

半無限弾性波動場の解析のための領域積分方程式法への MPI 並列計算の適用について

An MPI Parallel Computational Method for a Volume Integral Equation
for Elastic Wave Propagation in a Half Space

東平光生*・高岸智紘**・和嶋泰亮***・倉浪晃一****

Terumi TOUHEI, Tomohiro TAKAGISHI, Yasuaki WAJIMA and Kouichi KURANAMI

*正会員 工博 東京理科大学教授 理工学部 土木工学科 (〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2641)

**正会員 工修 東京建設コンサルタント (〒 170-0004 東京都豊島区北大塚 1-15-6)

***学生会員 東京理科大学大学院 理工学研究科 土木工学専攻 修士課程

****学生会員 東京理科大学大学院 理工学研究科 土木工学専攻 修士課程

It is true that the volume integral equation method based on the generalized Fourier transform and the Krylov subspace iteration technique is free from derivation of a huge and dense matrix. The reduction of the CPU time, however, is still required even after the introduction of a fast algorithm for the generalized Fourier transform. In this article, an MPI parallel processing is introduced for the reduction of the CPU time for the analysis. Based on an investigation of the structure of the generalized Fourier transform, a parallel algorithm for the generalized Fourier transform and the Krylov subspace iteration method are developed. The verification of the present parallel method is carried out with numerical results. It is found from the numerical results that the reduction of the CPU time is realized successfully. The reduction of the CPU is around 65% in the case that 4 CPU parallel processing is employed.

Key Words : MPI parallel computation, volume integral equation, elastic half space, fast method, Generalized Fourier transform

1. はじめに

弾性波動方程式を数値的に解くことで、散乱波動場を決定することは、地震工学や非破壊検査などの分野で重要な課題である。この中で、自由表面を有する半無限弾性波動場の計算は、境界条件の影響、すなわち、そこでの P 波と S 波の相互作用や Rayleigh 波の発生¹⁾によって複雑な扱いが要求される。こうした事情の下でも、地中を伝播する波動を理解する上で、半無限弾性波動場の解析は重要なことである。また、近年は計算機性能の大幅な向上のみならず、高密度多点の地震観測の試みもあり(たとえば²⁾)、観測データの蓄積や計算機性能の向上に見合う、解析技術の高度化も求められていると考えられる。

著者らの研究グループは波動解析のための領域積分方程式に着目し、一連の研究を行ってきた³⁾⁴⁾⁵⁾。領域積分方程式の数学的な利点は媒質の変動と波動場を直接数学的に結びつける点にある。このため、量子論などで有力なツール⁶⁾となってきたばかりでなく、電磁場の解析にも積極的に用いられてきている⁷⁾。弾性波動場の解析においても、Born 近似⁸⁾⁹⁾を用いた研究ばかりでなく、最近では FFT-CG 法¹⁰⁾の適用事例も見られるように領域積分方程式の利用は活発化の様相を見せている。この中で、著者らのグループの方法の特徴は、一般化 Fourier 変換³⁾と Krylov 部分空間反復解法¹¹⁾を用いた波数領域解法にある。特に、先の論文⁵⁾では、膨大な演算時間を消費する一般化 Fourier 変換に高速ア

ルゴリズムを導入することで、著者らが初めに提示した方法論³⁾で必要とした演算時間の約 1/10 で解析が行えることを示している。この解法の本質は領域積分方程式に付随する大規模な密行列の導出を不要とする以上に、係数行列そのものの導出を不要とした点にある。そして、ここでは積分演算子の関数への作用に、高速変換アルゴリズムが適用される。

しかしながら、本解析手法で大規模な 3D の波動解析を行う場合を考えると、やはり大容量の主記憶が必要とされることは免れない。たとえば地盤 grid の総数を 256^3 として、倍精度複素データを各 grid に定義した場合、一つの grid で変位は 3 成分あるから、領域全体でひとつのベクトルを確保するだけでも 800MB 近い主記憶容量が要求される。しかも、Krylov 部分空間反復解法において必要とされるいくつかの補助ベクトルやひずみテンソルを格納する領域を確保すれば、さらに要求される主記憶容量は大きくなる。近年の計算機性能の向上によっても、ひとつの PC で確保できる主記憶容量には限界があり、大規模な領域を解像度を保ち波動解析を行うために、複数の PC でデータ通信を行いながら並列計算を行う、分散メモリ型の並列計算の導入も考慮する必要がある。本論文は、この事情のもとで、著者らがこれまでに展開してきた領域積分方程式法に対して、MPI 並列計算¹³⁾を導入してその効果を実証することを目的とする。具体的な問題意識は、一般化 Fourier 変換と Krylov 部分空間反復解法をベースとする本手法に対して、どのように分散メモリ型の

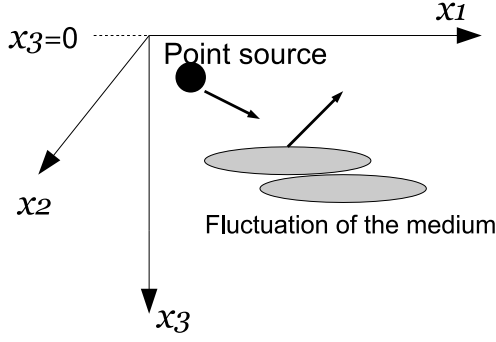


図-1 半無限弾性波動場での散乱解析の概念

並列計算を組み込むかにある。このため、本論文では領域積分方程式の解析手法を概観することから議論を始める。

2. 領域積分方程式法の概要

図-1 に示すように半無限弾性波動場の地表面に点振源を置き、地中の媒質の揺らぎに波動を照射する問題を考える。ただし、媒質の揺らぎは Lamé 定数の変動で表されることを仮定し、ここでは次のように考える。

