

厚肉補剛斜板の曲げ解析解の導出と斜橋解析への適用

Analytical Solution for Stiffened Skewed Thick Plates and Application for Skewed Bridge Analysis

全 邦釘*, Gongkang Fu**
Pang-jo Chun and Gongkang Fu

*学生会員 Ph.D., Postdoctoral Fellow, Yonsei University, Department of Civil and Environmental Engineering
(134 Sinchon-dong, Seodaemun-gu, Seoul, 120-749, Korea)

** 非会員 Ph.D., Professor, Wayne State University, Department of Civil and Environmental Engineering
(5050 Anthony Wayne Dr, Detroit, MI, 48202, USA.)

This paper presents analytical solutions for stiffened skewed thick plates under transverse load, which has not been reported in the literature. The stiffened skewed thick plate is modeled as an assemblage of several isolated skewed thick plates supported on beams and the method of assembling them is presented and discussed here. To include the effect of transverse shear deformation, the Mindlin theory is employed to analyze the plates. The solution technique is applied to two illustrative application examples and the results are compared with finite element method (FEM) solutions. The two approaches yielded results in good agreement. In addition, the relevant provisions in the AASHTO LRFD Specifications are also discussed here for comparison.

Key Words: stiffened plates, skewed plates, thick plates, skewed bridges, Mindlin theory
キーワード：補剛板, 斜板, 厚板, 斜橋, Mindlin 理論

1. はじめに

1.1 研究概要

本研究では厚肉補剛斜板の静的荷重に対する曲げ解析解を、梁の剛性を考慮した連続斜板解析により求めることを目的とする。補剛矩形板についてはこれまでに様々な研究が行われているが¹⁾⁵⁾、補剛斜板を取り扱っている研究は有限要素法や境界要素法などに代表される数値的手法⁶⁾⁹⁾がほとんどであり、解析的手法はKirchhoff理論に基づくものしか存在しない¹⁰⁾¹⁶⁾。Kirchhoff理論は簡明で取り扱いが容易であるが、せん断変形の影響を無視しているため板厚が辺長のおよそ1/20以上の厚肉斜板の曲げを正確に解析できない¹⁷⁾¹⁹⁾。そこで本研究では、せん断変形の影響を考慮することの出来るMindlin理論に基づく厚肉補剛斜板の解析的手法を構築した。そしてその結果を有限要素解析結果およびAASHTO LRFD Specifications (American Association of State Highway and Transportation Officials, Load and Resistance Factor Design Specifications)²⁰⁾による値と比較することで、本手法の妥当性を示した。

本研究ではまず、厚肉補剛斜板を弾性梁に支えられた

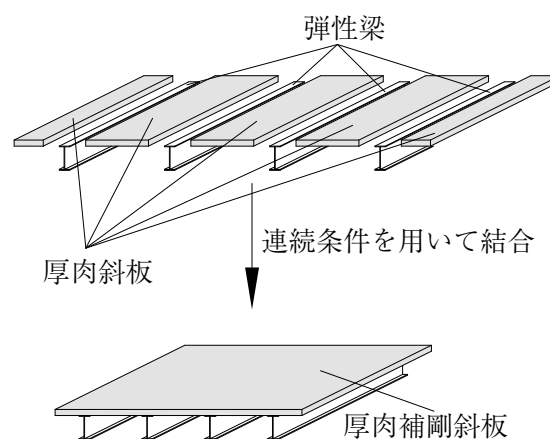


図-1 連続厚肉斜板としての厚肉補剛斜板

連続斜板として扱う。弾性梁で区切られたそれぞれの厚肉斜板について曲げ解析解を導出し、それらを梁の剛性を考慮して図-1のように連続条件により接続し、厚肉補剛斜板の解析解を導出した。また、弾性梁に限らず、単純支持やピン連結についても連続条件により表現した。従来、厚肉斜板については曲げ解析解が存在しなかつ

たが、著者らは文献(21)において斜交座標上で Mindlin 理論を用いることで、厚肉斜板の曲げに関する支配方程式及び解析解を導出することに成功した。この手法は、三角級数で表現することの出来る荷重条件（例えば集中荷重・等分布荷重・部分分布荷重など）や境界条件（例えば固定端・自由端・単純支持・強制たわみなど）ならどのようなものでも与えることが可能で、また、等方性材料だけでなく異方性材料の解析も出来る一般性の高い解法である。本研究での厚肉斜板の曲げ解析についてはこの手法を用いた。

1.2 斜橋解析への適用

厚肉補剛斜板の実構造物における例として斜橋が挙げられる。斜橋は、橋軸と支承線とが成す角（斜角）が直角でない橋梁として定義される²²⁾。斜橋は直橋と比較して鈍角部における外桁の支点反力の増加、鋭角部における支点反力の減少あるいは浮き上がり、最大曲げモーメントの減少などといった特徴があることが有限要素法による感度解析などによりわかっているが²³⁾²⁶⁾、例えば道路橋示方書²⁷⁾ではどのように斜角の影響を評価し設計するか明確に定められていない。AASHTO LRFD Specifications では斜角が梁に作用するモーメントおよびせん断力に与える影響について定めているが、それらは有限要素解析結果や計測結果と最大50%程度の大きなずれがあることが報告されている²⁶⁾²⁸⁾。本研究で提案する解析的手法は斜橋の力学的挙動及びそれを考慮した設計に対しても有用な知見を与えることが期待される。

斜橋の解析手法としては、Leonhardt や Homberg らによる格子理論を拡張し解く方法²⁹⁾、斜橋を梁と斜配置された境界に置き換えて解く方法³⁰⁾³¹⁾、斜橋を斜交異方性板に置換し、元の式を階差法によって解く Guyon-Massonet の方法¹⁰⁾¹¹⁾などの近似的解法がこれまでに研究されてきた。また、Guyon-Massonet の方法では階差法を用いて斜交異方性板を解いたのに対して、Kennedy らはたわみを級数和として表現することで解析的に解いた¹²⁾。この方法は先に挙げた解法よりも精度良く斜橋の挙動を表現できると期待されるが、支持梁と床版を一つの等価な異方性板に置き換えて解いているため、梁の存在する位置などの情報が失われているという欠点がある。

これを解決するために、Gupta らは斜橋を弾性梁に支えられた連続斜板として扱った¹³⁾。まず Kirchhoff 理論を用いてそれぞれの斜板の曲げを解析し、連続条件を用いてこれらの斜板を接続している。この手法は梁と床版を別々に考慮しているため、梁の存在する位置、梁に生じる応力等が正確に表現出来ると期待出来る。しかし、前述のように、Kirchhoff 理論は床版の厚さが桁間の距離の1/20程度以下の橋梁でないと適用出来ない。従って、床版の厚さが桁間の距離の1/10程度である、鋼桁（プレートガダ）と鉄筋コンクリート床版よりなる合成橋や、I桁やT桁を用いたPC橋のような橋梁はこの手法では解

析の際に誤差が生じる。一方、本研究で構築する手法はそれぞれの斜板の曲げ解析に Mindlin 理論を用いており、また、それに伴い連続条件についても Gupta らによるものと異なる式を用いており、それゆえ床版が厚い橋梁についても適用することが可能となった。斜橋への本手法の適用例とその有限要素解および AASHTO LRFD Specifications との比較については4章に示す。

2. 厚肉斜板の曲げに関する支配方程式と解析解

本章では、文献(21)において著者らが導出した厚肉斜板の支配方程式（2.1節）及び解析解の導出（2.2節）について簡単にまとめる。

2.1 厚肉斜板の曲げに関する支配方程式の導出

まず、図-2に示す斜交座標系を導入する。直交座標系と斜交座標系との関係は次式で表すことが出来る³²⁾。

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\cot \alpha \\ 0 & \csc \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1)$$

ただし、 α は図-2のように定義される斜角を、 \csc は余割関数を意味する。

ここで、直交座標系 (x, y) 及び斜交座標系 (X, Y) における板の剛性マトリクスを $[D_r]$ 、 $[D_o]$ とそれぞれ表すものとすると、それらの関係は次の式(2)で表される。

$$[D_o] = \begin{pmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \cot \alpha & -2 \cos \alpha \\ 0 & \csc \alpha & 0 \\ 0 & -\cot \alpha & 1 \end{pmatrix} [D_r] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ 2 \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \end{pmatrix}^{-1} \quad (2)$$

$[D_r]$ マトリクス及び $[D_o]$ マトリクスはモーメントと曲率の関係を定義する。等方性材料では、直交座標系における剛性マトリクス $[D_r]$ は次の式(3)で表される。

$$[D_r] = \frac{Et^3}{12} \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\nu^2} & \frac{\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu^2} & \frac{1}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2(1+\nu)} \end{pmatrix} \quad (3)$$

ここに、 E はヤング率、 ν はポアソン比、 t は板厚である。同様に、直交座標系及び斜交座標系における板のせん断剛性マトリクス $[A_r]$ と $[A_o]$ の関係は次の式(4)で表される。

$$[A_o] = \begin{pmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [A_r] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{pmatrix}^{-1} \quad (4)$$

等方性材料では、直交座標系における剛性マトリクス $[A_r]$ は次の式(5)で表される。

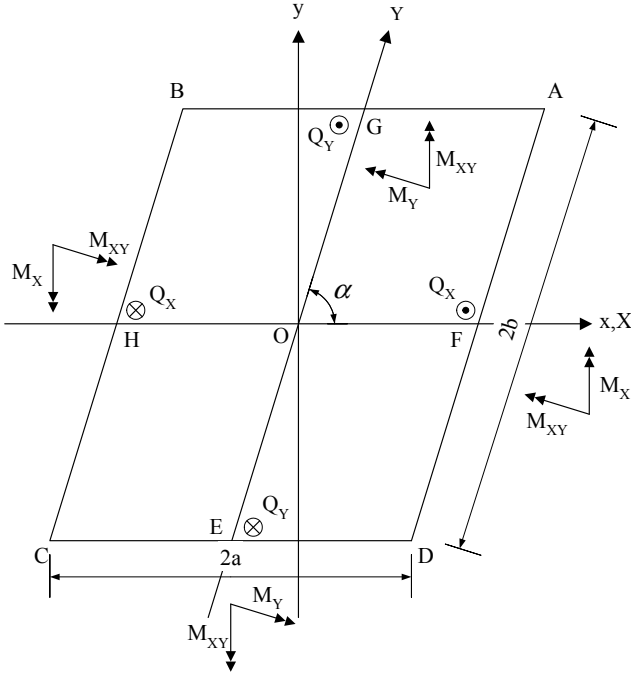


図-2 斜交座標系における斜板とその力学的諸量

$$[A_r] = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} \quad (5)$$

以下, $[D_o]$ 及び $[A_o]$ を次の式(6)のように成分表示する.

$$[D_o] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix}, [A_o] = \begin{bmatrix} A_{55} & A_{45} \\ A_{45} & A_{44} \end{bmatrix} \quad (6)$$

ここで, たわみが式(7)のようにポテンシャル関数 ψ の最大四階の偏微分, 回転角が式(8),(9)のようにポテンシャル関数 ψ の最大三階の偏微分で表すことが出来るとする.

$$\begin{aligned} w = & (D_{13}^2 - D_{11}D_{33}) \frac{\partial^4 \psi}{\partial X^4} + 2(D_{12}D_{13} - D_{11}D_{23}) \frac{\partial^4 \psi}{\partial X^3 \partial Y} + \\ & (D_{12}^2 - D_{11}D_{22} - 2D_{13}D_{23} + 2D_{12}D_{33}) \frac{\partial^4 \psi}{\partial X^2 \partial Y^2} + \\ & 2(-D_{13}D_{22} + D_{12}D_{23}) \frac{\partial^4 \psi}{\partial X \partial Y^3} + (D_{23}^2 - D_{22}D_{33}) \frac{\partial^4 \psi}{\partial Y^4} + \\ & \{A_{44}D_{11} - 2A_{45}D_{13} + A_{55}D_{33}\} K_s \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \\ & 2\{A_{44}D_{13} + A_{55}D_{23} - A_{45}(D_{12} + D_{33})\} K_s \frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Y} + \\ & \{A_{55}D_{22} - 2A_{45}D_{23} + A_{44}D_{33}\} K_s \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + (A_{45}^2 - A_{44}A_{55}) K_s^2 \psi \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \phi_x = & (A_{45}D_{13} - A_{55}D_{33}) K_s \frac{\partial^3 \psi}{\partial X^3} + \\ & \{A_{44}D_{13} - 2A_{55}D_{23} + A_{45}D_{12}\} K_s \frac{\partial^3 \psi}{\partial X^2 \partial Y} + \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \{-A_{55}D_{22} - A_{45}D_{23} + A_{44}(D_{12} + D_{33})\} K_s \frac{\partial^3 \psi}{\partial X \partial Y^2} + \\ & (-A_{45}D_{22} + A_{44}D_{23}) K_s \frac{\partial^3 \psi}{\partial Y^3} + (-A_{45}^2 + A_{44}A_{55}) K_s^2 \frac{\partial \psi}{\partial X} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_y = & (-A_{45}D_{11} + A_{55}D_{13}) K_s \frac{\partial^3 \psi}{\partial X^3} + \\ & \{-A_{44}D_{11} - A_{45}D_{13} + A_{55}(D_{12} + D_{33})\} K_s \frac{\partial^3 \psi}{\partial X^2 \partial Y} + \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \{-2A_{44}D_{13} + A_{55}D_{23} + A_{45}D_{12}\} K_s \frac{\partial^3 \psi}{\partial X \partial Y^2} + \\ & (A_{45}D_{23} - A_{44}D_{33}) K_s \frac{\partial^3 \psi}{\partial Y^3} + (-A_{45}^2 + A_{44}A_{55}) K_s^2 \frac{\partial \psi}{\partial Y} \end{aligned}$$

これらを釣り合い式に導入することで, Mindlin 理論に基づく厚肉斜板の曲げに関する支配方程式を式(10)のようにポテンシャル関数 ψ の六階の偏微分方程式で表すことが出来る.

$$\begin{aligned} & A_{55}(D_{13}^2 - D_{11}D_{33}) \frac{\partial^6 \psi}{\partial X^6} + \\ & 2\{A_{55}(D_{12}D_{13} - D_{11}D_{23}) + A_{45}(D_{13}^2 - D_{11}D_{33})\} \frac{\partial^6 \psi}{\partial X^5 \partial Y} + \\ & \{A_{44}(D_{13}^2 - D_{11}D_{33}) + 4A_{45}(D_{12}D_{13} - D_{11}D_{23}) + \\ & A_{55}(D_{12}^2 - D_{11}D_{22} - 2D_{13}D_{23} + 2D_{12}D_{33})\} \frac{\partial^6 \psi}{\partial X^4 \partial Y^2} + \\ & \{2A_{44}(D_{12}D_{13} - D_{11}D_{23}) + 2A_{55}(-D_{13}D_{22} + D_{12}D_{23}) + \\ & 2A_{45}(D_{12}^2 - 2D_{13}D_{23} + 2D_{12}D_{33} - D_{11}D_{22})\} \frac{\partial^6 \psi}{\partial X^3 \partial Y^3} + \\ & \{A_{44}(D_{12}^2 - D_{11}D_{22} - 2D_{13}D_{23} + 2D_{12}D_{33}) + \\ & A_{55}(D_{23}^2 - D_{22}D_{33}) + 4A_{45}(D_{12}D_{23} - D_{13}D_{22})\} \frac{\partial^6 \psi}{\partial X^2 \partial Y^4} + \\ & 2\{A_{45}(D_{23}^2 - D_{22}D_{33}) + A_{44}(D_{12}D_{23} - D_{13}D_{22})\} \frac{\partial^6 \psi}{\partial X \partial Y^5} + \\ & A_{44}(D_{23}^2 - D_{22}D_{33}) \frac{\partial^6 \psi}{\partial Y^6} + D_{11}(A_{44}A_{55} - A_{45}^2) K_s \frac{\partial^4 \psi}{\partial X^4} + \\ & 4D_{13}(A_{44}A_{55} - A_{45}^2) K_s \frac{\partial^4 \psi}{\partial X^3 \partial Y} + \\ & 2(D_{12} + 2D_{33})(A_{44}A_{55} - A_{45}^2) K_s \frac{\partial^4 \psi}{\partial X^2 \partial Y^2} + \\ & 4D_{23}(A_{44}A_{55} - A_{45}^2) K_s \frac{\partial^4 \psi}{\partial X \partial Y^3} + D_{22}(A_{44}A_{55} - A_{45}^2) K_s \frac{\partial^4 \psi}{\partial Y^4} \\ & = -\frac{Q}{K_s} \end{aligned} \quad (10)$$

式(8)において, Q は外力を意味する. また, K_s はせん断補正係数であり, 本研究では $5/6$ を用いる. この支配方程式を解くことで厚肉斜板の曲げ解析解が求まる.

2.2 解析解の導出

本節では、式(10)の解析解を余関数と特殊解の和として求める。余関数 ψ_h は、式(10)の斉次形を満たす解として次のように三角級数と多項式の和として表現出来る。

$$\psi_h = \psi_{hp} + \psi_{ht} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \psi_{ht} = & \sum_{k=1}^m (A_k C_{1X1} + iB_k C_{1X2} + C_k C_{2X1} + iD_k C_{2X2} + \\ & E_k C_{3X1} + iF_k C_{3X2} + G_k S_{1X1} + iH_k S_{1X2} + I_k S_{2X1} + \\ & iJ_k S_{2X2} + K_k S_{3X1} + iL_k S_{3X2} + M_k C_{1Y1} + iN_k C_{1Y2} + \\ & O_k C_{2Y1} + iP_k C_{2Y2} + Q_k C_{3Y1} + iR_k C_{3Y2} + S_k S_{1Y1} + \\ & iT_k S_{1Y2} + U_k S_{2Y1} + iV_k S_{2Y2} + W_k S_{3Y1} + iX_k S_{3Y2}) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \psi_{hp} = & Z_1 + Z_2 X + Z_3 Y + Z_4 X^2 + Z_5 Y^2 + Z_6 XY + \\ & Z_7 X^3 + Z_8 X^2 Y + Z_9 XY^2 + Z_{10} Y^3 + \\ & Z_{11} (D_{22} (-A_{45}^2 + A_{44} A_{55}) X^4 - D_{11} (-A_{45}^2 + A_{44} A_{55}) Y^4) + \\ & Z_{12} (D_{23} (-A_{45}^2 + A_{44} A_{55}) X^3 Y - D_{13} (-A_{45}^2 + A_{44} A_{55}) XY^3) \end{aligned} \quad (13)$$

ただし、 C_{ixj} , C_{iyj} , S_{ixj} , S_{iyj} は以下の式(14)で表される。

$$\begin{aligned} C_{ixj} &= \cos \frac{\pi m(X + \lambda_{iy} Y)}{2a} + (-1)^{j+1} \cos \frac{\pi m(X + \overline{\lambda_{iy}} Y)}{2a} \\ S_{ixj} &= \sin \frac{\pi m(X + \lambda_{iy} Y)}{2a} + (-1)^{j+1} \sin \frac{\pi m(X + \overline{\lambda_{iy}} Y)}{2a} \\ C_{iyj} &= \cos \frac{\pi m(\lambda_{ix} X + Y)}{2b} + (-1)^{j+1} \cos \frac{\pi m(\overline{\lambda_{ix}} X + Y)}{2b} \\ S_{iyj} &= \sin \frac{\pi m(\lambda_{ix} X + Y)}{2b} + (-1)^{j+1} \sin \frac{\pi m(\overline{\lambda_{ix}} X + Y)}{2b} \end{aligned} \quad (14)$$

式中 m は級数の項数、上付きの横棒は共役複素数を意味する。また、荷重 Q は一般に式(15)のように表現が出来る。これを式(10)に代入することで特殊解として次の式(16)が得られる。 K_{jk} , L_{jk} は恒等式より一意に定められる。 $Q(X, Y) =$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1,2,\dots} \sum_{k=1,2,\dots} \int_{-a}^a \int_{-b}^b Q(\xi, \eta) \sin \frac{j\pi(\xi+a)}{2a} \sin \frac{k\pi(\eta+b)}{2b} d\xi d\eta \quad (15) \\ & \frac{\sin \alpha}{ab} \sin \frac{j\pi(X+a)}{2a} \sin \frac{k\pi(Y+b)}{2b} \\ & \psi_p = \sum_{j=1,2,\dots} \sum_{k=1,2,\dots} K_{jk} \cos \frac{j\pi(X+a)}{2a} \cos \frac{k\pi(Y+b)}{2b} + \\ & L_{jk} \sin \frac{j\pi(X+a)}{2a} \sin \frac{k\pi(Y+b)}{2b} \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、 l は特殊解の級数の項数である。支配方程式(10)の一般解は式(11)の余関数、式(16)の特殊解の和として求められる。一般解に含まれる未定係数の数は、多項式 ψ_{hp} には12個の未知数 $Z_1 \sim Z_{12}$ が、三角級数 ψ_{ht} には $24m$ 個の未知数 $A_m \sim X_m$ が存在するので $24m+12$ である。本研究では、それぞれの斜板について別々に解析するので、斜板の数を p とすると厚肉補剛斜板の持つ未定係数の数は $p(24m+12)$ となる。これらの未定係数は第三章において連続条件及び境界条件より決定される。



図-3 実橋梁におけるピン連結の例

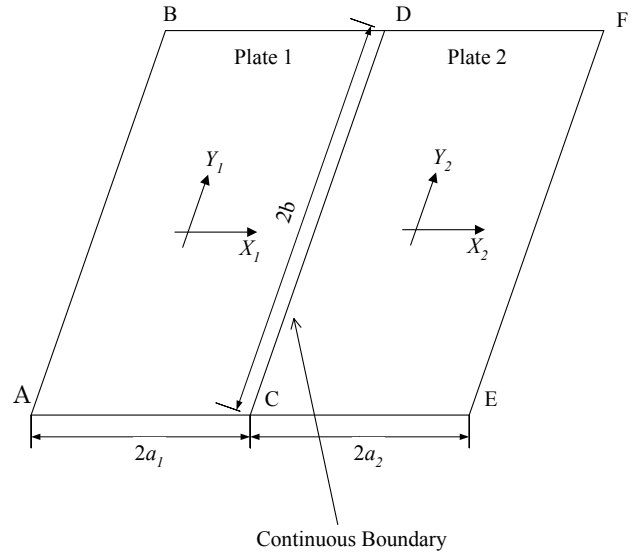


図-4 二つの斜板を結合する連続条件

3. 連続条件及び境界条件による未定係数の決定

本章では、支配方程式(10)が満たすべき境界条件及び連続条件について述べる。本研究では、境界条件式及び連続条件式を Fourier 級数展開することでそれらを正確に扱う。

3.1 連続条件

ここでは、斜板の結合部で満たされるべき連続条件について述べる。斜板を結合するものとして弾性梁、単純支持、ピン連結などが考えられ、それぞれについての連続条件式を本節で示す。なお、ピン連結とはプレートガーダを図-3のように繋げる機構であり、せん断力は伝達するがモーメントは伝達しないという性質を持つ。これらの連続条件を考えるために、簡単な例として、図-4に示すような二つの厚肉斜板 (Plate1, Plate2) とその間に存在する一つの結合部より成り立つ厚肉補剛斜板を考える。今、Plate1 及び Plate2 の辺長を図-4に示すように $(2a_1, 2b)$, $(2a_2, 2b)$ と与える。Kirchhoff 平板と異なり、ねじりとせん断力を独立に与えることができ

る Mindlin 平板での辺 CD における連続条件は、次の式 (17)から(19)のように6つの式で表される。

弾性梁の場合：

$$\begin{aligned} Q_{X1}|_{X_1=a_1} - Q_{X2}|_{X_2=-a_2} - E_b I_b \frac{d^4 w_1}{dY^4} &= 0 \\ (M_{X1}|_{X_1=a_1} - M_{X2}|_{X_2=-a_2}) \sin \alpha + E_b I_\omega \frac{d^4 \phi_{X1}}{dY^4} - G_b J_b \frac{d^2 \phi_{X1}}{dY^2} &= 0 \\ \frac{d \left((M_{XY1} - M_{X1} \cos \alpha)|_{X_1=a_1} - (M_{XY2} - M_{X2} \cos \alpha)|_{X_2=-a_2} \right)}{dY} - E_b I_b \frac{d^4 w_1}{dY^4} &= 0 \\ w_1|_{X_1=a_1} - w_2|_{X_2=-a_2} &= 0 \\ \phi_{X1}|_{X_1=a_1} - \phi_{X2}|_{X_2=-a_2} &= 0 \\ \phi_{Y1}|_{X_1=a_1} - \phi_{Y2}|_{X_2=-a_2} &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

単純支持の場合：

$$\begin{aligned} w_1|_{X_1=a_1} &= 0 \\ w_2|_{X_2=-a_2} &= 0 \\ \phi_{X1}|_{X_1=a_1} - \phi_{X2}|_{X_2=-a_2} &= 0 \\ \phi_{Y1}|_{X_1=a_1} - \phi_{Y2}|_{X_2=-a_2} &= 0 \\ M_{X1}|_{X_1=a_1} - M_{X2}|_{X_2=-a_2} &= 0 \\ M_{XY1}|_{X_1=a_1} - M_{XY2}|_{X_2=-a_2} &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

ピン連結の場合：

$$\begin{aligned} w_1|_{X_1=a_1} - w_2|_{X_2=-a_2} &= 0 \\ \phi_{Y1}|_{X_1=a_1} - \phi_{Y2}|_{X_2=-a_2} &= 0 \\ M_{X1}|_{X_1=a_1} &= 0 \\ M_{X2}|_{X_2=-a_2} &= 0 \\ M_{XY1}|_{X_1=a_1} - M_{XY2}|_{X_2=-a_2} &= 0 \\ Q_{X1}|_{X_1=a_1} - Q_{X2}|_{X_2=-a_2} &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

ただし、下付き文字の 1,2 はそれぞれ Plate1, Plate2 の量であることを示している。(a₁, a₂)は Plate1 及び Plate2 の右端の X 座標、(-a₁, -a₂)は左端の X 座標である。φは回転角、M_X, M_{XY}は曲げ及びねじりモーメント、Q_Xは面外せん断力である。E_b, G_b, I_b, J_b, 及び I_ωは弾性梁の縦弾性係数、横弾性係数、断面二次モーメント、ねじり係数、そりねじり定数である。ただし梁の曲げ中心が板の中心と一致していない偏心梁の場合、梁の曲げに際して面内応力の影響を考える必要があり、そのために断面二次モーメント I_bを次の式で表す。

$$I_b = I_{b0} + A_b d^2 \quad (20)$$

I_{b0}は梁の図心まわりの断面二次モーメント、A_bは梁の断面積、dは梁の曲げ中心と板の中心の距離である。

3.2 境界条件

ここでは厚肉補剛斜板の境界条件について述べる (図

4における辺 AB, BD, DF, FE, EC, CA)。Mindlin 理論が適用される平板では、境界に沿った座標軸を s 軸、法線方向の座標軸を n 軸とする局所座標系において、以下に示す四通りの境界条件が考えられる。

(1) 固定支持 (C)

$$w - \bar{w} = 0, \phi_n - \bar{\phi}_n = 0, \phi_s - \bar{\phi}_s = 0 \quad (21)$$

(2) 単純支持

①Soft simply supported (SS1)

$$w - \bar{w} = 0, M_n - \bar{M}_n = 0, \phi_s - \bar{\phi}_s = 0 \quad (22)$$

②Hard simply supported (SS2)

$$w - \bar{w} = 0, M_n - \bar{M}_n = 0, M_{sn} - \bar{M}_{sn} = 0 \quad (23)$$

(3) 自由 (F)

$$M_n - \bar{M}_n = 0, M_{sn} - \bar{M}_{sn} = 0, Q_n - \bar{Q}_n = 0 \quad (24)$$

上に示す式(22),(23)のように単純支持の表現法には2種類ある。なお、上記の境界条件式において、たわみ及び回転角に付随する上付きの横棒は境界での強制たわみ量を、モーメント及びせん断力に付随する上付きの横棒は境界で板側面に働く外力を意味している。

3.3 解析解の導出

ここでは、連続条件及び境界条件より導かれる一次方程式の数と未定係数の数を等しくすることで解析解を求める。式(17)~(19)は6つずつの、式(21)~(24)は3つずつの式を持つ。それぞれの左辺を f(X, Y)とし、それらについて X 軸に平行な辺については式(25)に示すように、Y 軸に平行な辺については式(26)に示すようにフーリエ級数展開する。

$$f(X, Y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(a_r \cos \left(\frac{r\pi X}{l_x} \right) + b_r \sin \left(\frac{r\pi X}{l_x} \right) \right) \quad (25)$$

$$f(X, Y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(a_r \cos \left(\frac{r\pi Y}{l_y} \right) + b_r \sin \left(\frac{r\pi Y}{l_y} \right) \right) \quad (26)$$

a₀, a_r, b_rはフーリエ級数である。また、l_x及びl_yは着目している斜板の半辺長であり、例えば図4のPlate1だと、l_x=a₁, l_y=bである。式(17)~(19), (21)~(24)の右辺は全て0であることを考えると、式(25),(26)に関しても0となる必要がある。全てのX, Yについて0となるためには、cosとsinの直交性より、以下の式(27)を満たす必要がある。

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_r = 0 \\ b_r = 0 \end{cases} \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (27)$$

ただし n は式(25)及び(26)の打ち切り項数である。式(27)は 2n+1 元の線形連立方程式となっている。連続条件式(17)~(19)には6つの、境界条件式(21)~(24)には3つの式

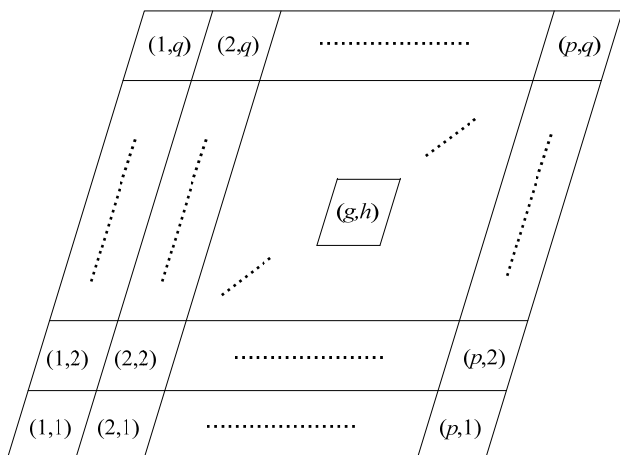


図-5 $p \times q$ 個の斜板組み合わせ (斜板上の括弧 (g,h) は左から g 番目, 下から h 番目の斜板を意味する.)

が存在するので, 連続条件に関しては一辺につき $6 \times (2n+1) = 12n+6$ 元の, 境界条件に関しては一辺につき $3 \times (2n+1) = 6n+3$ 元の一次方程式が導出される.

図-4 に示した斜板二つより成る厚肉補剛斜板の例では, 6 辺 (AB, BD, DF, FE, EC, CA) と一つの連続条件 (CD) を持つので, $(6n+3) \times 6 + (12n+6) = 48n+24$ 元の一次方程式が導出される. また, 先に述べたように, 斜板一つにつきその解は $24m+12$ 個の未定係数を持つので, 今扱っている斜板二つより成り立つ例では $48m+24$ 個の未定係数を持つ. m を n と等しくなるように定めれば, 連立一次方程式の数と未定係数の数が等しくなり, 解析解が求まる.

これは, 斜板二つよりなる厚肉補剛斜板の例だけでなく, 図-5 に示す一般的な形に拡張出来る. 斜板の数を図-5 に示すように $p \times q$ とすると, 辺の数は $2p+2q$, 連続条件の数は $(p-1)q + (q-1)p$ となる. つまり, 連立方程式は $(6n+3)(2p+2q) + (12n+6)\{(p-1)q + (q-1)p\} = (24n+12)pq$ 元となる. 未定係数の数は $(24m+12)pq$ なので, この場合でも m と n を等しくすれば連立一次方程式の数と未定係数の数が等しくなり, それゆえ解析解が求まる.

4. 解析結果および妥当性の検証

本論文で示した手法の妥当性を検証するために, 以下に示す二つの例題について本研究の解析手法による結果と, 有限要素解析による結果とを比較する. 4.2 節の斜橋の解析については, 有限要素解に加え AASHTO LRFD Specifications も比較対象とした. また同時に, それぞれの例題において級数項の収束性についても検討した.

4.1 一本の梁を持つ厚肉補剛斜板の解析

ここでは, 一本の梁を持つ, 弾性率 E , ポアソン比 $\nu = 0.2$, $\alpha = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$, $a = 4b$, $t = b/4.5$, $t_h = 4t$, $t_b = 2t$ の厚肉

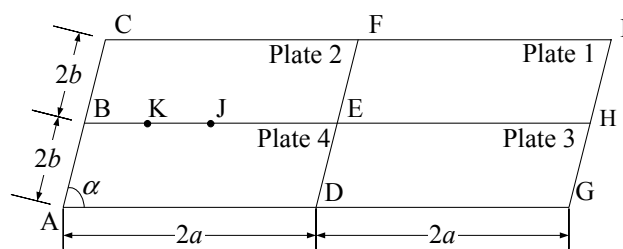


図-6 4つの斜板より成る厚肉補剛斜板

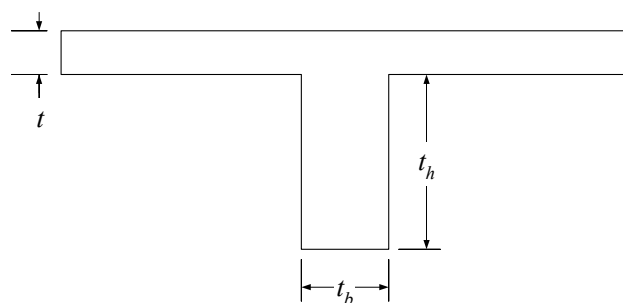


図-7 図-6 に示す斜板の側面図

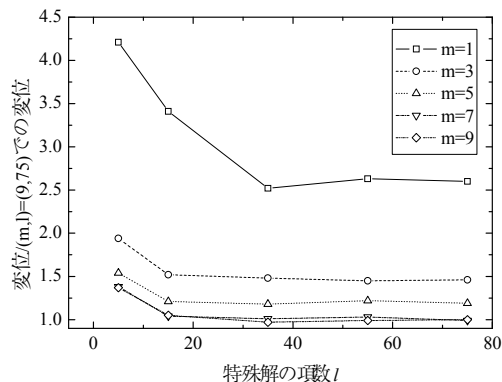


図-8 等分布荷重を受ける厚肉補剛斜板の解析解における収束性の検討

補剛斜板を解析する (図-6, 図-7). 境界条件は AC および GI を固定支持(C)とし, AG および CI については自由(F), BH を弾性梁とする. また, 板中央 DF に沿って単純支持されているとする. そして, 等分布荷重 q_0 を全ての厚肉斜板に与えた.

(1) 収束性の検討

余関数及び特殊解の級数の項数 m, l による解の収束性についてここでは検討する. 指標として $\alpha = 30^\circ$ の Plate1 中央でのたわみを用いた. 結果を図-8 に示す. なお, フーリエ級数展開の打ち切り項数 n に関しては m と同じものを用いた.

横軸は級数 l , 縦軸はたわみを $(m,l) = (9,75)$ のそれと除した値である. $(m,l) = (9,75)$ で誤差 1% 以内に収束していることが確認出来たのでこの値を用いる. また, 板中央でのたわみだけではなく, 他の位置におけるたわみやその他の力学的量に関しても同程度収束している. さらに,

表-1 点Jにおけるたわみ, 曲げモーメント, および点Kにおけるせん断力 (括弧内の数字は誤差率)

たわみ		
斜角	有限要素解	解析解
90°	2.41 (2.09%)	2.46
60°	2.02 (4.15%)	2.11
30°	1.01 (3.88%)	1.05
曲げモーメント		
斜角	有限要素解	解析解
90°	4.69 (1.26%)	4.75
60°	3.97 (2.70%)	4.08
30°	2.15 (2.71%)	2.21
せん断力		
斜角	有限要素解	解析解
90°	4.38 (1.99%)	4.47
60°	3.71 (5.04%)	3.90
30°	2.06 (3.05%)	2.12

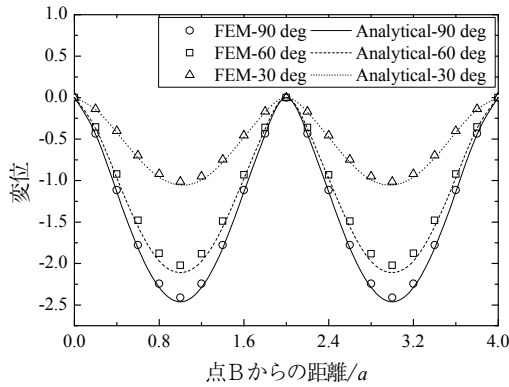


図-9 等分布荷重を受ける厚肉補剛斜板のたわみに関する有限要素法による結果との比較

$\alpha = 60^\circ, 90^\circ$ の場合においても同様の収束性が確認されており, それについても $(m, l) = (9, 75)$ を用いる。

(2) 有限要素解析結果との比較

上の表-1は支持梁 BE の中点 J におけるたわみ, 曲げモーメント, および BJ の中点 K におけるせん断力の, 本研究における解析結果および ANSYS による有限要素解析結果を比較したものである。これらの点は, それぞれの値が大きくなるように選ばれている。なお, たわみは $q_0 a^4 / 1000 D$, 曲げモーメントは $q_0 a^3 / 100$, せん断力は $q_0 a^2 / 10$ で除することで無次元化した値で表した。D は板の曲げ剛性で $D = Et^3 / 12(1 - \nu^2)$ としてあらわされる。ANSYS による解析では板および梁をそれぞれ二次元四節点四角形要素 (SHELL181), 二節点線形梁要素 (BEAM188) を用いてモデル化した。節点数は 5509, SHELL181 および BEAM188 の要素数はそれぞれ 5184 および 144 である。なお, 梁要素は偏心を考慮しモデル化

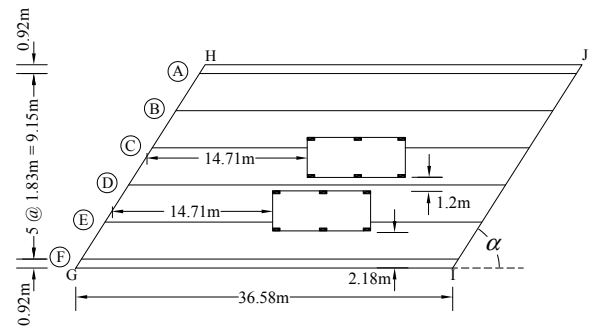


図-10 支間長 36.58m, 桁幅 1.83m, 斜角 α の斜橋

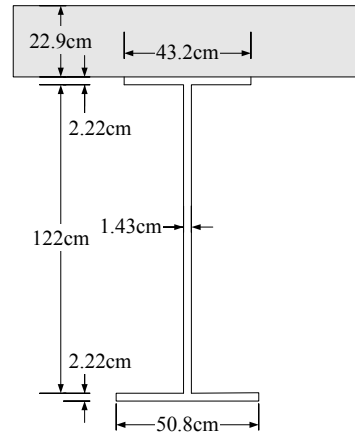


図-11 図-10 に示す斜橋の断面図

されている。文献(33)によれば, 補剛板をこのようにモデル化することにより精度よく結果が求められることが知られており, さらに, 文献(34)では実際に三次元有限要素モデルと比較され良好な一致が得られている。

また, 図-9 は梁 BH のたわみの本研究における結果及び ANSYS による有限要素解析結果を比較したものである。本研究の手法は有限要素法による解と良い一致を見せている。この例題から, 本研究の手法により様々な斜角を持つ厚肉補剛斜板の曲げを良好に解析出来ることが確かめられた。

4.2 斜橋の解析

著者らは, 文献(35)において斜橋の斜角, 支間長, 桁間距離が力学的挙動におよぼす影響について商用パッケージ GTSTRUDL を用いて三次元有限要素解析を行った。ここでは, そのうちの一例について本研究の手法を用いて解析を行い, 有限要素解析結果および AASHTO LRFD Specifications による値と比較する。GTSTRUDL による解析では斜橋を三次元八節点六面体要素 (IPLS) を用いてモデル化した。節点数は 70969, 要素数は 44331 である。

橋梁の寸法を図-10 および図-11 に示す。コンクリート床版および鋼桁の材料特性は以下の表-2 のように仮定した。斜角としては $\alpha = 40^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ を用いた。そして, 図-5 に示すように HS-20 仕様²⁰⁾ のトラック 2 台を載荷し, もっとも影響を受ける鋼桁 C 中央での曲げモーメン

表-2 コンクリート床版および鋼桁の材料定数

	弾性率 (GPa)	ポアソン比
コンクリート床版	24.8	0.17
鋼桁	200	0.3

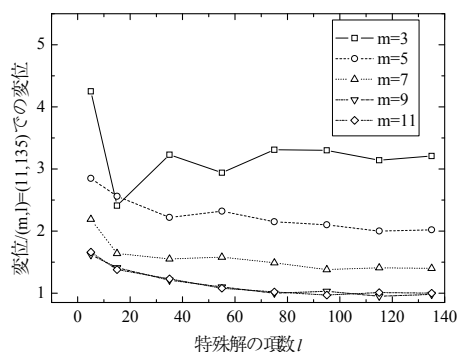


図-12 斜橋の解析解における収束性の検討

トを比較した。境界条件については、辺 GH および IJ を単純支持(SS2), 辺 GI および HJ を自由(F)とした。

(1)収束性の検討

余関数及び特殊解の級数の項数 m, l による解の収束性について先ほどの例と同じく検討する。指標として $\alpha = 40^\circ$ の斜橋の鋼桁 C と鋼桁 D の間のスラブ中央でのたわみを用いた。結果を図-12 に示す。フーリエ級数展開の打ち切り項数 n は m と等しくした。

横軸は級数 l , 縦軸はたわみを $(m, l) = (11, 135)$ のそれで除した値である。 $(m, l) = (11, 135)$ で誤差 1% 以内に収束していることが確認出来たのでこの値を用いる。なお, $\alpha = 60^\circ, 90^\circ$ の場合においても同様の収束性が確認されており, それらについても $(m, l) = (11, 135)$ を用いる。前の例題と比較して収束に必要な項数が多くなっているが, これは斜板の数がこちらのほうが多いこと, 等分布荷重ではないことなどがその要因として挙げられる。

(2)AASHTO LRFD Specifications による結果

米国の橋梁設計仕様である AASHTO LRFD Specifications では, 斜橋の鋼桁に作用する最大曲げモーメント M_{LL} を以下の式(28)で定めている。

$$M_{LL} = M_{beam} \times DF_m \times C_{skew} \quad (28)$$

M_{beam} は古典的な梁理論により得られるモーメントである。 DF_m は荷重分配係数, C_{skew} は斜角の影響を与える係数であり, 以下の式(29),(30)により与えられる。

$$DF_m = 0.075 + \left(\frac{S}{2900}\right)^{0.6} \left(\frac{S}{L}\right)^{0.2} \left(\frac{K_g}{L t_s^3}\right)^{0.1} \quad (29)$$

$$C_{skew} = 1 - 0.25 \left(\frac{K_g}{L t_s^3}\right)^{0.25} \left(\frac{S}{L}\right)^{0.5} \left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)^{1.5} \quad (30)$$

表-3 斜橋の鋼梁 D に作用する最大曲げモーメント (括弧内の数字は誤差率)

斜角	AASHTO	有限要素解	解析解
90°	0.0514 (16.4%)	0.0457 (5.83%)	0.0430
60°	0.0504 (15.8%)	0.0450 (5.69%)	0.0424
40°	0.0482 (14.7%)	0.0404 (-1.65%)	0.0411

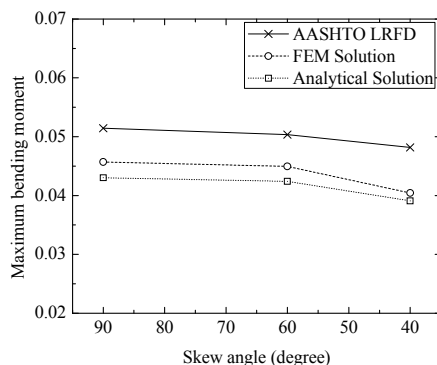


図-13 斜橋の鋼梁Dに作用する最大曲げモーメント

S は桁間距離(mm), L は支間長(mm), K_g は longitudinal stiffness parameter(mm^4), t_s は床版厚さ(mm), α は斜角である。この式により, トラック荷重により鋼梁に作用する最大曲げモーメントが求まり, 橋梁の設計に供される。

(3) 有限要素解析結果および仕様との比較

上の表-3 および図-13 は鋼桁 D に作用する最大曲げモーメントを比較したものである。なお, これらの値はトラックの総重量と支間長で除して無次元化してある。本研究による解析結果と有限要素解はおおむねよい一致を見せている一方, AASHTO LRFD Specifications と比較して一定のずれが確認される。これは式を導出する際に用いた格子モデルが橋梁をよくモデル化できていないこと, さらに, 安全側に寄った設計となるように仕様が定められていることがその原因として考えられる³⁶⁾。

また, 斜角が小さくなるほど最大曲げモーメントが小さくなることが知られている。斜角が小さくなるにつれ鈍角間の距離が小さくなること, 主応力方向が橋軸方向とずれていくことがその原因である。本研究による解析結果もその傾向をよく表現できていることが表-3 および図-13 より確認できる。

5. まとめ

本研究ではこれまでに有限要素法に代表される数値的手法のみしか存在しなかった厚肉補剛斜板の曲げについて, 解析的に解く手法を提案した。まず, 厚肉補剛斜板を補剛梁などにより分割し, それぞれの厚肉斜板の解を Mindlin 理論に従って余関数と特殊解の和として導

出した。そして、梁の剛性を考慮した連続条件によりこれらの厚肉斜板を結合することで、厚肉補剛斜板の曲げ解析解の導出に成功した。

なお本論文では、厚肉補剛斜板の例である斜橋解析において主に重要となる、補剛梁のたわみ、曲げモーメント、せん断力についてのみ結果を示したが、厚肉斜板のたわみや曲げモーメントなどについても式(11)に示すポテンシャル関数 ψ の偏微分として表現することができる。

本研究により提案された手法は、厚肉補剛斜板の静的な曲げにとどまらず、様々な応用が考えられる。例えば、振動解析が挙げられる。式(10)に時間項を導入し、運動方程式を導出することで自由振動解や強制振動解が求まると考えられ、今後、研究を行い明らかにしていく予定である。

謝辞

本研究の一部である、斜橋の有限要素解析は Federal Highway Administration および Michigan Department of Transportation の助成を受けて行われました。ここに記して謝意を表します。

参考文献

- 1) Heins, C. P. and Looney, C. T. G.: Bridge analysis using orthotropic plate theory, Journal of the Structural Division, Proceedings of the ASCE, ST2, pp.565-592, 1968.
- 2) 内山武司, 福沢和文, 土橋由造: 周辺固定目型リブ付平板の解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.147-148, 1986.
- 3) Ugural, A. C.: Stresses in plates and shells (2nd edition), McGraw-Hill, 1998.
- 4) Jawad, M. H.: Design of plate & shell structures, ASME Press, 2004.
- 5) Fernandes, G. R. and Venturini, W. S.: Building floor analysis by the boundary element method, Computational Mechanics, Vol.35, pp.277-291, 2005.
- 6) Chattopadhyay, B., Sinha, P. K. and Mukhopadhyay, M.: Finite element analysis of blade-stiffened composite plates under transverse loads, Journal of Reinforced Plastics and Composites, Vol.12(1), pp.76-100, 1993.
- 7) Kumar, Y. V. S. and Mukhopadhyay, M.: Finite element analysis of ship structures using a new stiffened plate element, