# 剛体-軸力線要素モデルによるテンセグリティ構造の形態解析

Form-finding of tensegrity structures with rigid bodies and axial line elements

帯屋洋之\*・井嶋克志\*\*・川崎徳明\*\*\*・松永知子\*\*\*\*・松尾郁\*\*\*\* Hiroyuki Obiya, Katsushi Ijima, Noriaki Kawasaki, Tomoko Matsunaga and Aya Matsuo

\*博(工) 佐賀大学大学院准教授,工学系研究科都市工学専攻(〒849-0918 佐賀市本庄町1番地) \*\* 工博 佐賀大学大学院教授,工学系研究科都市工学専攻(〒849-0918 佐賀市本庄町1番地) \*\*\*\*佐賀大学大学院技術職員,工学系研究科都市工学専攻(〒849-0918 佐賀市本庄町1番地) \*\*\*\*佐賀大学大学院 工学系研究科博士前期課程(〒849-0918 佐賀市本庄町1番地)

Since Buckminster Fuller discovered this unique system of self-equilibrium, many researchers have studied "tensegrity structures". The force density method has been frequently used for form finding of tensegrity structures. In this paper, another way to find shapes of the "pure" tensegrity structures is proposed, and its algorithm has the same procedure with the large deformational analyses by the tangent stiffness method. Therefore, we can freely define and select the element edge force equation which provides the behavior of the elements. The combination of the axial force line elements and the rigid body elements shows good performance to find the shapes of self-equilibrium tensegrity. Namely, the proposal does not need any pre-analyses to find the ratio between the force densities of elements. Numerical examples in this paper show that the perfect equilibrium solutions can be found even if in instable support conditions. Moreover, we can also apply rigid body with multi-nodes to compression members, so the equilibrium properties of various kinds of tensegrity systems will be evident.

*Key Words*: tensegrity structures, form-finding, axial force line elements, rigid body, the tangent stiffness method

キーワード:テンセグリティ構造,形態解析,線長関数軸力線要素,剛体 接線剛性法

#### 1. まえがき

Buckminster Fuller (1895-1983)によって考案されたテン セグリティ構造は、その独特な力学システムと造形美ゆえ に、いまだに多くの研究者がこれに魅かれ、数学、力学、 数値計算などの様々な立場から研究が進められている。当 初 Fuller が想起したシステムは「構造系張力材同士は節点 を介して接続可能であるが、圧縮材同士の接続はない」、

「内部応力のみによって成立する自己釣合」という二つの 力学的特徴を持っていた.しかしながら,この「純粋な」 テンセグリティシステム<sup>1)</sup>(以降, "純粋テンセグリティ" と呼ぶ.)は、一般には、重力下の地球上では実構造物へ の適用は難しいと認識されており、近年の工学的立場から のアプローチとしては、上記条件のうち自碇式の条件を外 し、不静定な外的拘束条件と外力の作用を許す、広義の「テ ンセグリックな」構造系<sup>1)</sup>としての応用に力点がおかれる 場合が少なくない.

軸力部材によって成立する構造系の形態解析手法とし

ては、Schek ら<sup>2</sup>によって提案された Force Density Method が最も一般的に使われており、たとえばケーブルネットに よる懸垂曲面の形態解析などによく用いられている.しか し、各部材に任意の軸力密度(Force Density=軸力を部材 長で除したパラメータ) を与え、線形解析によって形状 決定ができるという Force Density Method の利点は、支点 反力の発生を許す拘束条件を前提とした場合に限定され、 自己釣合条件下にある純粋テンセグリティの形態解析に そのまま適用しようとすれば解は不定となってしまうこ とがわかっている.よって、予め何らかの別の手法によっ て、形状の成立要件を満たすような部材間の軸力密度比を 求めておく必要があり、これによってはじめて条件が完備 されることになる.

Calladine<sup>3</sup>は, Maxwell の安定条件式(立体トラスの場合 b>3j+6, b:総部材数, j:総節点数)を純粋テンセグリティに当てはめた場合について考察し, 平衡条件マトリック スと適合条件マトリックスのランクの関係から構造の安 定性を論じている.また,川口<sup>4</sup>らは正多面体の形状と相 似なテンセグリティの対称性に着目し、群論を用いて変位 モードを抽出することによって、変形特性を説明しており、 さらに、Pandia Raj<sup>5)</sup>らは、同様の群論による展開を用いて 軸力密度比を解析的に求める手法を示している.しかし、 これらの方法によって軸力密度比を求めるためには、予め 釣合形状の対称性を予測しておく必要があり、複雑なコネ クティビティを設定した場合や、大規模構造になった場合 には対応できない.これについて、Zhang<sup>6</sup>らは、釣合条件 マトリックスのスペクトル分解を用いた数値計算によっ て軸力密度比を収束させる方法を提案している.

一方,著者らは、いわゆる幾何学的非線形解析理論のひ とつである接線剛性法<sup>¬</sup>を用いて、これに仮想剛性要素と しての等張力石鹸膜要素や線長比例軸力線要素を適用す ることによって、「厳密な釣合位置を求める」という立場 からの形態解析を行ってきた<sup>8→10</sup>.接線剛性法では、互い に独立な成分を持つ要素端カベクトルを使用するため、要 素端力と要素寸法の関係を「どのように設定しても構わな い」ことになり、換言すれば、「定義した要素挙動に完全 に整合する釣合解が得られる」ということになる.よって、 たとえば要素端力の定義を「軸力は要素長に比例する」と 定義した仮想剛性を持つ「1次軸力線」を用いる場合には、 Force Density Method と等価な解析過程を辿ることになる し、また全く別の要素挙動の定義を用いて解析を行うこと もできる.

本研究では、引張材を「軸力が線長の2乗に比例する」 と定義した2次軸力線、圧縮材を「節点間の相対的位置関 係が一定」とした2節点剛棒としてモデル化し、純粋テン セグリティの形態解析を行っている.このモデルでは、剛 棒要素が2点間距離を拘束することによって、予め軸力密 度比がわかっていなくても解が不定となることはなく、通 常の大変形解析と全く同じ反復計算過程を経て不平衡力 が収束し釣合解が得られる.また、釣合形状の幾何学的対 称性が予めわかっている場合には、通常の有限要素解析と 同じ概念による部分解析を用いて計算効率の向上と収束 過程の安定化を図ることができる.

本研究ではさらに、たとえ外的な拘束を一切行わないという極端な不安定条件を設定しても、自己釣合解に収束する場合が多く観察できることも示している.これは、接線剛性法の幾何学的非線形解析理論としてのロバスト性に由来するものと考えられる.このことは、通常の実剛性部材を用いた同手法による大変形解析において、たとえ非常に大きな節点荷重を一括載荷しても、NR法と同等の常に高い収束性を示す事実と軌を一にするものである.

また、本研究で用いる形態解析では、圧縮材を多節点剛体としてモデル化することも容易であるため、たとえば、 K.SnelsonのX-Rodのような構造系の形態解析への拡張にも対応できる.

#### 2. 接線剛性法による形態解析

#### 2.1 接線剛性方程式

本研究で用いる接線剛性法は, 要素端節点に離散化され

た互いに独立な要素端力を用いるため、不平衡力算出の過 程で使用する適合条件式を、厳密で、しかも陽な形で使用 できるという利点を有している.よって、平衡条件式の1 回微分としての接線剛性マトリックスを厳密に記述する ことができれば、NR法と同等の二次収束性が実現し、さ らには、非保存外力などの作用により厳密な接線剛性が使 用できない場合でも、不平衡力が収束しさえすれば、厳密 な釣合解へと収束する.

いま,独立な要素端力の組を要素端力ベクトルSとし, これと三次元空間に固定された基準座標系との間の平衡 条件マトリックスをJとすれば,基準座標系表示の外力と しての節点力ベクトルUは,

$$\mathbf{U} = \mathbf{J}\mathbf{S} \tag{1}$$

となり、この釣合条件式の変分をとると以下のように接線 剛性方程式を得ることができる.

$$\delta \mathbf{U} = \mathbf{J} \delta \mathbf{S} + \delta \mathbf{J} \mathbf{S} = (\mathbf{K}_{0} + \mathbf{K}_{C}) \delta \mathbf{u} \qquad (2)$$

ここで、 $K_0$  は要素座標系内における要素挙動に起因する 接線要素剛性、 $K_G$  は要素の剛体変位に起因する接線幾何 剛性である.また、 $\delta$ u は基準座標系表示された節点変位 ベクトルである.

#### 2.2 要素ポテンシャル関数

接線剛性法では、一般の有限要素法のように基準座標系 から直接要素内のひずみを参照し、変位一ひずみ間の幾何 学的非線形性を定式化するのではなく、要素端に離散化さ れた互いに独立な要素端力と基準座標系表示の節点力と の間の非線形性を線形の接線幾何剛性により収束させる 手法である.よって、ひずみ-変位間の適合条件について 煩雑な展開をする必要は無く、変形後の要素端節点座標か ら要素端変形を厳密に計算することが出来れば、要素の挙 動を任意に定めて用いることが可能である.たとえば、

- ・ 膜張力一定の三角形石鹸膜要素
- ・ 軸力一定の定軸力線要素

• 軸力が要素長に比例する線長比例軸力線要素

などを同一のアルゴリズム内で用いることができ、またこ れらの要素を組み合わせて解析することも可能である.

ここで、要素座標系内における要素挙動を規定するため、 要素ポテンシャルを要素長、面積などの要素に関する幾何 学量の関数として定義する.要素ポテンシャルを定義する ことは、要素に「仮想」の剛性を設定することと等価であ り、材料の剛性とは無関係に任意の関数を定義しても、そ こで規定された要素挙動に整合する釣合曲面が得られる ことになる.

いま、要素ポテンシャルPに対して、要素の形状を規定 する上で互いに独立となる要素寸法の組をsとすれば、

$$\mathbf{S} = \frac{\partial P}{\partial \mathbf{s}} \tag{3}$$

のように要素端力が得られる.

#### 2.3 線長関数軸力線要素

いま, 節点1と節点2を結ぶ線材要素の要素ポテンシャ ルが線長1のべき乗に比例すると定義すれば, 要素ポテン シャルの線長による1階微分で軸方向の要素端力が得ら れることになる.

$$P = Cl^{n+1} \tag{4}$$

と定義した要素ポテンシャルに式(3)を適用すれば、

$$N = (n+1)Cl^n \tag{5}$$

のように軸力線要素の軸力Nが得られ、これが要素力式となる.Cを要素力係数,nを要素力次数と呼ぶことにする. Cおよびnを全要素に亘って一定とした節点外力=0の系ではCの値にかかわらず同一の解が得られる.また、この軸力線要素の方向余弦ベクトルをαとすれば、式(1)は次式

のように書き直すことができる.  

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_1\\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} N \tag{6}$$

従って、これに式(1)から式(2)への展開を適用すれば

$$\delta \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{k}_{\mathbf{T}}^{\mathrm{L}} \delta \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix}$$
(7)

$$\mathbf{k}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{L}} = (n+1)Cl^{n-1} \begin{bmatrix} \mathbf{e} + (n-1)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & -\mathbf{e} - (n-1)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \\ -\mathbf{e} - (n-1)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & \mathbf{e} + (n-1)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$
(8)

となる. (eは3×3の単位マトリックス)

式(5)において、要素力次数 n=0 とすれば要素寸法の変化 にかかわらず軸力が一定となる定軸力線要素となり、式(8) は、通常のトラス部材の接線幾何剛性と一致する.ここで、 n=1 とした場合は、式(7)は完全に線形となり、Force Density Method を用いたのと等価な剛性マトリックスになる(こ の場合 2C が軸力密度に相当する). $n \neq 1$ の場合は、非線 形式となり反復計算を要することになるが、nの次数が大 きくなるほど、解曲面における全要素の線長が揃う傾向に あることがわかっている<sup>8</sup>.本論文では、要素力次数=nの軸力線要素を「n次軸力線」と呼ぶことにする.

#### 2.4 2節点剛棒

節点1と節点2の間に剛棒が挿入された時,両節点の変 位の合計6自由度の間には節点間距離一定の拘束条件に



図-1 2節点剛棒の平衡条件

よる従属関係が生じる.ここでは、従属6自由度系から独 立5自由度系への変換により剛棒の挙動を記述する.いま、 図-1のように、共通座標系 *u-v-w*内に、長さが*l*の剛棒 1-2 があるとき、剛棒の軸方向を第1軸とし、第2軸を共通座 標系の *u-v* 平面内方向に第2軸があると定義した剛棒座標 系 *û-v* ŵ を設定する.なお、剛棒座標系第1軸が w 軸と一 致する場合の第2軸設定に関しては、v 軸と v 軸の方向が 一致するものとする.共通座標系表示の節点力[*U,V,W*]<sup>T</sup> か ら、剛棒座標系表示の節点力[*Û,V,M*]<sup>T</sup> への変換は、

$$\begin{bmatrix} \hat{U} \\ \hat{V} \\ \hat{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{-\beta}{\sqrt{1-\gamma^2}} & \frac{\alpha}{\sqrt{1-\gamma^2}} & 0 \\ \frac{-\alpha\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} & \frac{-\beta\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} & \sqrt{1-\gamma^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}$$
(9)

のように表すことができる. ここで,  $\alpha,\beta,\gamma$  は剛棒の方向 余弦の各成分である. 節点 1 から  $\xi l$  ( $0 \le \xi \le 1$ ) 離れた 位置に集約点 c を定めれば, 剛棒に作用する節点力は式 (10)のように, 集約点 c における並進方向 3 成分  $U_c$ ,  $V_c$ ,  $W_c$  と, 剛棒座標系第 2 軸, 第 3 軸周りのモーメント  $Y_c$ ,  $Z_c$  (1 次元要素である剛棒では軸周りの剛体回転成分は存 在しない)によって表すことができ, このことが節点間距 離の拘束条件と等価になる.本論文では, この式(10)を剛 棒の平衡条件式として用いている.

$$\begin{bmatrix} U_c \\ V_c \\ W_c \\ W_c \\ Z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\omega \gamma \xi l}{\sqrt{1 - \gamma^2}} & \frac{\beta \gamma \xi l}{\sqrt{1 - \gamma^2}} & -\sqrt{1 - \gamma^2} \xi l & \frac{\alpha \gamma (1 - \xi) l}{\sqrt{1 - \gamma^2}} & \frac{\beta \gamma (1 - \xi) l}{\sqrt{1 - \gamma^2}} & -\sqrt{1 - \gamma^2} (1 - \xi) l \\ \frac{\beta \xi l}{\sqrt{1 - \gamma^2}} & \frac{-\alpha \xi l}{\sqrt{1 - \gamma^2}} & 0 & \frac{\beta (1 - \xi) l}{\sqrt{1 - \gamma^2}} & \frac{-\alpha (1 - \xi) l}{\sqrt{1 - \gamma^2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ W_2 \end{bmatrix}$$
(10)

Г



図-2 多節点剛体の平衡条件(3節点剛体の場合)

#### 2.5 多節点剛体

3節点以上が繋がった剛体の場合は、要素に追従する座標 系を設定する必要はなく、また3軸全てに剛体回転成分が あるため、2節点剛棒に比べて平易な表現となり、その自 由度は付帯節点数にかかわらず集約点における並進・回転 6成分に変換できる. 集約点 cと節点i (=1,2, …)の座標 値の差を $\begin{bmatrix} u_i & v_i & w_i \end{bmatrix}^T$ と書くことにすれば、多節点剛体の 平衡条件式は以下のように表すことができる. (図-2に3 節点剛体の場合の力の関係)

$\lceil U \rceil$	1	0	0	1	0	0	]	$U_1$
	0	1	0	0	1	0		$V_1$
W <sub>c</sub>	0	0	1	0	0	1		$\frac{W_1}{U}$
$\left  \frac{\overline{X_c}}{\overline{X_c}} \right ^=$	0	$-\overline{w}_1$	$\overline{v}_1$	0	$-\overline{w}_2$	$\overline{v}_2$	·	$\begin{bmatrix} U_2 \\ V \end{bmatrix}$
Y <sub>c</sub>	$\frac{-}{w_1}$	0	$-\overline{u}_1$	$\frac{-}{w_2}$	0	$-\overline{u}_2$		$W_{2}$
$\lfloor Z_c \rfloor$	$-v_1$	$\overline{u}_1$	0	$-v_{2}$	$\overline{u}_2$	0		$\frac{\pi^2}{\cdot}$
	-							L .

(11)

よって、1つの剛体にn個の節点が繋がっているとすれ 3n-6個の自由度が低減されることになる.

#### 2.6 剛体-軸力線モデルの接線剛性方程式

2節点剛棒の平衡条件式(10),または多節点剛体の平衡条件式(11)を,構造系内のすべての剛体にわたって重ねあわせたものを

$$\mathbf{U}_{c} = \mathbf{B}\mathbf{U} \tag{12}$$

と書くことにする. 剛体 (剛棒)の変位ベクトルを âu 節 点変位ベクトルを âu とすれば、相反定理により、

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{B}^T \delta \mathbf{u}_a \tag{13}$$

が成り立つ.また,式(1)から式(2)への展開と同様,式(12)の変分をとると,

$$\delta \mathbf{U}_{c} = \delta \mathbf{B} \mathbf{U} + \mathbf{B} \delta \mathbf{U} \tag{14}$$

となるが、これの右辺第1項を展開すれば、非対称マトリックスとなり扱いづらいため、本論文では、 **B** による影

響は小さいものと見て、

$$\delta \mathbf{U}_{\mathbf{c}} = \mathbf{B} \mathbf{K}_{\mathbf{T}} \mathbf{B}^T \delta \mathbf{u}_{\mathbf{c}}$$
(15)

$$k_{\rm T} = \mathbf{K}_{\rm G} + \mathbf{K}_{\rm 0} \tag{16}$$

を用いる.よって,接線剛性法特有のNR法と同等の二次 収束性は期待できなくなるものの,不平衡力がゼロに収束 した解を確実に得ることができる求解性能はかわらない.

図-3 は、剛体軸力線要素系による tensegrity 形態解析の フローであり、手続きとしては実剛性要素より成る構造系 の大変形解析とほぼ同一であるため、形状決定後にトラス 要素およびケーブル要素に置換し、変形挙動解析を行うこ とも容易である.なお、本解析における入力データのうち、 釣合形状を決定するのに支配的なパラメータは、コネクテ ィビティ、要素力次数、要素力係数、剛体寸法であり、初 期要素配置に関しては、どのように設定しても同一釣合解 に収束する場合が多い.ただし、全ての要素を同じ平面内 に置いた場合は、その平面内にある解に収束し、立体的な 広がりがある形状は得られないので注意が必要である.



図-3 剛体-軸力線要素系による tensegrity 形態解析のフロー

#### 3. 形態解析例

#### 3.1 テンセグリティ形態解析の拘束条件と収束性

圧縮材3本,引張材9本よりなるシンプレックス型テン セグリティについては既に多くの研究者によってその力 学的な性質が論じられている. Force Density Method による シンプレックス型の形態解析では、上弦材・下弦材の軸力 密度を  $T_h$ ,縦引張材の軸力密度を  $T_d$ , 圧縮材の軸力密度 を  $T_c$ とした場合の比が

$$T_h: T_d: T_c = 1: \sqrt{3}: -\sqrt{3}$$
 (17)

となることが知られている 11).

ここでは、2節点剛棒3本と、2次軸力線9本(全て要素力係数はC=2.0)によってモデル化したシンプレックス型テンセグリティに図 - 4(a)のような初期要素配置(平面内の解への収束を防ぐため、3本の剛棒は、u-v平面との間に5°の傾きを持たせてある)を設定し、

- ① 静定で安定な支点条件を配し,計6自由度を拘束する ことによって総自由度9として解析した場合,
- ② 対称性を考慮し,図中右手の剛捧(1)のu方向変位と回 転変位2成分の計3自由度に低次元化した場合.
- ③ 一切の外的拘束条件を排し、総自由度 15 のまま解析 した場合

の三つのケースについて、計算を行い比較・考察を行う. いずれのケースで計算しても図 - 4(b)のような形状の同一 解となり、各軸力線要素(引張材)の長さおよび軸力も完 全に一致する.また、収束解より得られる軸力Nを要素長 *l*で除して軸力密度を逆算しそれらの間の比をとれば、式 (17)の関係を満たしている.

