

表面せん断応力の影響を考慮した厚肉矩形平板の三次元弾性解析

Three-Dimensional Elastic Analyses of Rectangular Thick Plates with Surface Shear Traction

未武義崇*

Yoshitaka Suetake

*工博, 足利工業大学教授, 工学部都市環境工学科 (〒326-8558 足利市大前町 268-1)

In bending analysis of thick plates, many authors have presented refined theories including transverse shear deformation. Three-dimensional analysis is also effective in the plate analyses. In most of those analyses, however, surface shear stresses are not considered as traction boundary conditions. In order to treat with the surface shear tractions, we have to select appropriate trigonometric series. In this paper, we introduce particular solution parts which correspond to the surface shear tractions. It follows from present investigation that the present series solutions converge numerically, the surface shear tractions cause drilling rotation of plates and affect displacement and stress distribution along the thickness significantly.

Key Words: thick plate analysis, transverse shear deformation, drilling rotation, surface shear tractions, convergence of series solutions

キーワード: 厚板解析, 横せん断変形, 表面せん断応力, 面内回転, 級数解の収束

1. はじめに

平板の曲げ解析に関する古典理論としては, 薄板に対する Kirchhoff 理論と共に, 中等厚板を想定した Reissner 理論¹⁾および Mindlin 理論²⁾が著名である. Reissner および Mindlin の理論が提案されて以来, 横せん断変形の影響を考慮した数多くの曲げ理論が考案されている. とりわけ, 1970 年代後半から 1980 年代初頭にかけては, 解析精度の向上を目的とした種々の高次理論が提案されている. すなわち, 物理量の板厚方向分布を, 板厚方向座標 z の高次項を含む形で仮定した理論である. 例えば, Levinson³⁾あるいは Reddy⁴⁾は, z の 3 次項まで考慮した面内変位の分布を仮定している. このため, 板上下面における表面せん断応力ゼロの条件をあらかじめ満足する変位場を仮定することができ, Mindlin 理論で導入された“せん断補正係数”が不要となる. しかしながら, 古典的な Reissner-Mindlin 理論と共に, Levinson あるいは Reddy の理論においては, 板中央面の伸縮が無視されているため, 厚板の変位や応力の板厚方向分布については, 必ずしも妥当な解が得られない.

一方, 板中央面の伸縮を加味した高次理論としては, 面内変位について z の 3 次項, たわみについて z の 2 次項まで考慮して定式化を行った, Lo, Christensen および Wu の理論⁵⁾⁷⁾が知られている. Lo-Christensen-Wu の理論⁵⁾では, 停留ポテンシャルエネルギーの原理を用いて定式化が行われており, 変位や応力の板厚方向分布についても比較的高精度の解析が可能である. しかしながら, z の高次項に

対応して導入された合応力の物理的な意味が必ずしも明確でなく, 古典的な厚板の曲げ理論と比較して, 極めて複雑な理論になっている.

上記の理論は, Reissner 理論を除けば, いずれも変位仮定の理論である. 一方, 応力仮定に基づく高次理論についても, 多くの提案がなされている. 代表的な高次平板理論としては, Ambartsumyan の理論⁸⁾, 修正された Reissner の理論⁹⁾¹¹⁾, Voyiadjis-Baluch の理論¹²⁾, Rehfield らの理論^{13),14)}などがある. Ambartsumyan の理論⁸⁾においては, 板厚方向に一定のたわみが仮定されているが, その他の理論においては, たわみの板厚方向変化が考慮されている. さらに, 上記の高次理論をその特別な場合として抱合する一般化高次理論が平島ら^{15),16)}によって考案されている. 平島らは, 考案した理論の解析精度についても各種平板理論との比較検討^{17),18)}を行っている. こうした平板理論の高次化は, 解析精度の向上につながる一方, 理論構成の複雑化によって, 古典理論の持つ簡明さを損なう結果ももたしている.

平板の曲げ理論においてこれまで主流を占めてきた, こうした理論の高次化傾向に対し, 筆者は, できる限り低次の変位場を仮定し, なおかつ比較的高い解析精度が期待できるような, 簡明な平板理論の構築を模索¹⁹⁾²¹⁾してきた. そして, 板の横荷重に占める物体力および表面力を明確に区別して荷重構成を評価することが, 重要な鍵になることを明らかにした. 特に, 文献 2) においては, 面内変位について中央面の伸縮を加味した 3 次の変位場を仮定すると共に, 板厚方向に一定のたわみを仮定し, 横せん断変

形を考慮した最も低次の平板理論を考案した。結果的に、横荷重の構成を明確にした新たな平板理論を用いれば、板厚方向の変位分布や応力分布を含め、比較的良好に三次元弾性解析結果を近似し得ることが明らかになった。

平板の曲げ解析に対するアプローチとしては、上述のように、板厚方向の変位や応力分布について何らかの仮定を導入し、結果的に二次元的な解析に帰着させる方法が多い。一方、周辺単純支持矩形板のように、比較的単純な境界条件の下では、三次元弾性解析が可能である。名木野ら²²⁾は、Winkler 基礎にある周辺単純支持矩形平板を三次元弾性体と見なし、三角級数で表示された解析解を誘導している。また、数値計算例として板上面に等分布荷重が作用する解析対象を選択し、Winkler 基礎の地盤反力係数をパラメータとした解析を実施している。その際、幾つかの点におけるたわみや応力の解析結果について、級数解の数値的な収束状況の確認を行っている。

筆者も、前述の平板理論¹⁹⁾²⁰⁾の妥当性やエレメントフリーガラキン法 (EFGM) に基づく三次元弾性解析²³⁾の妥当性を検証するための比較対象として、文献22)と同様の三角級数表示を用いた周辺単純支持矩形平板の解析解を用いている。数値計算に当たっては、横荷重として板上面に等分布荷重を受ける場合と物体力を受ける場合とを明確に区別して解析を行った。平板解析や EFGM, FEM との比較を通じ、筆者が用いた三次元弾性解析も、妥当な解析結果を与えていると判断することができる。また、板中央点におけるたわみについてのみではあるが、解の収束性についても確認を行っている。

ところで、上述の平板解析は、平板理論に基づく解析であるか、三次元弾性論に基づく解析であるかに関わらず、すべて横荷重の作用のみを考慮した解析であり、板上下面における表面せん断応力の存在については想定していない。Ambartsumyan の理論⁸⁾および平島らの理論^{15), 16)}は、原理的には表面せん断応力を考慮できるものの、具体的な数値計算例を示すには至っていない。

そこで本論文では、周辺単純支持された矩形平板の三次元弾性解析を実施する際に、横荷重としての表面力だけでなく、表面せん断応力も力学的境界条件として考慮して解析を試みた。特に、表面せん断応力の存在を仮定した場合、垂直応力に関する境界条件を適用する際に、単純な係数比較ができない。本論文では、Galerkin 法を用いることでこの問題を回避した。さらに本論文では、表面せん断応力の存在と平板の面内回転との間に、密接な関係があることも明らかにした。また、三角級数解の収束性についても、Cauchy の判定法に従った検討を試みている。

本論文では、続く第2章で、表面せん断応力を考慮した場合の三次元弾性解析について述べると共に、表面せん断応力と平板の面内回転との関係や、級数解の収束性に関する吟味の方法について説明する。第3章では、本論文で数値計算例として選択した解析対象の諸条件について述べる。第4章では、数値計算例を通じて級数解の収束性について検討すると共に、板厚方向に沿った変位分布や応力分布、幅厚比と面内回転との関係についての数値計算結果を

示す。最後に、第5章で本論文の結論を述べる。

2. 三次元弾性解析

2.1 支配方程式および境界条件

三次元弾性問題の支配方程式は、Navier の式²⁴⁾で与えられる。すなわち次式である。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 U + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) + \frac{\bar{X}}{G} &= 0 \\ \nabla^2 V + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) + \frac{\bar{Y}}{G} &= 0 \\ \nabla^2 W + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) + \frac{\bar{Z}}{G} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、 U, V, W は x, y, z 方向の変位、 $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ は 3 方向の物体力をそれぞれ表わしている。また、 G はせん断弾性係数、 ∇^2 は 3 次元の Laplacian であり、次式で与えられる。

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2)$$

さらに本論文では、自重のような z 方向の物体力 $\bar{Z} = \bar{p}_0(x, y)/t$ のみを考え、 $\bar{X} = \bar{Y} = 0$ とした。

本論文では、図-1に示したような周辺単純支持された矩形平板を解析対象とする。従って、幾何学的境界条件としては、周辺単純支持に対応するように、周辺の z 方向変位 W を全てゼロとしたほか、図中に明記したように、それぞれの面に平行な方向の変位をゼロとした。すなわち、次式の通りである。

$$\left. \begin{aligned} U(x, 0, z) = U(x, b, z) &= 0 \\ V(0, y, z) = V(a, y, z) &= 0 \\ W(0, y, z) = W(a, y, z) &= 0 \\ W(x, 0, z) = W(x, b, z) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

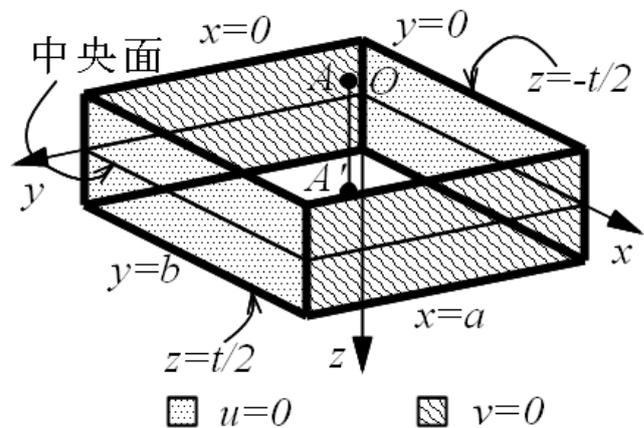


図-1 周辺単純支持された矩形平板

一方、力学的境界条件については、板上下面 ($z = \mp t/2$)

において、横荷重に対応する垂直応力が存在する他、せん断応力も作用するものとした。すなわち、次式である。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z(x, y, -\frac{t}{2}) &= -\bar{p}_1(x, y), \quad \sigma_z(x, y, \frac{t}{2}) = \bar{p}_2(x, y) \\ \tau_{xz}(x, y, -\frac{t}{2}) &= -\bar{q}_1(x, y), \quad \tau_{xz}(x, y, \frac{t}{2}) = \bar{q}_2(x, y) \\ \tau_{zy}(x, y, -\frac{t}{2}) &= -\bar{r}_1(x, y), \quad \tau_{zy}(x, y, \frac{t}{2}) = \bar{r}_2(x, y) \end{aligned} \right\} (4)$$

前述のように、板上下面におけるせん断応力、すなわち表面せん断応力の影響を加味した上で、矩形平板の力学的特性を評価するところに本論文の特徴がある。なお、板上下面境界直上における表面せん断応力はゼロと見なす。

2.2 変形された支配方程式

後述の計算の便を考慮し、式(1)を変形する。式(1)の3つの式をそれぞれ x 、 y および z で偏微分し、辺々加えて整理すると次式が得られる。

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) = 0 \quad (5)$$

ただし、物体力について $\bar{X} = \bar{Y} = 0$ および $\bar{Z} = \bar{p}_0(x, y)/t$ が z 方向に一定となることを考慮した。

次に、式(1)の第1式と第2式をそれぞれ y および x で偏微分し辺々引くと次式が得られる。

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) = 0 \quad (6)$$

さらに、式(1)の第3式にLaplacian ∇^2 を作用させ、式(5)を考慮すると次式が得られる。

$$\nabla^4 W + \frac{1}{Gt} \left(\frac{\partial^2 \bar{p}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}_0}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (7)$$

本論文では、矩形平板の三次元弾性解析に対する支配方程式として、Navierの式(1)に代えて、式(5)～(7)を用いることにする。

2.3 Fourier解析

式(3)で与えられる幾何学的境界条件を満足する変位場として、次の三角級数表示を仮定する。

$$\left. \begin{aligned} U(x, y, z) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left\{ U_{mn}(z) \cos \lambda_m x \sin \mu_n y \right. \\ &\quad \left. + U_{mn}^{(P)}(z) \sin \lambda_m x \sin \mu_n y \right\} \\ V(x, y, z) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left\{ V_{mn}(z) \sin \lambda_m x \cos \mu_n y \right. \\ &\quad \left. + V_{mn}^{(P)}(z) \sin \lambda_m x \sin \mu_n y \right\} \\ W(x, y, z) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M W_{mn}(z) \sin \lambda_m x \sin \mu_n y \end{aligned} \right\} (8)$$

ただし、 $\lambda_m = m\pi/a$ および $\mu_n = n\pi/b$ と置き、和の範囲は指標 m について $1 \sim M$ 、指標 n について $1 \sim N$ とする。和の記号は、それぞれ Σ_m および Σ_n と略記する。

式(8)において、下線部の $U_{mn}^{(P)}$ および $V_{mn}^{(P)}$ に関する部分は、式(4)に示した力学的境界条件のうち、表面せん断応力に関わる特殊解である。式(8)の下線部は、二重正弦級数で表現されているため、式(3)の幾何学的境界条件を乱すことはない。なお、表面せん断応力を考慮しない場合には、式(8)の下線部は不要となる。

一方、横荷重に対応する垂直応力 $\bar{p}_i(x, y)$ ($i=0 \sim 2$) および、表面せん断応力 $\bar{q}_\alpha(x, y)$ 、 $\bar{r}_\alpha(x, y)$ ($\alpha=1, 2$) については、それぞれ次式のようにFourier二重級数展開できるものとする。

$$\begin{aligned} \bar{p}_i &= \sum_n \sum_m \bar{P}_{mn}^{(i)} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y \\ ; \bar{P}_{mn}^{(i)} &= \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a \bar{p}_i(x, y) \sin \lambda_m x \sin \mu_n y dx dy \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \bar{q}_\alpha &= \sum_n \sum_m \bar{Q}_{mn}^{(\alpha)} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y \\ ; \bar{Q}_{mn}^{(\alpha)} &= \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a \bar{q}_\alpha(x, y) \sin \lambda_m x \sin \mu_n y dx dy \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \bar{r}_\alpha &= \sum_n \sum_m \bar{R}_{mn}^{(\alpha)} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y \\ ; \bar{R}_{mn}^{(\alpha)} &= \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a \bar{r}_\alpha(x, y) \sin \lambda_m x \sin \mu_n y dx dy \end{aligned} \quad (11)$$

式(9)を考慮しつつ、式(5)～(7)に式(8)を代入すると、基底となる二重の三角関数の係数をゼロと置く、あるいはたわみ W と物体力 \bar{p}_0 のFourier級数表示との係数比較から、5つの未定関数 $U_{mn}(z)$ 、 $V_{mn}(z)$ 、 $W_{mn}(z)$ 、 $U_{mn}^{(P)}(z)$ および $V_{mn}^{(P)}(z)$ に関する次の常微分方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dz^2} - \kappa_{mn}^2 \right) \left(\frac{dW_{mn}}{dz} - \lambda_m U_{mn} - \mu_n V_{mn} \right) &= 0 \\ \left(\frac{d^2}{dz^2} - \kappa_{mn}^2 \right) (\mu_n U_{mn} - \lambda_m V_{mn}) &= 0 \\ \left(\frac{d^2}{dz^2} - \kappa_{mn}^2 \right)^2 W_{mn} &= \frac{\kappa_{mn}^2}{Gt} \bar{P}_{mn}^{(0)} \\ \left(\frac{d^2}{dz^2} - \kappa_{mn}^2 \right) U_{mn}^{(P)} &= 0 \\ \left(\frac{d^2}{dz^2} - \kappa_{mn}^2 \right) V_{mn}^{(P)} &= 0 \end{aligned} \right\} (12)$$

ただし、 $\kappa_{mn}^2 = \lambda_m^2 + \mu_n^2$ とした。本論文では、式(12)の第1式～第3式の一般解を誘導すると共に、表面せん断応力に関する力学的境界条件を満たすように第5式・第6式を解いて特殊解 $U_{mn}^{(P)}$ および $V_{mn}^{(P)}$ を定める。第1式～第3式の一般解に含まれる任意定数は、残った力学的境界条件を適用して定めることになる。

式(12)の一般解は次の通りである。

$$U_{mn} = \frac{\lambda_m}{\kappa_{mn}} \left\{ (A_{mn} + \frac{3-4\nu}{\kappa_{mn}} D_{mn} + B_{mn} z) \cosh \kappa_{mn} z \right. \\ \left. + (C_{mn} + \frac{3-4\nu}{\kappa_{mn}} B_{mn} + D_{mn} z) \sinh \kappa_{mn} z \right\} \quad (13) \\ + \frac{\mu_n}{\kappa_{mn}} (E_{mn} \cosh \kappa_{mn} z + F_{mn} \sinh \kappa_{mn} z)$$

$$V_{mn} = \frac{\mu_n}{\kappa_{mn}} \left\{ (A_{mn} + \frac{3-4\nu}{\kappa_{mn}} D_{mn} + B_{mn} z) \cosh \kappa_{mn} z \right. \\ \left. + (C_{mn} + \frac{3-4\nu}{\kappa_{mn}} B_{mn} + D_{mn} z) \sinh \kappa_{mn} z \right\} \quad (14) \\ - \frac{\lambda_m}{\kappa_{mn}} (E_{mn} \cosh \kappa_{mn} z + F_{mn} \sinh \kappa_{mn} z)$$

$$W_{mn} = (A_{mn} + B_{mn} z) \sinh \kappa_{mn} z \\ + (C_{mn} + D_{mn} z) \cosh \kappa_{mn} z + \frac{\bar{P}_{mn}^{(0)}}{Gt\kappa_{mn}^2} \quad (15)$$

$$U_{mn}^{(P)} = G_{mn} \sinh \kappa_{mn} z + H_{mn} \cosh \kappa_{mn} z \quad (16)$$

$$V_{mn}^{(P)} = I_{mn} \sinh \kappa_{mn} z + J_{mn} \cosh \kappa_{mn} z \quad (17)$$

ここに、 A_{mn} 、 B_{mn} 、 C_{mn} 、 D_{mn} 、 E_{mn} 、 F_{mn} 、 G_{mn} 、 H_{mn} 、 I_{mn} および J_{mn} は任意定数であり、力学的境界条件式 (4) を適用することで決定することができる。

表面せん断応力に関する境界条件の適用に当たっては、若干注意が必要である。上下面 ($z = \mp t/2$) における x 方向のせん断応力に関する境界条件、 $\tau_{zx}(x, y, \pm t/2) = \bar{q}_2, -\bar{q}_1$ を例として説明する。せん断応力の定義に従えば、式 (8) の変位場を用いた場合、次の関係式が得られる。

$$\tau_{zx}(x, y, \pm t/2) = G \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{x} \right) \Big|_{z=\pm t/2} \\ = \sum_n \sum_m \left\{ \left(\frac{dU_{mn}}{dz} + \lambda_m W_{mn} \right) \Big|_{z=\pm t/2} \cos \lambda_m x \sin \mu_n y \right. \\ \left. + \frac{dU_{mn}^{(P)}}{dz} \Big|_{z=\pm t/2} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y \right\} \quad (18) \\ = \sum_n \sum_m (\bar{Q}_{mn}^{(2)}, -\bar{Q}_{mn}^{(1)}) \sin \lambda_m x \sin \mu_n y$$

係数比較によって、次の2つのグループの関係式が得られる。

$$\left(\frac{dU_{mn}}{dz} + \lambda_m W_{mn} \right) \Big|_{z=\pm t/2} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{dU_{mn}^{(P)}}{dz} \Big|_{z=\pm t/2} = \bar{Q}_{mn}^{(2)}, -\bar{Q}_{mn}^{(1)} \quad (20)$$

式 (19) は、6個の任意定数 A_{mn} 、 B_{mn} 、 C_{mn} 、 D_{mn} 、 E_{mn} および F_{mn} を求めるための、決定方程式の一部として

用いられる。一方、式 (20) を式 (16) に適用することで、2個の任意定数 G_{mn} および H_{mn} を次式のように決定することができる。

$$G_{mn} = \frac{\bar{Q}_{mn}^{(2)} - \bar{Q}_{mn}^{(1)}}{2G\kappa_{mn} ch}, \quad H_{mn} = \frac{\bar{Q}_{mn}^{(1)} + \bar{Q}_{mn}^{(2)}}{2G\kappa_{mn} sh} \quad (21)$$

ここに、 $ch \equiv \cosh(\kappa_{mn} t/2)$ および $sh \equiv \sinh(\kappa_{mn} t/2)$ である。同様に、上下面 ($z = \mp t/2$) における y 方向のせん断応力に関する境界条件、 $\tau_{zy}(x, y, \pm t/2) = \bar{r}_2, -\bar{r}_1$ より任意定数 I_{mn} および J_{mn} を次式のように決定することができる。

$$I_{mn} = \frac{\bar{R}_{mn}^{(2)} - \bar{R}_{mn}^{(1)}}{2G\kappa_{mn} ch}, \quad J_{mn} = \frac{\bar{R}_{mn}^{(1)} + \bar{R}_{mn}^{(2)}}{2G\kappa_{mn} sh} \quad (22)$$

同時に、6個の任意定数 $A_{mn} \sim F_{mn}$ を求めるための決定方程式として、次式が得られる。

$$\left(\frac{dV_{mn}}{dz} + \mu_n W_{mn} \right) \Big|_{z=\pm t/2} = 0 \quad (23)$$

残った6個の任意定数 A_{mn} 、 B_{mn} 、 C_{mn} 、 D_{mn} 、 E_{mn} および F_{mn} は、式 (4) における垂直応力に関する境界条件 $\sigma_z(x, y, \pm t/2) = \bar{p}_2, -\bar{p}_1$ 、式 (19) および式 (23) を用いて、それぞれ次のように決定することができる。

$$A_{mn} = \frac{\kappa_{mn} t \cdot ch + 4(1-\nu)sh}{4G\kappa_{mn}(\kappa_{mn} t + 2sh \cdot ch)} [\bar{P}_{mn}^{(2)} - \bar{P}_{mn}^{(1)}] \\ + \frac{4vch}{\pi(1-2\nu)sh} \left(\lambda_m \sum_{j \neq m} \{I - (-I)^{m+j}\} \frac{j}{j^2 - m^2} \frac{\bar{Q}_{jn}^{(1)} + \bar{Q}_{jn}^{(2)}}{\kappa_{jn}} \right. \\ \left. + \mu_n \sum_{k \neq n} \{I - (-I)^{n+k}\} \frac{k}{k^2 - n^2} \frac{\bar{R}_{mk}^{(1)} + \bar{R}_{mk}^{(2)}}{\kappa_{mk}} \right) \quad (24)$$

$$B_{mn} = \frac{1}{2G(\kappa_{mn} t - 2sh \cdot ch)} \left[\frac{2sh}{\kappa_{mn} t} \bar{P}_{mn}^{(0)} + ch(\bar{P}_{mn}^{(1)} + \bar{P}_{mn}^{(2)}) \right. \\ \left. - \frac{4vsh}{\pi(1-2\nu)} \left(\lambda_m \sum_{j \neq m} \{I - (-I)^{m+j}\} \frac{j}{j^2 - m^2} \frac{\bar{Q}_{jn}^{(1)} - \bar{Q}_{jn}^{(2)}}{\kappa_{jn}} \right. \right. \\ \left. \left. + \mu_n \sum_{k \neq n} \{I - (-I)^{n+k}\} \frac{k}{k^2 - n^2} \frac{\bar{R}_{mk}^{(1)} - \bar{R}_{mk}^{(2)}}{\kappa_{mk}} \right) \right] \quad (25)$$

$$C_{mn} = -\frac{\kappa_{mn} t \cdot sh + 4(1-\nu)ch}{4G\kappa_{mn}(\kappa_{mn} t - 2sh \cdot ch)} [\bar{P}_{mn}^{(1)} + \bar{P}_{mn}^{(2)}] \\ - \frac{4vsh}{\pi(1-2\nu)ch} \left(\lambda_m \sum_{j \neq m} \{I - (-I)^{m+j}\} \frac{j}{j^2 - m^2} \frac{\bar{Q}_{jn}^{(1)} - \bar{Q}_{jn}^{(2)}}{\kappa_{jn}} \right. \\ \left. + \mu_n \sum_{k \neq n} \{I - (-I)^{n+k}\} \frac{k}{k^2 - n^2} \frac{\bar{R}_{mk}^{(1)} - \bar{R}_{mk}^{(2)}}{\kappa_{mk}} \right) \\ - \frac{\kappa_{mn} t \cdot ch + 2(1-2\nu)sh}{2G\kappa_{mn}(\kappa_{mn} t - 2sh \cdot ch)} \frac{\bar{P}_{mn}^{(0)}}{\kappa_{mn} t} \quad (26)$$

$$D_{mn} = \frac{I}{2G(\kappa_{mn}t + 2sh \cdot ch)} [sh(\bar{P}_{mn}^{(1)} - \bar{P}_{mn}^{(2)}) - \frac{4vch}{\pi(1-2\nu)} (\lambda_m \sum_{j \neq m} \{I - (-1)^{m+j}\} \frac{j}{j^2 - m^2} \frac{\bar{Q}_{jn}^{(1)} + \bar{Q}_{jn}^{(2)}}{\kappa_{jn}} + \mu_n \sum_{k \neq n} \{I - (-1)^{n+k}\} \frac{k}{k^2 - n^2} \frac{\bar{R}_{mk}^{(1)} + \bar{R}_{mk}^{(2)}}{\kappa_{mk}})] \quad (27)$$

$$E_{mn} = F_{mn} = 0 \quad (28), (29)$$

ただし、式(4)における垂直応力に関する境界条件を適用する際には、二重級数の基底が共に正弦の部分と、正弦と余弦の組み合わせになっている部分とがあり、単純な係数比較ができない。そこで本論文では、Galerkin法を用い、式(4)の第1式および第2式から得られる関係式の両辺に、二重の正弦基底を乗じ、板上下面の領域で積分することで、任意定数の決定方程式を誘導した。式(24)～(27)において、 j または k に関する和がGalerkin法の適用によって生じた部分に対応している。なお、表面せん断応力を考慮しなければ、 $\bar{Q}_{mn}^{(\alpha)} = \bar{R}_{mn}^{(\alpha)} = 0$ ($\alpha = 1, 2$) となつて、単純な係数比較による任意定数の決定が可能となる。

2.4 面内回転と表面せん断応力との関係

この節では、平板の面内回転と表面せん断応力との関係について考察する。平板の面内回転は、板中央面の法線、すなわち z 軸まわりの回転を意味し、 $\partial U/\partial y - \partial V/\partial x$ で表される。つまり、式(6)が面内回転に関する支配方程式に相当するわけである。

今、面内回転 $\partial U/\partial y - \partial V/\partial x$ に式(8)の第1式および第2式を代入すると、次式が得られる。

$$\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} = \sum_n \sum_m \{ -(\lambda_m U_{mn} - \mu_n V_{mn}) \sin \lambda_m x \sin \mu_n y + \mu_n U_{mn}^{(P)} \sin \lambda_m x \cos \mu_n y - \lambda_m V_{mn}^{(P)} \cos \lambda_m x \sin \mu_n y \} \quad (30)$$

ここで、式(13)・(14)・(28)・(29)を考慮すると、式(30)の右辺において $\lambda_m U_{mn} - \mu_n V_{mn} = 0$ となることが分かる。

一方、式(21)・(22)より、4つの定数 G_{mn} 、 H_{mn} 、 I_{mn} および J_{mn} は、いずれも表面せん断応力のFourier係数 $\bar{Q}_{mn}^{(\alpha)}$ および $\bar{R}_{mn}^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2$)によって表されていることが分かる。従つて、表面せん断応力が存在する限り、4つの定数が全てゼロとなることはない。言い換えれば、特殊解 $U_{mn}^{(P)}(z)$ あるいは $V_{mn}^{(P)}(z)$ のうち、少なくとも一方はゼロにならないから、結果的に、面内回転 $\partial U/\partial y - \partial V/\partial x$ が生ずることになる。逆に、表面せん断応力が存在しなければ、 $U_{mn}^{(P)}(z)$ および $V_{mn}^{(P)}(z)$ は共にゼロとなつて、結果的に面内回転もゼロとなることが分かる。

以上の考察から、平板の面内回転と表面せん断応力との間には密接な関係があり、周辺単純支持を想定した矩形平板の場合、表面せん断応力が存在しない限り、面内回転は

発生しないことが明らかになった。

2.5 級数解の収束

本論文では、表面せん断応力の存在を仮定しているため、前述のように、垂直応力に関する境界条件を適用する際に単純な係数比較ができず、Galerkin法を用いて未定係数を決定している。つまり、直交関数系となるような基底を選択できないため、級数の項数が変化すると、6個の任意定数 $A_{mn} \sim F_{mn}$ も全て変化してしまう。言い換えると、垂直応力に関する境界条件は、常に平均的な意味で満足されているに過ぎない。このため、23節で述べたプロセスを経て決定した級数解が収束するか否かについて、常に注意深く検討する必要がある。

級数の収束性を論ずる方法の一つとして、Cauchyの判定法が良く知られている。ある点列 $\{f_n\}$ がCauchy列となることが、 $\{f_n\}$ が収束するための必要十分条件となる。すなわち次式が成立すれば、点列 $\{f_n\}$ は収束する。

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} |f_m - f_n| = 0 \quad (31)$$

従つて、式(8)で表される級数解が、Cauchy列となるかどうかを吟味すれば、解の収束性についての目安が得られる。

ここでは、関数空間のノルムを L^2 ノルムで定義する。すなわち次式である。

$$\|f(x, y)\| = \int_0^b \int_0^a \{f(x, y)\}^2 dx dy \quad (32)$$

この定義に従つて、3方向の変位 U, V, W のノルムを計算すると、板厚方向座標 z をパラメータとした次式が得られる。

$$\|{}_0U\| \equiv \frac{ab}{4} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M [({}_0U_{mn})^2 + (U_{mn}^{(P)})^2] + \frac{4}{\pi} {}_0U_{mn} \sum_{j \neq m} \{I - (-1)^{m+j}\} \frac{j}{j^2 - m^2} U_{jn}^{(P)} \quad (33)$$

$$\|{}_0V\| \equiv \frac{ab}{4} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M [({}_0V_{mn})^2 + (V_{mn}^{(P)})^2] + \frac{4}{\pi} {}_0V_{mn} \sum_{k \neq n} \{I - (-1)^{n+k}\} \frac{k}{k^2 - n^2} V_{mk}^{(P)} \quad (34)$$

$$\|{}_0W\| \equiv \frac{ab}{4} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M ({}_0W_{mn})^2 \quad (35)$$

ここに、左下添字 0 は、指標 m および n に関する和の範囲が、それぞれ $1 \sim M$ および $1 \sim N$ であるとして決定された解であることを意味している。単純に言えば、決定された任意定数の表示として、式(24)～(27)をそのまま用いた解である。

一方、Cauchyの判定法を援用するために、級数の項数を指標 m または n について、1項ずつ増やした級数解を考える。例えば、 x 方向変位 U について示すと、次の2つの解が考えられる。

$$\begin{aligned}
{}_1U &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{M+1} ({}_1U_{mn} \cos \lambda_m x \sin \mu_n y \\
&\quad + U_{mn}^{(P)} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y) \\
&= \sum_n \sum_m ({}_1U_{mn} \cos \lambda_m x \sin \mu_n y \\
&\quad + U_{mn}^{(P)} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y) \\
&\quad + \sum_n {}_1U_{M+1n} \cos \lambda_{M+1} x \sin \mu_n y
\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}
{}_2U &= \sum_{n=1}^{N+1} \sum_{m=1}^M ({}_2U_{mn} \cos \lambda_m x \sin \mu_n y \\
&\quad + U_{mn}^{(P)} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y) \\
&= \sum_n \sum_m ({}_2U_{mn} \cos \lambda_m x \sin \mu_n y \\
&\quad + U_{mn}^{(P)} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y) \\
&\quad + \sum_m {}_2U_{mN+1} \cos \lambda_m x \sin \mu_{N+1} y
\end{aligned} \tag{37}$$

ここに、左下添字 1 および 2 は、指標 m に関する和の範囲を 1 項増やして $1 \sim M+1$ とした場合、および n に関する和の範囲を 1 項増やして $1 \sim N+1$ とした場合にそれぞれ対応している。この点について、決定された任意定数の表示の相違で説明すれば、例えば ${}_1A_{mn}$ については次式のようになる。

$$\begin{aligned}
{}_1A_{mn} &= {}_0A_{mn} + \frac{4vch}{\pi(1-2\nu)sh} \lambda_{M+1} \{1 - (-1)^{m+M+1}\} \\
&\quad \times \frac{M+1}{(M+1)^2 - m^2} \frac{\bar{Q}_{M+1n}^{(1)} + \bar{Q}_{M+1n}^{(2)}}{\kappa_{M+1n}}
\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}
{}_2A_{mn} &= {}_0A_{mn} + \frac{4vch}{\pi(1-2\nu)sh} \mu_{N+1} \{1 - (-1)^{n+N+1}\} \\
&\quad \times \frac{N+1}{(N+1)^2 - n^2} \frac{\bar{R}_{mN+1}^{(1)} + \bar{R}_{mN+1}^{(2)}}{\kappa_{mN+1}}
\end{aligned} \tag{39}$$

本論文では、式(32)に示したノルムの定義に従って、次のような判定パラメータを導入し、 x および z 方向の変位 U および W の級数解が Cauchy 列となるかどうかの検討を行うことにする。

$$\left. \begin{aligned}
\rho_U &\equiv \frac{\|{}_1U - {}_0U\| + \|{}_2U - {}_0U\|}{\|{}_0U\|} \\
\rho_W &\equiv \frac{\|{}_1W - {}_0W\| + \|{}_2W - {}_0W\|}{\|{}_0W\|}
\end{aligned} \right\} \tag{40}$$

また、式(8)で表される級数解は、必ずしも一様収束するとは限らないから、式(8)を項別に微分して得られる応力またはひずみの収束性にも着目する必要がある。本論文では、せん断応力 $\tau_{zx} = G(\partial U / \partial z + \partial W / \partial x)$ に着目し、式(40)と同様に定義される次の判定パラメータを導入して検討を行った。

$$\rho_\tau \equiv \frac{\|{}_1\tau_{zx} - {}_0\tau_{zx}\| + \|{}_2\tau_{zx} - {}_0\tau_{zx}\|}{\|{}_0\tau_{zx}\|} \tag{41}$$

3. 解析モデル

本論文では、板上下面に表面せん断応力が作用する、周辺単純支持された矩形平板を解析対象として選択する。解析モデルの形状は正方形、すなわち縦横比を $\gamma = b/a = 1$ とし、幅厚比を $\theta = t/a = 0.01, 0.2, 0.5$ の3通りに変化させ、板厚方向の変位分布や応力分布の解析を行った。また、特定の点における面内回転の計算に当たっては、幅厚比を $\theta = 0.001 \sim 1.0$ の範囲で種々変化させて解析を行った。材料定数については、Poisson 比を $\nu = 0.3$ とした。荷重については、横荷重の他、表面せん断応力を作用させた。横荷重および表面せん断応力は、いずれも全面等分布であるとされた。この場合、荷重の Fourier 係数 $\bar{P}_{mn}^{(i)}$ 、 $\bar{Q}_{mn}^{(\alpha)}$ および $\bar{R}_{mn}^{(\alpha)}$ は次式で与えられる。

$$\bar{P}_{mn}^{(i)} = \begin{cases} \frac{16\hat{p}_i}{\pi^2(2j-1)(2k-1)} & (m=2j-1 \wedge n=2k-1) \\ 0 & (m=2j \vee n=2k) \end{cases} \tag{42}$$

$$\bar{Q}_{mn}^{(\alpha)} = \begin{cases} \frac{16\hat{q}_\alpha}{\pi^2(2j-1)(2k-1)} & (m=2j-1 \wedge n=2k-1) \\ 0 & (m=2j \vee n=2k) \end{cases} \tag{43}$$

$$\bar{R}_{mn}^{(\alpha)} = \begin{cases} \frac{16\hat{r}_\alpha}{\pi^2(2j-1)(2k-1)} & (m=2j-1 \wedge n=2k-1) \\ 0 & (m=2j \vee n=2k) \end{cases} \tag{44}$$

ここで、 \hat{p}_i ($i=0 \sim 2$)、 \hat{q}_α および \hat{r}_α ($\alpha=1 \sim 2$) は、いずれも一定値を意味しており、式(4)からも明らかのように、添字 1 は板上面 ($z = -t/2$) の値、添字 2 は板下面 ($z = t/2$) の値をそれぞれ表わしている。また、 \hat{p}_0 は物体力に対応している。

今回は、横荷重および表面せん断応力共に、上面に作用する等分布荷重を想定して計算を行った。荷重の大きさに関するパラメータは、以下のように設定した。

- ・ 横荷重: $\hat{p}_0 = \hat{p}_2 = 0$, $\hat{p}_1 = \hat{p}^*$
 - ・ 表面せん断応力: $\hat{q}_1 = \pm 0.5\hat{p}^*$, $\hat{q}_2 = 0$, $\hat{r}_1 = \hat{r}_2 = 0$
- なお、一定値 \hat{p}^* については、次式で定義される無次元化荷重 $\hat{\chi}^*$ の大きさが、 $\hat{\chi}^* = 1$ となるように定めた。

$$\hat{\chi}^* = \frac{\hat{p}^* a^3}{\theta D} = \frac{12(1-\nu^2)}{E\theta^4} \hat{p}^* \tag{45}$$

数値計算に当たっては、図-1に示した、平板の板厚方向の線分 AA' ($x = a/4$, $y = b/4$) 上における、面内変位分布や横せん断応力分布を求めた。また、幅厚比 θ の変化に伴う面内回転の変化についても計算を行い、線分 AA' と板上面の交点である、点 A ($x = a/4$, $y = b/4$, $z = -t/2$) における結果を示す。

級数解の収束性の検討に当たっては、級数の項数 M および N を変化させたときの、線分 AA' 上の変位分布および応力分布の変化を調べた他、板上面 ($z = -t/2$) における判定パラメータ ρ_U 、 ρ_W および ρ_τ の変化に着目した検討を行った。

4. 数値計算例

4.1 級数解の収束性

この節では、式(8)の級数解から得られる、変位および応力の収束性について検討を行う。まず、図-1における線分AA'に沿ったx方向の面内変位Uおよび横せん断応力 τ_{xz} の収束性について検討する。ここでは、級数解の項数を $M=N=500$ とした場合を基準とし、項数の変化に伴って板厚方向の誤差分布がどのように変化するかを調べた。変化させた項数については、 $M=N=30, 50, 100, 300$ の4通りとした。幅厚比 $\theta=0.5$ の場合の結果を図-2および図-3に示す。図は、横軸に $M=N=500$ の結果を基準とした誤差を、縦軸に板厚方向の無次元化座標 $\zeta = z/t$ をそれぞれとって示した。なお、図の上下と板の上下面とが一致するように、板厚方向座標の正負を図-1とは逆にして表示した。

図-2および図-3に示した結果から明らかなように、変位分布・応力分布共に、項数の増大に伴って誤差の分布がゼロに近づいていくことが分かる。このことから、本論文の級数解に、収束する傾向があると判断することができる。級数の項数が $M=N=30$ および $M=N=50$ の場合には、載荷面である板上面付近を中心に、局所的に誤差の卓越する箇所が見られる。しかしながら、誤差の数値そのものは必ずしも大きくなく、最大でも5[%]未満である。変位と応力の誤差分布を比較すると、全体的に横せん断応力の誤差の方が面内変位の誤差よりも大きくなっている。面内変位だけに限定すれば、全て1[%]未満の誤差に収まっており、少ない項数でも十分な収束性が認められる。

級数の項数を100以上にすれば、全体的に誤差分布はほぼゼロとなり、特に $M=N=300$ とすると、横せん断応力の誤差が最大となる板上面においても、0.24[%]と極めて小さな数値に抑えられている。

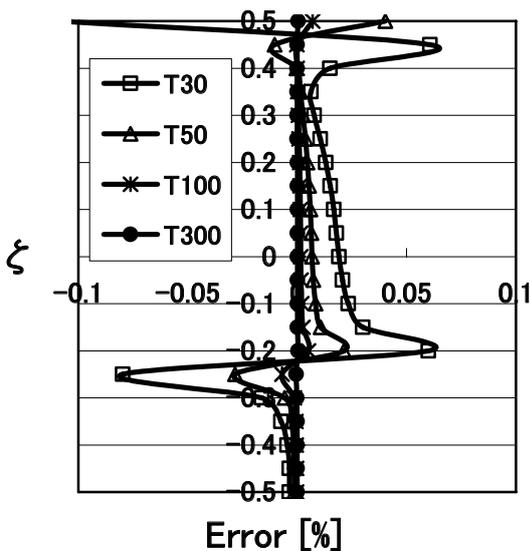


図-2 面内変位 U の誤差分布
($\theta=0.5, 1$)

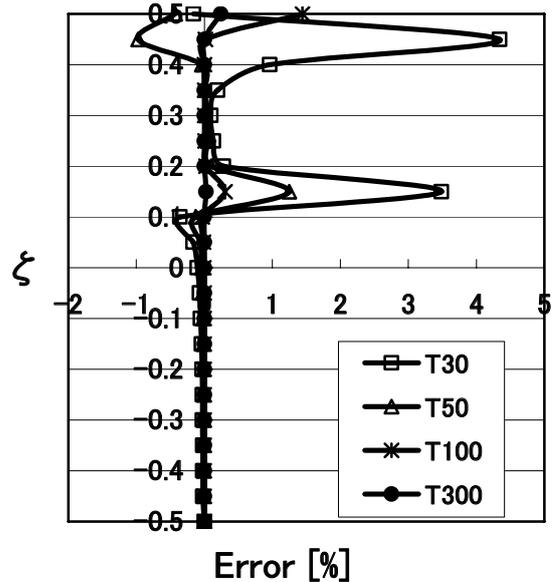


図-3 横せん断応力 τ_{xz} の誤差分布
($\theta=0.5, \hat{q}_l = 0.5\hat{p}^*$)

結果の図示は省略したが、幅厚比を $\theta=0.01$ または 0.2 とした場合、あるいは表面せん断応力の向きを逆にして、 $\hat{q}_l = -0.5\hat{p}^*$ とした場合も、誤差分布の形状が異なるだけで、ほぼ同様の結果が得られている。特に、項数の増大に伴って誤差分布がゼロに近づく傾向や、横せん断応力の誤差が面内変位の誤差を上回る傾向などは一致している。また、 $M=N=300$ とすると、面内変位・横せん断応力共に、誤差が極めて小さな値に抑えられる点も同一である。

次に、式(40)・(41)で定義される判定パラメータを用い、式(8)の級数解が項数の増大に伴って、Cauchy列になる傾向を示すかどうかを調べてみる。すなわち、式(31)のように、充分大きな項数を取れば、それ以上項数を増やしたとしても、解の数値に大きな変動が無いことを調べるわけである。結果を図-4に示す。図は、横軸に級数の項数 $M(=N)$ を、縦軸に判定パラメータ ρ (ρ_w あるいは ρ_r)をそれぞれとって示した。なお、判定パラメータ ρ_r は、項数 $M(=N)$ が奇数のときゼロとなるため、 $M(=N)$ が偶数のときのみについて計算し、結果を図示した。また、判定パラメータ ρ_w に関する結果は、 ρ_w の結果と重なってしまうため、図示を省略した。

図から明らかなように、式(8)およびその微分によって求められる変位や応力に対応する級数解は、Cauchy列になる傾向を示している。特に、たわみに関するパラメータ ρ_w は、項数 $M(=N)$ が数十項のレベルでほぼゼロになっており、変位についてはかなり早い段階で解の収束が期待できる。一方、横せん断応力のように、式(8)を微分して得られるような量については、必ずしも収束は早くなく、級数解の収束を期待するためには、 $M=N=300$ 程度の項数が必要であることが分かる。

前述の誤差分布のような、局所的な解の収束状況に加え、本論文で導入した判定パラメータの結果が示すような大

域的な収束状況を考慮し、以下の計算例では、級数の項数を $M = N = 300$ とした場合の結果を示すことにする。

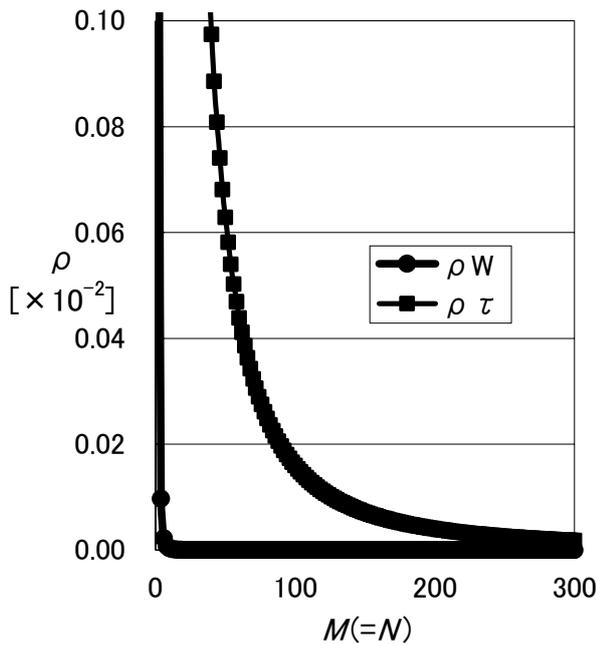


図-4 項数の増大に伴う収束判定パラメータの変化

4.2 変位および応力の板厚方向分布

この節では、 x 方向の面内変位 U および横せん断応力 τ_{xz} の板厚方向分布の解析結果について述べる。ここで、図-1における線分 AA' に沿った分布の結果について説明する。

まず、面内変位 U に関する結果を図-5および図-6に示す。図中、横軸には無次元化変位 $\alpha = U/a$ を、縦軸には無次元化座標 $\zeta = z/t$ をそれぞれとって示した。図-2および図-3と同様に、図の上下が、板の上下面にそれぞれ対応するように図示している。結果は、表面せん断応力の大きさを表すパラメータが $\tau_1 = \hat{q}_1 / \hat{p}^* = \pm 0.5$ となる2通りの場合について示したが、比較のために、表面せん断応力が作用しない $\tau_1 = 0$ の場合についても示した。図-5が幅厚比 $\theta = 0.5$ の解析結果、図-6が幅厚比 $\theta = 0.2$ の解析結果にそれぞれ対応している。

図から明らかなように、表面せん断応力の影響により、変位分布が表面せん断応力の方向にずれた形になることが分かる。また、幅厚比が大きい $\theta = 0.5$ の場合には、分布の形状が曲線的になるのに対し、中等板厚程度の $\theta = 0.2$ の解析モデルでは、ほぼ直線的な変位分布が、表面せん断応力の方向に、概ね平行移動したような分布形状を示す様子も見られる。

結果の図示は省略したが、薄板に相当する $\theta = 0.01$ の解析モデルでは、 $\tau_1 = \pm 0.5$ および $\tau_1 = 0$ の3つの結果がほとんど重なってしまい、いずれも原点を通る直線状の分布になることが明らかになった。すなわち、薄板の場合には、表面せん断応力の面内変位分布に及ぼす影響が小さいと

判断することができる。

なお、文献21)においても述べたように、表面せん断応力が作用しない場合であっても、今回のように横荷重に関する上下の対称性が崩れる場合には、板中央面 ($\zeta = 0$) における面内変位が、必ずしもゼロにならない点に注意する必要がある。この傾向は、板の幅厚比が大きくなるにつれて、より顕著になる。

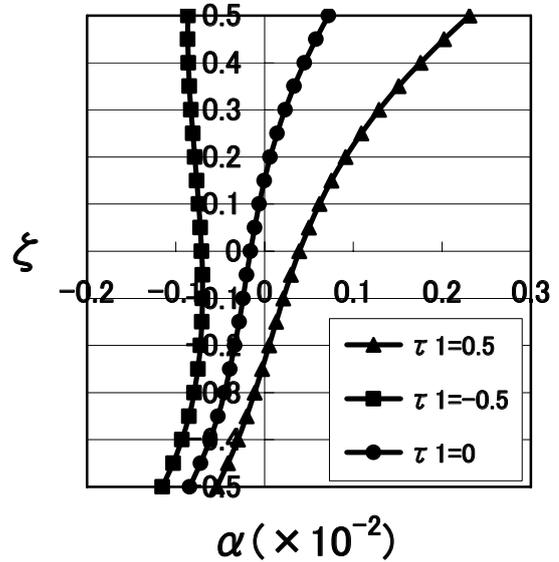


図-5 面内変位分布 ($\theta = 0.5$)

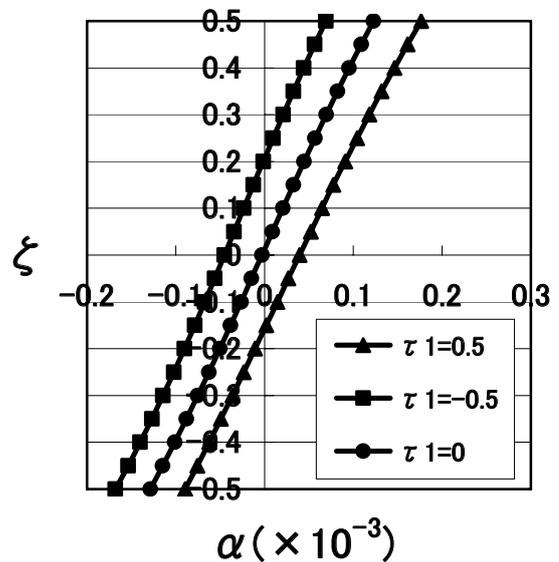


図-6 面内変位分布 ($\theta = 0.2$)

次に、横せん断応力 τ_{xz} に関する結果を図-7および図-8に示す。図中、横軸には無次元化応力 $\tau^* \equiv \{(1-2\nu)/2G\}\tau_{xz}$ を、縦軸には無次元化座標 $\zeta = z/t$ をそれぞれとって示した。これまでの図と同様に、図の上

下が、板の上下面にそれぞれ対応している。結果は、図-5および図-6と同様に、表面せん断応力の大きさが $\tau_l = \pm 0.5$ および $\tau_l = 0$ となる3通りの場合について示した。図-7が幅厚比 $\theta = 0.5$ の解析結果、図-8が幅厚比 $\theta = 0.01$ の解析結果にそれぞれ対応している。

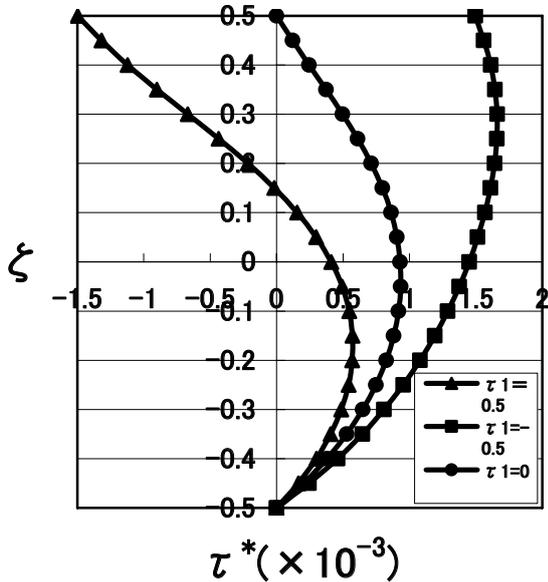


図-7 横せん断応力分布 ($\theta = 0.5$)

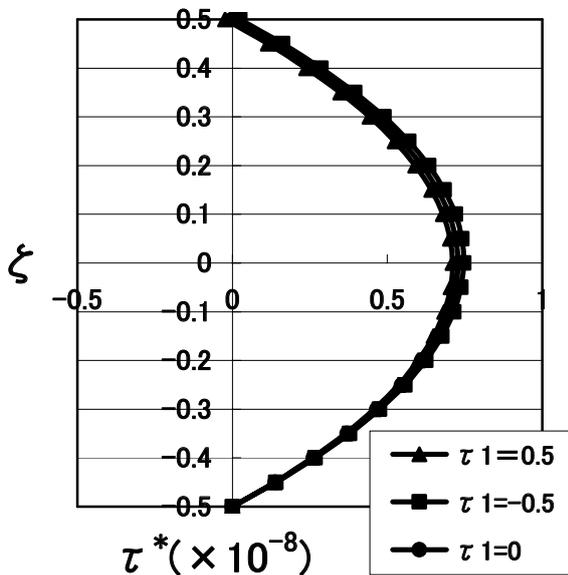


図-8 横せん断応力分布 ($\theta = 0.01$)

図-7から明らかなように、解析モデルの幅厚比が比較的大きな $\theta = 0.5$ の場合には、表面せん断応力が存在せず $\tau_l = 0$ となるときの、放物線を若干ゆがめたような分布形状を、表面せん断応力の方向にずらした形の分布が得られている。幅厚比が $\theta = 0.2$ のモデルにおいても、ほぼ同様の解析結果が得られている。

一方、幅厚比が $\theta = 0.01$ となる薄板の場合には、図-8に示したように、板状面を含む板厚方向の上半分の領域において、わずかなずれが認められるものの、表面せん断応力の有無に関わらず、ほぼ同一の放物線分布を示すことが明らかになった。すなわち、薄板の場合には、面内変位分布と同様に、表面せん断応力の横せん断応力分布に及ぼす影響も小さいと考えることができる。

4.3 面内回転

この節では、平板の幅厚比の増大に伴い、面内回転 $\phi = \partial U / \partial y - \partial V / \partial x$ がどのように変化するかについて述べる。図-9に、表面せん断応力 $\tau_l = 0.5$ および $\tau_l = -0.5$ の解析結果を示す。図示した結果は、図-1の線分AA'と板上面の交点A($x = a/4, y = b/4, z = -t/2$)における値である。図は、横軸に幅厚比 θ を、縦軸に面内回転 ϕ をそれぞれとって示した。

図を見ると、幅厚比の増大に伴って、面内回転の大きさも急激に増大する様子が分かる。ただし、幅厚比が中等厚板すなわち $\theta = 0.2$ 程度の範囲内であれば、面内回転の大きさはほぼゼロである。今回の解析モデルの場合、面内回転が顕在化するの、概ね $\theta = 0.4$ 以上の範囲である。表面せん断応力の正負に対応して、面内回転の符号も逆転しており、絶対値については同一の結果が得られている。これは、解析モデルの幾何学的境界条件が周辺単純支持であり、横荷重も全面等分布荷重であるため、面内回転にも対象性が生ずるためと考えられる。

この節で示した数値計算例によって、2.4節で述べた、面内回転と表面せん断応力との関係を数値的に示すことができた。

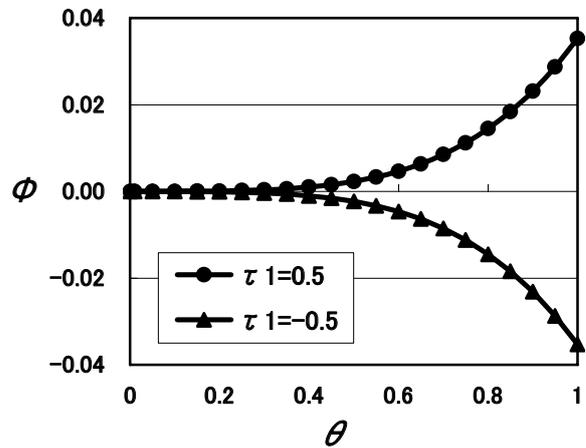


図-9 点Aにおける幅厚比と面内回転との関係

5. 結論

本論文の解析結果から、以下の結論が得られた。

- 1) 周辺単純支持された矩形平板の三次元弾性解析を実施する際に、表面せん断応力の存在を考慮した三角級数解の誘導について、一つのアプローチを提示した。

加えて、得られた級数解について、充分大きな項数を取れば、それ以上項数を増やしたとしても、解の数値に大きな変動が無く、数値的に収束する傾向が認められることを明らかにした。

- 2) 平板の面内回転と表面せん断応力との間には密接な関係があり、周辺単純支持を想定した矩形平板の場合、表面せん断応力の存在によって面内回転が発生することを理論的に示し、数値計算によって面内回転が生ずることを確認した。
- 3) 表面せん断応力の存在は、中等厚板程度以上の厚板の場合、板厚方向の面内変位分布や横せん断応力の分布に大きな影響を及ぼすが、薄板の場合にはほとんど影響を及ぼさないことが確認できた。

本論文では、理論解析とその結果を示すことに内容を限定した。しかしながら、橋梁のゴム支承など、鉛直力と同時にせん断力の作用も受けるような実際的な対象も存在し、実用的な問題への適用も今後の課題である。

参考文献

- 1) Reissner, E.: The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates, *J. Appl. Mech.*, Vol.12, pp.A69-A77, 1945.
- 2) Mindlin, R. D.: Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates, *J. Appl. Mech.*, Vol.18, pp.31-38, 1951.
- 3) Levinson, M.: An Accurate, Simple Theory of the Static and Dynamics of Elastic plates, *Mechanics Research Communications*, Vol.7, Issue 6, pp.343-350, 1980.
- 4) Reddy, J. N.: A Simple High-Order Theory for Laminated Composite Plates, *J. of Appl. Mech.*, Vol.51, pp.745-752, 1984.
- 5) Lo, K. H., Christensen, R. M., and Wu, E. M.: A High Order Theory of Plate Deformation – I. Homogeneous Plates, *J. Appl. Mech.*, Vol.44, pp.663-668, 1977.
- 6) Lo, K. H., Christensen, R. M., and Wu, E. M.: A High Order Theory of Plate Deformation – II. Laminated Plates, *J. Appl. Mech.*, Vol.44, pp.669-676, 1977.
- 7) Lo, K. H., Christensen, R. M., and Wu, E. M.: Stress Solution Determination for High Order Plate Theory, *Int. J. Solid and Struct.*, Vol.14, pp.655-662, 1978.
- 8) S. A. アムバルツミヤン (神谷紀生 訳) : 異方弾性板の理論, 森北出版, 1975.
- 9) Reissner, E.: On Transverse Bending of Plates including the Effects of Transverse Shear Deformation, *Int. J. Solid and Struct.*, Vol.11, pp.569-573, 1975.
- 10) Reissner, E.: A Note on Bending of Plates including the Effects of Transverse Shearing and Normal Strains, *J. Appl. Math. and Phys. (ZAMP)*, Vol.32, pp.764-767, 1981.
- 11) Reissner, E.: A Twelfth Order Theory of Transverse Bending of Transversely Isotropic Plates, *ZAMM*, Vol.63, pp.285-289, 1983.
- 12) Voyiadjis, G. Z., and Baluch, M. N.: Refined Theory for Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates, *J. Sound Vib.*, Vol.76, pp.57-64, 1981.
- 13) Rehfield, L. W., and Murthy, P. L. N.: Tward a New Engineering Theory of Bending: Fundamentals, *AIAA Journal*, Vol.20, No.5, pp.693-699, 1982.
- 14) Rehfield, L. W., and Valisetty, R. R.: A Simple, Refined Theory for Bending and Stretching of Homogeneous Plates, *AIAA Journal*, Vol.22, No.1, pp.90-95, 1984.
- 15) 平島健一, 村松正重: 板厚方向の成分を考慮した平板曲げの理論, *土木学会論文報告集*, Vol.304, pp.33-46, 1980.
- 16) 平島健一, 根岸嘉和: 異方性・層状性を考慮した平板の高次近似理論, 第36回土木学会年次学術講演会概要集・第1部, pp.29-30, 1981.
- 17) 平島健一, 根岸嘉和: 板厚方向の成分を考慮した代表的な2次元化平板理論の精度に関する考察, *土木学会論文報告集*, Vol.330, pp.1-14, 1983.
- 18) 平島健一, 根岸嘉和: 数種の平板理論の動特性 (自由振動と分散特性) に関する研究, *土木学会論文報告集*, Vol.333, pp.21-34, 1983.
- 19) 末武義崇, 友田富雄: 厚板解析における横荷重の影響に関する一考察, *応用力学論文集*, Vol.7, pp.47-56, 2004.
- 20) 末武義崇: 厚板の曲げ解析における横荷重評価の影響, *応用力学論文集*, Vol.8, pp.25-32, 2005.
- 21) 末武義崇: 横荷重評価の影響を考慮した厚板の変形および応力分布解析, *応用力学論文集*, Vol.10, pp.47-57, 2007.
- 22) 名木野晴暢, 多田裕治, 野中翔, 末武義崇, 水澤富作, 三上隆: 級数解法による Winkler 基礎にある長方形平板の3次元応力解析, *応用力学論文集*, Vol.12, pp.43-54, 2009.
- 23) 末武義崇: Lagrange 多項式に基づく三次元弾性問題の EFGM 解析, *応用力学論文集*, Vol.6, pp.257-266, 2003.
- 24) 土木学会: 構造力学公式集, 第2版, 1999.

(2010年3月9日 受付)