_M f\,\psi_{,2}^\beta\phi_{,1}^\alpha\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} &= -f(0,1)
\end{aligned}$$

が成り立つ．線形な座標変換によって任意の長方形領域 Ψ^β, Φ^α についても同様に特性関数の積分を行うことができる．

最後に，$\int_{H'}()\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}$ を計算することによって式 (1) のすべての項が計算される．

参考文献

1) Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L.: *The Finite Element Method, 5th ed. Volume 2: Solid Mechanics*, Butterworth-Heinemann, pp.124-127, 2000.

2) Fung, Y.C., Tong, P: *Classical and Computational Solid Mechanics*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2001.
3) Bathe, K.J.: *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, New Jersey, 1996.
4) 小国健二，堀宗朗，坂口秀：破壊現象の解析に適した有限要素法の提案，土木学会論文集，No. 766/I-68, pp.203-217, 2004.
5) Hori, M., Oguni, K., Sakaguchi, H.: Proposal of FEM implemented with particle discretization for analysis of failure phenomena, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol.53, pp.681-703, 2005.
6) ADVENTURE PROJECT: http://adventure.sys.t.u-tokyo.ac.jp/

(2010 年 3 月 9 日 受付)