図-5~7 はそれぞれのケースにおける不平衡力(並進成 分および回転成分)の収束状況を示しており、さらに、図 -7には、このときの接線剛性マトリックスの対角要素を反 復段階毎に調べ、絶対値が10-20以下の値が出現した回数 を第2縦軸参照の棒グラフで示している.当然ではあるが, ②の部分解析の場合が最も収束が早く,計算過程も安定し ている. Force Density Method では釣合解の幾何学的対称性 が軸力密度比を求めるための重要な情報を与えるが, 釣合 式の反復を前提とする本手法では、単純に解形状に対称軸 多いほど計算効率の向上が図れるということになる.また, ③は外的安定条件を満たしていないため、一般には接線剛 性マトリックスが特異となるはずである.しかし、本解析 は自己釣合系の形状を目的解としているので, 節点間の相 対的な位置関係が定まれば、これを決定形状とすることが できる.よって、この解析の場合では、図-7に示すように、 接線剛性マトリックスの対角要素に0極近傍の値が3回出 現しているにもかかわらず, ①の安定な支点条件を配した 場合と全く同じ収束過程を辿って収束に至っている. ただ し、③の場合は、初期要素配置の設定次第では不平衡力が 発散して解が得られない場合もある.



コネクティビティ(平面図) (b) 釣合形状(鳥瞰図) 図-4 シンプレックステンセグリティ



## 3.2 6ストラットテンセグリティ

ここでは、2節点剛棒による圧縮材6本のテンセグリティモデルにいくつかのパターンのコネクティビティを施した時の解析過程と釣合形状の特性について調べる.

## (1) テンセグリティ・プリズム

C=1.0 とした 2 次軸力線 24 本を用いて、図-8(a)に示す ような、初期要素配置(6 本の剛棒は、u-v 平面との間に 5°の傾きがある)とコネクティビティを設定し、計算し た結果、図-8(b)のような「テンセグリティ・プリズム」の 釣合形状が得られた.最大不平衡力(回転成分)の収束条 件を10<sup>3</sup>(Nm)以下としたとき、静定で安定な支点条件を配 した場合には 77 回、支点条件を配しなかった場合は 96 回 の反復を要した.いずれの場合も、すべての引張材の長さ が等しい完全な正 20 面体の形状となった.



(a) 初期要素配置と コネクティビティ(平面図) 図-8 テンセグリティ・プリズム

# (2) T 群テンセグリティ

18本の引張材を全て*C*=1.0の2次軸力線でモデル化し, 図-9(a)に示すような,初期要素配置(6本の剛棒は,*u-v* 平面との間に5°の傾きがある)とコネクティビティを設 定し計算した結果,図-9(b)のような釣合形状が得られる. このテンセグリティは,正四面体と同じ'T群'といわれ る対称性をもっており<sup>12</sup>, Calladine<sup>3</sup>は,この構造の総部 材数=24 が Maxwell の公式に照らしたときの安定条件を 満たしていないにもかかわらず,安定な釣合形状を持つこ とを指摘している.図-10 は静定で安定な支点条件を配し た場合,および支点条件を配しなかった場合の最大不平衡 力(並進/回転成分)の収束状況であり,外的支点条件を 設定しないほうが良好な収束性を示している.



(a) 初期要素配置と(b) 釣合形状 (鳥瞰図)コネクティビティ (平面図)全軸力線で C=1.0図-9 T 群テンセグリティ



(T 群テンセグリティ:全軸力線でC=1.0のとき)



図-12 部材間の軸力密度比(T群テンセグリティ)

Pandia Raj<sup>3</sup>は、このT 群テンセグリティについて、頂部 正三角形を構成する引張材の軸力密度を $T_b$ ,頂部正三角形 を繋ぐ稜線部の引張材の軸力密度を $T_b$  6本の圧縮材の軸 力密度をと $T_s$ とした時の軸力密度比を解析的に求め、 $T_s/T_d$ と $T_t/T_d$ の関係を表している.ここでは2次軸力線を用い ているので軸力密度そのものを指定することはできない が、頂部正三角形を構成する軸力線の要素力係数を $C_b$  稜 線部軸力線の要素力係数を $C_d$ として別々に与えることに よって様々な形の釣合解を求めることができる(図-11). 図-12 はこれらの釣合解から軸力密度を逆算し、Pandia Raj<sup>3</sup>の解析解と比較したものであり、両者はよく一致して いることが分かる.

#### (3) 初期要素配置や要素力係数によって別解がある例

剛棒6本、 $C=2.0 \circ 2$  次軸力線42本により、図-13 の ようなコネクティビティを設定したとき、初期要素配置に おける6本の剛棒の *u-v* 平面に対する傾斜角の違いによっ て、図-14、15 に示すように全く違う形状の釣合解が得ら れる. 傾斜角 $\theta=5^{\circ}$ の初期要素配置からは、47 回の反復 計算ののち図-14(b)の解に収束するのに対して、 $\theta=60^{\circ}$ としたときは、一旦、図-14(b)の解に収束し始めるが、そ の後不平衡力が大きくなり(図-15(b)にその時の解形状) 結果的に176回の反復計算を経て図-15(c)の解に収束する. ただし、C=1.0と設定すると、 $\theta=60^{\circ}$ としても $\theta=5^{\circ}$ のときと同じ図-14(b)の解に収束する.図-16 にそれぞれの 場合の不平衡力(回転方向)の収束状況を示している.



図-13 コネクティビティ(平面図)





(a) 初期要素配置(鳥瞰図) (b) 釣合形状(鳥瞰図) 図-14 剛棒の *u-v* 平面に対する傾斜角 *θ* = 5°の場合



(a) 初期要素配置(鳥瞰図)



(b) 不釣合形状(反復83回目)
 (c) 釣合形状(鳥瞰図)
 図-15 剛棒の u-v 平面に対する傾斜角 θ =60°の場合



図-16 傾斜角 θ と要素力係数 C による収束状況の違い

#### 3.3 大規模テンセグリティへの応用例

本研究における剛体-軸力線モデルでは、予め軸力密度 比を求める必要がないので、容易に大規模テンセグリティ 構造の形態解析に応用することができる.以下に、そのい くつかの例を示す.

#### (1) テンセグリティ・スフィア

剛棒30本とC=2.0の2次軸力線90本により成る図-16 のコネクティビティおよび初期要素配置から、外的拘束な しの条件で解析を行ったところ、27回の反復計算ののち 図-17のような、全節点が完全に一つの球面の上にあるテ ンセグリティ・スフィアの釣合形状が得られた.



図-17 テンセグリティ・スフィアのコネクティビティと 初期要素配置



図-18 テンセグリティ・スフィアの釣合系状



(a)1層の初期要素配置と コネクティビティ(平面図)



(b) 全層の初期要素配置と コネクティビティ(鳥瞰図)

(c) 釣合形状 (鳥瞰図)

図-19 テンセグリティ・タワー

## (2) テンセグリティ・タワー

剛棒35本と2次軸力線165本を用いて、図-19(a)のような平面配置を7層重ね、層間を10本の軸力線で繋いだ図-19(b)の初期要素配置を作成し、剛棒の長さに5%程度のばらつきを与えた。外的拘束なしの条件で解析を行ったところ、図-19(c)のような「ねじれた」タワー状の釣合形状が得られた。

## (3) 4節点剛体を用いた例

図-20(a)に示すような,各辺の比が2:1:1の直方体の4 つの頂点に節点を配した4節点剛体を,図-20(b)のように2 次軸力線によって繋いで解析したところ,図-20(c)に示す 螺旋状の釣合解が得られた.

## 4. まとめ

本研究では、要素挙動に完全に整合する釣合解が得られ る幾何学的非線形解析手法である接線剛性法に、「軸力が 要素長の2乗に比例する」と定義した2次軸力線要素と、 節点間の相対位置を規定する2節点剛棒または多節点剛 体を用いたモデルによって、自己釣合を前提とする純粋デ ンセグリティの形態解析を行う手法を提案した.

本提案手法による形態解析の結果,得られた知見を以下にまとめる.

(1) 2 節点剛棒または多節点剛体を用いることによる拘 束効果と、2 次軸力線の要素挙動特性により、任意 の要素力係数を与えて形態解析を行うことが可能と なり、釣合計算の反復によって自己釣合形状を求め



(b) 初期要素配置と コネクティビティ

(2) 外力の作用を前提としない自己釣合解は、全体構造 の剛体変位を評価する必要がないので、外的拘束を 全く与えない条件下でも収束解が得られ、その反復 計算過程では、接線剛性マトリックスの対角要素に ゼロ値極近傍の値の出現が観察できる。

図-20 4節点剛体による螺旋形テンセグリティ

(a)4節点剛体のモデル

(c) 釣合形状 (鳥瞰図)

- (3) 対称軸を持つ釣合形状を前提とした場合は、通常の 有限要素解析と同様の考え方で部分解析を適用でき、 計算効率が向上する.
- (4) Force Density Method では対応が難しいと考えられる ような、非対称で複雑な形状となる大規模テンセグ リティの場合でも、対称構造の場合と全く同一のア ルゴリズムを用いて形状を求めることが出来る.
- (5) 多節点剛体要素への応用も容易であり、2節点剛棒 を用いた場合と同様、厳密な釣合解を得ることがで きる.

本論文では、自己釣合を条件とする「純粋テンセグリティ」 を対象としたが、勿論、外力の作用を前提とする「広義の テンセグリティ」の形態解析にも適用が可能である.また 本手法は、アルゴリズムの流れが接線剛性法による大変形 構造解析とほぼ共通しているため、仮想剛性要素から実剛 性を有する部材に要素置換するだけで、容易に形状決定後 の実構造の変形挙動解析に移行できる.今後は、実剛性を 持つトラス要素および非抗圧ケーブル要素<sup>13)</sup>を用いて、柔 構造としてのテンセグリティの変形特性を明らかにする 予定である.

# 参考文献

- 1) 斎藤公男:空間構造物語, 彰国社, pp.184-263,2003.
- Schek, H.J. : The force density method for form finding and computation of general networks. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 3, pp.115-134., 1974.
- Calladine.C.R., Backminster Fuller's "Tensegrity" Structures and Clark Maxwell's Rules for the Construction of Stiff Frames, Int. Jour. Sorid Structures, Vol.14, pp.161-172, 1978.
- 4)川口健一,鈴木悠介,群論に基づくテンセグリティ構造の自己釣合い軸力と伸びなし変位の抽出,日本建築学会構造系論文集,第597号,pp.77-84,2005.
- 5) Pandia Raj R., Guest S. D., Using Symmetry for Tensegrity Form-Finding, Jour. IASS, Vol.47, No.3, 2006.
- Zhang J.Y., Ohsaki M., Adaptive force density method for form-finding method of tensegrity structures, Int. Jour. Solid and Structures, 43, pp.5658-5673, 2006.
- 7)後藤茂夫,羽根悟朗,田中達朗:接線剛性法による骨 組構造物の大変形解析,土木学会論文報告集,No.238, pp.31-42, 1975.

- Ijima K., Obiya H., Formfinding of single layer structure by measure potential function of element, Proc. of Structural morphology, pp.249-256, 1997.
- 9) 帯屋洋之,井嶋克志,村上卓志,川崎徳明,西村裕次: 面内方向軸力線要素を用いた滑らかな石鹸膜形状の決 定手法について,応用力学論文集,Vol.10,pp.27-36,2007.
- 10)坂井孝成,帯屋洋之,井嶋克志,石橋靖亨,川崎徳明: トラス軸力線構造系によるテンセグリティ構造の形態 解析,平成19年度土木学会全国大会第62回年次講演 会講演概要集, pp.1177-1178,2007.
- 11)Vassart N., Motro R., Multiparametered Formfinding method: Application to Tensegrity Systems, Int. Jour. Space Structures, 14(2), pp.147-154, 1999.
- 12)M.A.Armstrong 著, 佐藤信哉訳: 対称性からの群論入門, シュプリンガージャパン, 2007.
- 13)井嶋克志,帯屋洋之,川崎徳明:空間柔ケーブルによる非抗圧膜構造モデルの有限変位解析,構造工学論文集,Vol.55A, pp.11-22, 2009.

(2010年3月9日 受付)