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda_0 + \tilde{\lambda}(x) \\ \mu &= \mu_0 + \tilde{\mu}(x), \quad (x \in \mathbb{R}_+^3)\end{aligned}\quad (1)$$

ここに、 λ_0, μ_0 はバックグラウンドの Lamé 定数、 $\tilde{\lambda}$ および $\tilde{\mu}$ はそれらの変動部分を表す。また x は空間座標の点を表し、座標成分を用いて空間の点を表記する場合には

$$x = (x_1, x_2, x_3) \quad (2)$$

として添字を用いる。ここに、 x_3 は鉛直座標成分で、 $x_3 = 0$ で半無限弾性波動場の自由表面を表す。また、 x_1 と x_2 は水平座標を定義する。以降、座標成分に関して繰り返し現われる添字については総和規約を用いることにする。また、波動場の時間因子を $\exp(i\omega t)$ とする。ただし、 ω は角振動数、 t は時間である。波動場を特徴づけるための質量密度は ρ を用いて表す。

ここで与えた散乱問題の解を領域積分方程式で表現すると以下ようになる。

$$\begin{aligned}u_i(x) &= - \int_{\mathbb{R}_+^3} G_{ij}(x, y) N_{jk}(y) f_k(y) dy \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}_+^3} G_{ij}(x, y) N_{jk}(y) u_k(y) dy\end{aligned}\quad (3)$$

ここに、 u_i は散乱波動場、 G_{ij} は半無限弾性波動場の Green 関数、 f_k は入射波動場、 N_{jk} は媒質の不均質性を表現する演算子である。特に、入射波動場は、Green 関数を用いて次式で表される。

$$f_k(y) = G_{kj}(y, x_s) q_j \quad (4)$$

ただし、 q_j は地表面の点震源に与える外力ベクトルの成分、 x_s は地表面点震源の位置を示す。また、媒質の変動を表現するための演算子は、次式で表現される。

$$\begin{aligned}N_{ij}(x) &= - \left(\tilde{\lambda}(x) + \tilde{\mu}(x) \right) \partial_i \partial_j - \delta_{ij} \tilde{\mu}(x) \partial_k \partial_k \\ &\quad - \partial_i \tilde{\lambda}(x) \partial_j - \delta_{ij} \partial_k \tilde{\mu}(x) \partial_k - \partial_j \tilde{\mu}(x) \partial_i\end{aligned}\quad (5)$$

ここに、 ∂ は偏微分の演算子で、添字の座標成分で偏微分を行うことを示す。また、Green 関数は、次の方程式と境界条件を満足する。

$$\left(L_{ij} + \delta_{ij} \rho \omega^2 \right) G_{jk}(x, y) = -\delta_{ik} \delta(x - y) \quad (6)$$

$$P_{ij} G_{jk}(x, y) = 0, \quad (\text{at } x_3 = 0) \quad (7)$$

ここに、 δ_{ik} は Kronecker のデルタ、 $\delta(\cdot)$ は Dirac のデルタ関数である。また、 L_{ij} および P_{ij} 演算子では次式で示される。

$$L_{ij} = (\lambda_0 + \mu_0) \partial_i \partial_j + \delta_{ij} \mu_0 \partial_k \partial_k \quad (8)$$

$$[P_{ij}] = \begin{bmatrix} \mu_0 \partial_3 & 0 & \mu_0 \partial_1 \\ 0 & \mu_0 \partial_3 & \mu_0 \partial_2 \\ \lambda_0 \partial_1 & \lambda_0 \partial_2 & (\lambda_0 + 2\mu_0) \partial_3 \end{bmatrix} \quad (9)$$

なお、式 (5) に示した媒質の揺らぎを表現する演算子は支配方程式に現れる見かけの物体力項に関連する。また、式 (9) は表面力の演算子である。

式 (3) を解くための変換と逆変換は次のように与えられる³⁾。

$$\left(\mathcal{U}_{ij} u_j \right) (\xi) = \int_{\mathbb{R}_+^3} \Lambda_{ji}^*(\xi, x) u_j(x) dx, \quad (10)$$

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{U}_{ij}^{-1} \hat{u}_j \right) (x) &= \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{\xi \in \sigma_p} \Lambda_{ij}(\xi, x) \hat{u}_j(\xi) d\xi_1 d\xi_2 \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\xi_r}^{+\infty} \Lambda_{ij}(\xi, x) \hat{u}_j(\xi) d\xi_3 d\xi_1 d\xi_2\end{aligned}\quad (11)$$

この変換は、いわゆる混合スペクトルの固有関数展開から得られるもので、量子論のテキスト(たとえば¹²⁾)などでも類似の例を見ることができる。しかしながら、弾性波動論の研究では、著者らの調べる限りにおいて、過去の事例でこの変換の例を見出すことができなかった。こうした背景のもとで、通常の Fourier 変換とは異なる、式 (11) の変換を本研究では一般化 Fourier 変換と呼ぶことにする。式 (11) の変換に現れる Λ_{ij} は一般化 Fourier 変換の核関数(文献³⁾)の式 (3.81) 参照) であり、式 (10) の Λ_{ij} に付けた添字 * は複素共役を表す。また、 ξ は波数領域の点で

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \sigma_p \cup \sigma_c \subset \mathbb{R}_+^3 \quad (12)$$

である。ただし、 σ_p は Rayleigh 波モードの波数の集合、 σ_c は実体波の波数の集合である(文献³⁾)の式 (3.71) および式 (3.77) 参照)。また、 $\mathcal{U}_{ij}$ および $\mathcal{U}_{kl}^{-1}$ は一般化 Fourier 変換および逆変換の演算子である。式 (11) に現われた ξ_r は

$$\xi_r = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \quad (13)$$

である。

一般化 Fourier 変換に現われた核関数 Λ_{ij} は次の固有値問題から得られる関数である。

$$\begin{aligned} L_{ij}\Lambda_{jk}(\xi, x) &= -\mu_0\xi_3^2\Lambda_{ik}(\xi, x) \\ P_{ij}\Lambda_{jk}(\xi, x) &= 0, \quad (\text{at } x_3 = 0) \end{aligned} \quad (14)$$

この核関数を用いて Green 関数を合成した結果は次のようになる。

$$\begin{aligned} G_{ij}(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{\xi \in \sigma_p} \frac{\Lambda_{ik}(\xi, x)\Lambda_{kj}^*(\xi, y)}{\mu_0\xi_3^2 - \rho\omega^2 + i\epsilon} d\xi_1 d\xi_2 \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\xi_r}^{\infty} \frac{\Lambda_{ik}(\xi, x)\Lambda_{kj}^*(\xi, y)}{\mu_0\xi_3^2 - \rho\omega^2 + i\epsilon} d\xi_3 d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (15)$$

ここに、 ϵ は無限小の正数で、逆変換を安定に計算するための減衰因子としての意味がある。実際の数値計算においては十分小さな正数が設定されることになる。式 (15) は一般化 Fourier 逆変換で Green 関数を合成する式となっている。

前述の領域積分方程式、式 (3) に一般化 Fourier 変換を施した結果は次のようになる。

$$\begin{aligned} \hat{u}_i(\xi) &= -\hat{h}(\xi)\mathcal{U}_{ij}N_{jk}f_k - \hat{h}(\xi)\mathcal{U}_{ij}N_{jk}\mathcal{U}_{kl}^{-1}\hat{u}_l(\xi), \\ \xi &\in \sigma_p \cup \sigma_c \subset \mathbb{R}_+^3 \end{aligned} \quad (16)$$

ここに、 $\hat{u}_i$ は u_i の一般化 Fourier 変換を示す。また、 $\hat{h}(\xi)$ は次式で示される関数である。

$$\hat{h}(\xi) = \frac{1}{\mu_0\xi_3^2 - \rho\omega^2 + i\epsilon} \quad (17)$$

領域積分方程式の高速解法は、式 (16) に Krylov 部分空間反復解法を適用するプロセスで、一般化 Fourier 変換と逆変換に高速変換を適用することで実現される⁵⁾。この高速変換は通常の FFT と高速 Laplace 変換¹⁴⁾ で構成される。なお、Krylov 部分空間反復解法で必要となる内積の計算は次の波数領域の内積

$$\begin{aligned} &(\hat{f}_i(\xi), \hat{g}_i(\xi)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{\xi \in \sigma_p} \hat{f}_i^*(\xi)\hat{g}_i(\xi)d\xi_1d\xi_2 \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\xi_r}^{+\infty} \hat{f}_i^*(\xi)\hat{g}_i(\xi)d\xi_3d\xi_1d\xi_2 \end{aligned} \quad (18)$$

の離散化された形式を用いることになる。このことは、Krylov 部分空間反復解法の並列化プロセスでもう一度論じる。

また、ここで展開されている領域積分方程式法の本質的な特徴は式 (14) で定義された半無限弾性波動場の固有値問題を基に Green 関数を表現法を獲得するばかりでなく、積分方程式のスペクトル分解と合成のプロセスを明らかにする点にある。Krylov 部分空間反復解法が適用可能となる理由もこの点に基づく。この意味で式 (14) で与える固有値問題は、定式化の重要な出発点となっている。

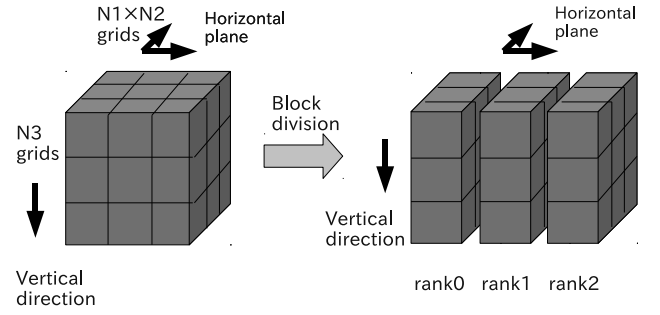


図-2 地盤 grid モデルとブロック分割

3. 領域積分方程式法に対する並列アルゴリズム

前述のように、領域積分方程式に対する並列アルゴリズムの導入は、一般化 Fourier 変換と逆変換および Krylov 部分空間反復解法のプロセスをどのように並列化するかが中心的な問題となる。まず一般化 Fourier 変換と逆変換に並列アルゴリズムを組み込むために、これらを次のように記述してみる³⁾。

$$\begin{aligned} \hat{u}_i(\xi) &= (\mathcal{F}_{im}^{(v)} T_{mj}^* \mathcal{F}_{ij}^{(h)} u_j)(\xi) \\ u_i(x) &= (\mathcal{F}^{(h)-1} T_{mi} \mathcal{F}_{mj}^{(v)-1} \hat{u}_j)(x) \end{aligned} \quad (19)$$

ここに、 $\mathcal{F}^{(h)}$ および $\mathcal{F}^{(h)-1}$ は水平座標成分に関する Fourier 積分変換と逆変換¹⁵⁾ の演算子である。すなわち、

$$\begin{aligned} &(\mathcal{F}^{(h)} u)(\hat{x}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} u(x) e^{-i x_1 \xi_1 - i x_2 \xi_2} dx_1 dx_2 \\ &(\mathcal{F}^{(h)-1} u)(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} u(\hat{x}) e^{i x_1 \xi_1 + i x_2 \xi_2} d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (20)$$

ただし、式 (20) に現われた $\hat{x}$ は

$$\hat{x} = (\xi_1, \xi_2, x_3) \quad (21)$$

である。また、式 (19) 中の T_{ij} はユニタリ行列で次の成分を持つ。

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ i c & i s & 0 \\ i s & -i c & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

ここに、

$$c = \xi_1/\xi_r, \quad s = \xi_2/\xi_r \quad (23)$$

である。また、 $\mathcal{F}_{ij}^{(v)}$ および $\mathcal{F}_{ij}^{(v)-1}$ は鉛直座標成分に関する変換である。これらは非常に煩雑な形式を持つものの、均質波に対する Fourier cosine および sine 変

```

do  $kk = 1 \sim N_3$ 
  do  $ip = 1 \sim N_1 * N_2$ 
     $v_j(ip) \leftarrow u_j(ip, kk), \quad (j = 1, 2, 3)$ 
  end do
  apply FFT2D to  $v_j \rightarrow w_j \quad (j = 1, 2, 3)$ 
  do  $ip = 1 \sim N_1 * N_2$ 
     $u_i(ip, kk) \leftarrow T_{ij}^* w_j, \quad (i = 1, 2, 3)$ 
  end do
end do

do  $ip = 1 \sim N_1 * N_2$ 
  do  $kk = 1 \sim N_3$ 
     $s_j(kk) \leftarrow u_j(ip, kk), \quad (j = 1, 2, 3)$ 
  end do
  apply FFT1DV to  $s_j, \quad (j = 1, 2, 3)$ 
  store the results  $\rightarrow u_j^{(R)}(ip), \quad (j = 1, 2, 3)$ 
  store the results  $\rightarrow u_j^{(B)}(ip, kk),$ 
     $(kk = 1 \sim N_3, j = 1, 2, 3)$ 
end do

```

図-3 離散一般化 Fourier 変換のアルゴリズム

換ならびに非均質波に対する Laplace 変換に分解される．詳細な議論は文献⁵⁾に譲ることとする．

式 (19) に示された一般化 Fourier 変換を図-2 のブロック分割前の地盤 grid モデルに対して具体的なアルゴリズムで表現してみる．この地盤 grid モデルでは、水平方向の grid 数が $N_1 \times N_2$ 、鉛直方向の grid 数が N_3 である．図-3 はこの一般化 Fourier 変換の具体的なアルゴリズムを示したものである．ここでは、地盤の各 grid で定義された物理量 $u_j(ip, kk), (j = 1, 2, 3)$ がどのように変換されるかを示している．添字の ip は grid の水平成分の番号、 kk は鉛直 grid の番号を示している．また、図中の FFT2D は式 (19) に現われた $\mathcal{F}^{(h)}$ を離散的に FFT を用いて行うことを示し、FFT1DV は同様に $\mathcal{F}_{ij}^{(v)}$ の演算を離散的に FFT と高速 Laplace 変換で計算することを示している．最後に現われる変数 $u_j^{(R)}$ および $u_j^{(B)}$ は変換の結果が Rayleigh 波成分と実体波成分に分離されて現われることから、それぞれの結果を格納することを示している．なお、図中で用いた v_j, w_j および s_j は途中の計算結果を格納する一次元の配列である．

図-3 より、このアルゴリズムで最も長いループは ip をパラメータとする水平 grid 成分に関するものであることが分かる．したがって、このループにブロック分割を施してみる．このときに一般化 Fourier 変換のアルゴリズムは図-4 に示すようになる．図-3 に示された 1 から $N_1 * N_2$ までの ip のループは $ista$ から $iend$ までのループに分割されている．このブロック分割と実際の地盤 grid モデルの関係は図-2 の右側の図のようになる．地盤 grid モデルは、鉛直方向にスライスされ、各 grid で定義された物理量はこのスライスに応じ

```

do  $kk = 1 \sim N_3$ 
  do  $ip = ista \sim iend$ 
     $v_j(ip) \leftarrow u_j(ip, kk), \quad (j = 1, 2, 3)$ 
  end do
  apply mpi_allgather to  $v_j, \quad (j = 1, 2, 3)$ 
  apply FFT2D to  $v_j \rightarrow w_j, \quad (j = 1, 2, 3)$ 
  do  $ip = ista \sim iend$ 
     $u_i(ip, kk) \leftarrow T_{ij}^* w_j, \quad (j = 1, 2, 3)$ 
  end do
end do

do  $ip = ista \sim iend$ 
  do  $kk = 1 \sim N_3$ 
     $s_j(kk) \leftarrow u_j(ip, kk), \quad (j = 1, 2, 3)$ 
  end do
  apply FFT1DV to  $s_j, \quad (j = 1, 2, 3)$ 
  store the results  $\rightarrow u_j^{(R)}(ip), \quad (j = 1, 2, 3)$ 
  store the results  $\rightarrow u_j^{(B)}(ip, kk),$ 
     $(kk = 1 \sim N_3, j = 1, 2, 3)$ 
end do

```

図-4 離散一般化 Fourier 変換の並列アルゴリズム

て各 rank のメモリに格納される．必要な情報のみが各 rank のメモリに格納できるように、メモリの動的な割り振りをここで行う¹⁶⁾．このとき、一般化 Fourier 変換のプロセスで必要となる各メモリ間でのデータ通信は図-4 に示すように FFT2D の実行の前のみで必要となる．これは、FFT2D の実行に際してはある水平面全体の情報が必要になるためである．一般化 Fourier 変換の演算の結果の格納はブロック分割された領域に配置すれば良い．なお、一般化 Fourier 逆変換のアルゴリズムは式 (19) に基づき、図-3 の逆をたどれば良い．したがって、その並列化に関しても、ここまでの議論と同様にすれば良く、その議論は省略しても良いであろう．

ここで、Krylov 部分空間反復解法¹¹⁾と、ここでの並列化手法との関連について述べておく．Krylov 部分空間反復解法は、周知のように連立方程式

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (24)$$

に対して、Krylov 部分空間

$$K_m = \text{span}\{\mathbf{b}, A\mathbf{b}, A^2\mathbf{b}, \dots, A^m\mathbf{b}\} \quad (25)$$

から直交基底を取り出し、連立方程式の近似解を構成するための漸化式の係数を決定する．ただし、ここでは m は反復回数を示している．Krylov 部分空間反復解法を領域積分方程式に適用するためには行列 A を波数領域の積分方程式、式 (16) で扱う線形演算子に読み替えること、すなわち、

$$A \rightarrow \delta_{ik} + \hat{h}(\xi) \mathcal{U}_{ij} N_{jl} \mathcal{U}_{lk}^{-1} \quad (26)$$

とすることが必要となる．このとき，扱う波数領域は離散化されており，この離散化に従いベクトルの内積は式 (18) に基づき次のように考える．

$$\begin{aligned}
& (\hat{f}_i, \hat{g}_i) \\
&= \sum_{i=1}^3 \sum_{ip=1}^{N_1 \times N_2} f_i^{(R)*}(ip) g_i^{(R)}(ip) \Delta \xi_1 \Delta \xi_2 \\
&+ \sum_{i=1}^3 \sum_{kk=1}^{N_3} \sum_{ip=1}^{N_1 \times N_2} f_i^{(B)*}(ip, kk) \\
&\quad \times g_i^{(B)}(ip, kk) \Delta \xi_1 \Delta \xi_2 \Delta \xi_3 \quad (27)
\end{aligned}$$

ここで $\Delta \xi_j$, ($j = 1, 2, 3$) は波数領域の grid 間隔である．この grid 間隔の設定の下で，式 (26) の演算子 A で考慮する波数は

$$\begin{aligned}
& \xi_1 \in \{n_1 \Delta \xi_1 \mid n_1 \in \mathbb{N}_1\} \\
& \xi_2 \in \{n_2 \Delta \xi_2 \mid n_2 \in \mathbb{N}_2\} \\
& \xi_3 \in \{\xi_3 \mid F(\xi_r, \xi_3) = 0\} \cup \\
& \quad \{\sqrt{\xi_r^2 + (n_3 \Delta \xi_3)^2} \mid n_3 \in \mathbb{N}_3\} \quad (28)
\end{aligned}$$

の値を取る．ただし， $\mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2$ および $\mathbb{N}_3$ は整数の集合で，

$$\begin{aligned}
& \mathbb{N}_1 = \{n \mid -N_1/2 \leq n < N_1/2\} \\
& \mathbb{N}_2 = \{n \mid -N_2/2 \leq n < N_2/2\} \\
& \mathbb{N}_3 = \{n \mid 0 \leq n \leq N_3 - 1\} \quad (29)
\end{aligned}$$

である．また，式 (28) における F は Rayleigh 関数で

$$F(\xi_r, \xi) = (2\xi_r^2 - \xi_3)^2 - 4\xi_r^2 \gamma \nu \quad (30)$$

である．ただし，

$$\nu = \sqrt{\xi_r^2 - \xi_3^2}, \quad \gamma = \sqrt{\xi_r^2 - (c_T/c_L)^2 \xi_3^2} \quad (31)$$

であり， c_T および c_L は S 波と P 波の速度である． ξ_3 のとり得る値の範囲が複雑となる理由は，高速変換アルゴリズムで用いる積分のパラメータが複雑となる理由に基づく⁵⁾．

一般化 Fourier 変換に対する並列化の議論からも明らかのように，ここで採用したブロック分割によって，波数領域のベクトルおよびその線形変換の結果は，それぞれのブロック分割された領域ごとに別々に格納されている．したがって，本手法における Krylov 部分空間反復解法の適用で必要となる内積の計算も各 rank ごとに別々に行えば良い．具体的には，式で rank の番号を p ，各 p での ip の変域を B_p で表すことにすれば，各 rank で計算する内積は次のようになる．

$$\begin{aligned}
& (\hat{f}_i, \hat{g}_i)_p \\
&= \sum_{i=1}^3 \sum_{ip \in B_p} f_i^{(R)*}(ip) g_i^{(R)}(ip) \Delta \xi_1 \Delta \xi_2 \\
&+ \sum_{i=1}^3 \sum_{kk=1}^{N_3} \sum_{ip \in B_p} f_i^{(B)*}(ip, kk) \\
&\quad \times g_i^{(B)}(ip, kk) \Delta \xi_1 \Delta \xi_2 \Delta \xi_3 \quad (32)
\end{aligned}$$

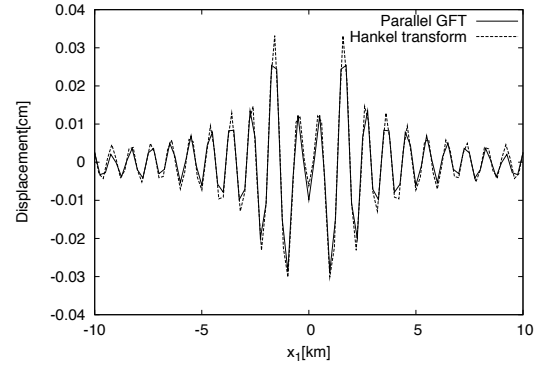


図-5 Green 関数の比較 (parallel GFT と Hankel 変換)

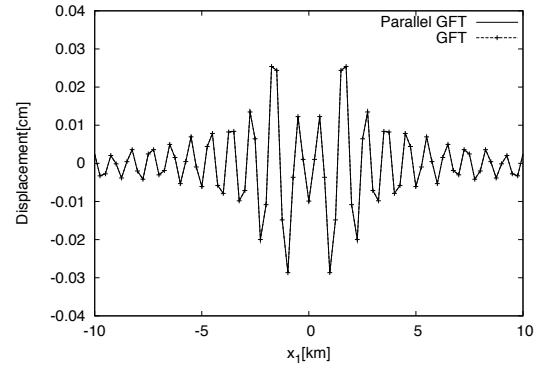


図-6 並列化前後での地表面上での Green 関数の値の比較

以上の議論より明らかなように，ここでの並列計算の実現には数学的な定式化そのものに変更を加えることはせず，do-loop へのブロック分割のみで行っている．したがって，並列計算と単体計算で数値的な差異が生じたとすれば，解析プログラムに bug が無い限り，それらは数値計算における丸め誤差によるものとなる．

4. 数値計算例

4.1 並列化計算による Green 関数の合成

まず，並列化された一般化 Fourier 変換のサブルーチンの機能のチェックを半無限弾性波動場の Green 関数の合成を通して行ってみる．ここで設定する半無限弾性波動場の定数は $\lambda_0 = 4$ GPa, $\mu_0 = 2$ GPa, $\rho = 2$ g/cm³ とする．地中より 1 km 下方に点振源を設定し，加振振動数は 1Hz，加振方向は鉛直方向とし，加振力は 1×10^{10} N とする．ただし，振源の水平座標は原点にとる．解析に用いる Grid の数は $N_j = 256$ ，空間 grid 間隔は $\Delta x_j = 0.25$ km, ($j = 1, 2, 3$) とする．波数空間の grid 間隔は

$$\Delta x_j \Delta \xi_j = \frac{2\pi}{N_j}, \quad (j = 1, 2, 3) \quad (33)$$

を用いて決定する．

図-5 は Hankel 変換で計算した Green 関数と一般化 Fourier 変換を並列化して計算した Green 関数との比較である．図中 parallel GFT は一般化 Fourier 変換に

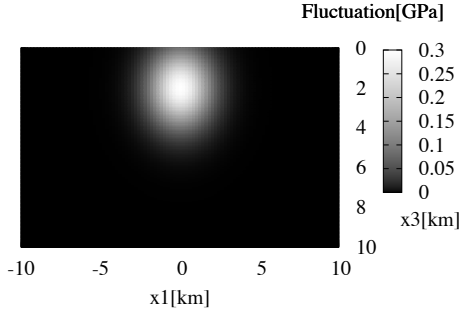


図-7 媒質の揺らぎ ($\tilde{\lambda}$ および $\tilde{\mu}$)

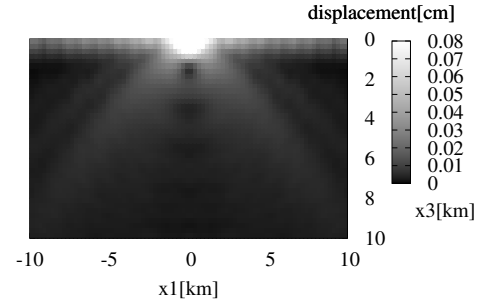


図-8 鉛直断面における入射波動場の振幅

並列化を施して得た計算結果である．比較は地表面上で行い，横軸に x_1 軸をとっている．この比較によれば両者は極めて良好に一致している．グラフの一部で一般化 Fourier 変換の結果で変位のピークが捉えきれないところがある．これは一般化 Fourier 変換の計算に用いた空間解像度が Hankel 変換で用いた空間解像度 0.2km より若干低くなっていることも原因と考えられる．ここでの一般化 Fourier 変換を用いた Green 関数の計算では，3-D の地盤 grid のすべてに対して，一度の変換で変位場を求めている．しかし，Hankel 変換による Green 関数の計算では 3-D の grid 点すべてを同時に扱う必要はない．一般化 Fourier 変換で扱う空間解像度このために若干低くせざるを得ない．Hankel 変換の空間解像度の差異はこの理由に基づいている．

図-6 は一般化 Fourier 変換に並列化を施した場合とそうでない場合の Green 関数の比較である．ここでも Green 関数の比較は地表面上で行った．この比較によれば，両者はほぼ完全に一致しており，本論文で提示した一般化 Fourier 変換に対する並列化手法が適切に行われていることを示している．

4.2 並列化計算による散乱解析の検証

次に散乱解析を通して，ここでの並列計算の妥当性の検証を行う．媒質の揺らぎは単位を GPa として次式で設定する．

$$\begin{cases} \tilde{\lambda}(x) = 0.3 \exp(-0.3|x - x_0|^2) \\ \tilde{\mu}(x) = 0.3 \exp(-0.3|x - x_0|^2) \end{cases} \quad (34)$$

ここに， x_0 は揺らぎの中心座標で，

$$x_0 = (0, 0, 2) \text{ [km]} \quad (35)$$

で与える．媒質の揺らぎの状況を地盤モデルの鉛直断面で表したものを図-7 に示す．この図より明らかなように媒質の揺らぎは地表面付近に局在した半径 2km ほどの領域に存在する．

入射波動場の設定のため，振源の座標は地表面の原点に取る．加振振動数は 1Hz，加振方向は鉛直，振幅は 1×10^{10} N とする．入射波動場を図-8 に示す．この波

動場は並列計算の結果を基に算出した．図-8 より明らかなように，入射波動場の振幅の高い領域は地表面に沿った部分と，地中深部に斜め方向に進行してゆく部分に見られる．地表面付近で高い振幅を示す波動は波数スペクトルの検討結果から Rayleigh 波であることが分かっている¹⁷⁾．また，斜め下方へ強い指向性を持って伝播する波動は実体波であり，点加振で生じる実体波はあまり空間的には広がらずに伝播して行くことが分かる．

この入射波動場に対して，地表面上の散乱波 (実部) を並列計算を用いて計算した結果を図-9 に示す．図-9 は $x_1 - x_2$ 平面上で変位 (実数部) を表し，参考のために単体計算の結果も合わせて比較して示している．結果によれば，散乱波は同心円状に震源のまわり広がっており，球対称の媒質の揺らぎに対する鉛直加振外力の性質を反映した結果が得られている．なお，単体計算と並列計算の結果は極めて良好に一致しており，ここでの並列アルゴリズムの妥当性も確認できる．

数値計算は AMD opteron 2.4GHz の PC で行った．4CPU を用いた並列計算と非並列計算で要した演算時間の比較を図-10 に示す．演算に要した時間は非並列計算で 50min 並列計算で 18min であった．Bi-CGSTAB 法で解が収束するのに必要な反復回数 (相対残差 0.001 以下) は 2 回である．4CPU による並列計算で約 65% 演算時間の削減に成功している．なお，並列計算を n 個の CPU で行う場合，演算時間も $1/n$ となることを期待したいところである．しかしながら，解析プログラム中の箇所によっては並列化は不可能なところも存在する．このため，演算時間はどうしても $1/n$ より大きくなる．並列化が不可能で演算時間に影響する箇所は，ここでの手法で言えば，たとえば図-4 における FFT2D のコールの箇所である．ここではブロック分割されたループを閉じ，MPI のデータ通信の後，鉛直 grid に関するループの中で FFT2D をコールしている．そして，FFT2D の実行は一つの cpu で実行しなければならない．詳細な議論は省略せざるを得ないが，こうした問題は一般化 Fourier 逆変換でさらに顕著となる．今後，演算時間のさらなる削減を考える場合には，この問題の解決も重要である．

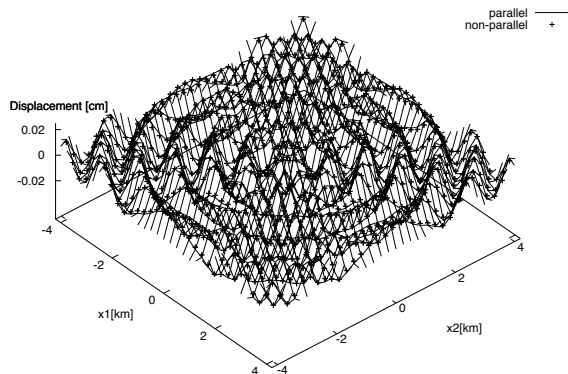


図-9 地表面における散乱波動場の比較

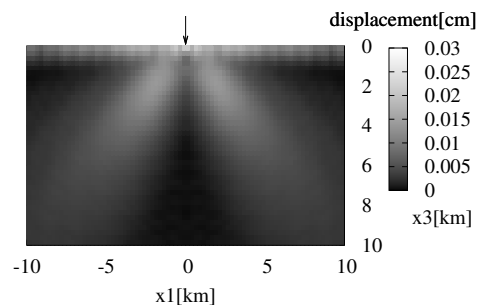


図-11 鉛直断面での散乱波の振幅 (加振位置 $x_1 = 0$ km)

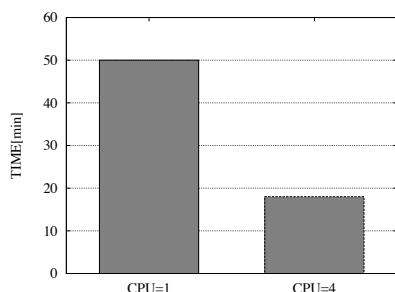


図-10 演算時間の比較

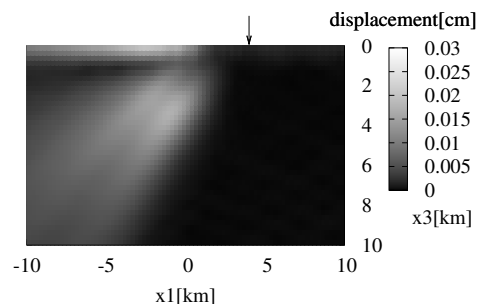


図-12 鉛直断面での散乱波の振幅 (加振位置 $x_1 = 4$ km)

4.3 振源の位置と散乱波の関係

前述のように図-9に示した地表面上の散乱波が同心円状に広がっているのは、球対称な媒質の揺らぎの直上で、鉛直加振外力を与えているためである。このときの散乱波の鉛直断面での振幅の分布を図-11に示す。これより以降、地表面の振源の位置は矢印で表現する。また、図中のタイトルには振源の位置の x_1 座標のみ明示している。散乱波の変位振幅は、入射波動場の特徴を受けて、鉛直斜め下方へ指向性を持った実体波が伝播してゆくことが見てとれる。そして、媒質の揺らぎの存在領域では散乱波の振幅は小さくなっている。媒質の揺らぎ付近で散乱波の振幅が小さい理由は図-8に示すように、入射波振幅そのものが、揺らぎの存在領域付近で小さくなっていることによると考えられる。

ここで、振源位置を x_1 軸上を移動させてみる。媒質の揺らぎの条件は図-7を用いる。図-12は振源位置を $x_1 = 4$ km, $x_2 = 0$ km としたときの鉛直断面の散乱波の振幅の分布である。地表面付近では媒質の揺らぎの直上で Rayleigh 波が励起され、前方へ伝播している様子が理解できる。Rayleigh 波が媒質の揺らぎ直上付近から励起される理由は、媒質の揺らぎ付近で生成された散乱波が地表で反射し、そこで Rayleigh 波として伝播を始めるためと考えられる。斜め下方へ伝播する実体波については、今度は媒質の揺らぎ付近で生成さ

れている。これは媒質の揺らぎの背後で、媒質の揺らぎに起因する波動場の変動成分を埋め合わせるように、入射波と同程度の散乱波が発生しているためである。

図-13は振源位置を $x_1 = 8$ km, $x_2 = 0$ km としたときの鉛直断面の散乱波の振幅の分布である。地表面付近ではやはり媒質の揺らぎの直上で Rayleigh 波が励起され、前方へ伝播の様子が理解できる。しかしながら、Rayleigh 波の振幅は振源位置が $x_1 = 4$ km のときよりも小さくなっている。ここで、振幅が小さくなっているのは Rayleigh 波のみならず、斜め下方へ伝播する実体波についても言えることである。実体波の振幅が小さくなった理由は、斜め下方に伝播する入射波の実体波成分が媒質の揺らぎに強く当たらなかったためと考えられる。すなわち、実体波は伝播のプロセスでの指向性がこの結果に反映していると考えられる。また、このために Rayleigh 波の振幅も小さくなったと考えられる。

これらの数値計算で共通することは、媒質の揺らぎの直上付近で Rayleigh 波が励起されること、斜め下方に伝播する散乱波は入射波動の実体波成分に影響されていることである。ここでの計算はすべて並列計算に基づいている。これら並列計算の結果は半無限弾性波動場の散乱現象を良く説明していると言える。

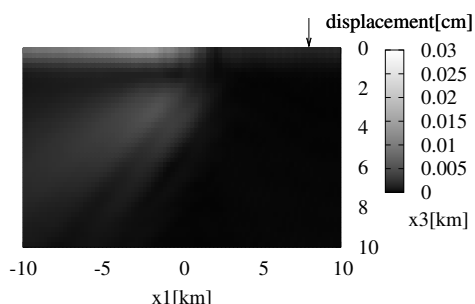


図-13 鉛直断面での散乱波の振幅 (加振位置 $x_1 = 8$ km)

5. 結論

本論文では、半無限弾性波動場のための領域積分方程式法に対して、MPI 並列計算の導入を試みたものである。一般化 Fourier 変換と Krylov 部分空間反復解法をベースとする本手法に対して、どのように分散メモリ型の並列計算を組み込むかが問題の出発点であった。このために、まず一般化 Fourier 変換と逆変換の構造とアルゴリズムを考察した。そして、この考察を基に水平座標の grid に関するループのブロック分割を用いる手法を提示した。そして、このブロック分割の方法が Krylov 部分空間反復解法のプロセスとも良く調和することが分かった。並列化手法の妥当性の検証は、Green 関数の値および散乱解析の結果を基に行った。数値計算結果によれば、並列化によっても Green 関数の値および散乱波の値はほとんど変わらず、並列化手法の妥当性が結論できた。演算時間の削減効果についても 4 CPU を用いた並列計算で、従来の演算時間の約 65% が削減できた。このことは、領域積分方程式に対するここでの方法が並列化にも適したものであることを示すと考えられる。今後の課題は、高密度の地震観測²⁾の解析例などでの空間スケールが (数十 km)²であることを考慮して、この空間スケール規模での高解像度の波動解析を行うことである。

謝辞

本研究は、小林遼氏 (元東京理科大学大学院学生、現トヨタ自動車 (株) 勤務) との議論に多くを負っています。記して感謝の意を表します。

参考文献

- 1) Aki, K. and Richards, P.G.: *Quantitative Seismology*, University Science Books, 2002.
- 2) <http://www.rcep.dpri.kyoto-u.ac.jp/main/research/manten/>
- 3) Touhei, T.: Generalized Fourier transform and its application to the volume integral equation for elastic wave propagation in a half space, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 46, pp. 52-73, 2009.
- 4) Touhei, T., Kiuchi, T. and Iwasaki, K.: A fast volume integral equation method for the direct/inverse elastic wave scattering phenomena. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 46, pp. 3860-3872, 2009.
- 5) 東平光生, 高岸智紘, 和嶋泰亮, : 領域積分方程式を用いた半無限弾性波動場の散乱解析についてのいくつかの考察, 応用力学論文集, Vol. 12, pp. 27-34. 土木学会, 2009.
- 6) Ikebe, T.: Eigenfunction expansions associated with the Schroedinger operators and their applications to scattering theory, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 5, pp. 1-34, 1960.
- 7) De Zaeytj, J., Bogaert, I. and Franchois, A.: An efficient hybrid MLFMA-FFT solver for the volume integral equation in case of sparse 3D inhomogeneous dielectric scatterers, *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, 7052-7068, 2008.
- 8) Colton, D. and Kress, R.: *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, Berlin, Springer, 1998.
- 9) Hudson, J. A. and Heritage, J. R.: The use of the Born approximation in seismic scattering problems, *Geophys. J.R. astr. Soc.*, Vol. 66, 221-240, 1981
- 10) Yang, J., Abubaker, A., van den Berg, P.M., Habashy, T.M. and Reitich, F.: A CG-FFT approach to the solution of a stress-velocity formulation of three-dimensional scattering problems, *Journal of Computational physics*, Vol. 227, 10018-10039, 2008.
- 11) Barrett, M., Berry, M., Chan, T.F., Demmel, J., Donato, J. M., Dongarra, J., Eijkhout, V., Pozo, R., Romine, C. and Van der Vorst, H.: *Templates for the solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*, SIAM, 1994.
- 12) ランダウ, リフシッツ: 量子力学 1, ランダウ=リフシッツ理論物理学教程, 東京図書株式会社, 1983
- 13) Pacheco, P.S.: *Parallel programming with MPI*, Morgan Kaufmann Publishers, Co. Ltd, 1997.
- 14) Strain, J.: A fast Laplace transform based on Laguerre functions *Courant Institute of Mathematical Sciences*, 2000.
- 15) Reed, M. and Simon, B.: *Method of Modern Mathematical Physics*, Vol. II, Fourier Analysis and Self-adjointness, Academic Press, 1975.
- 16) <http://accr.riken.jp/HPC/training.html>
- 17) 村木宏彰: 半無限弾性波動場における散乱解析に用いる Green 関数について, 東京理科大学理工学部土木工学科平成 19 年度卒業論文, 2009.3.

(2010 年 3 月 9 日 受付)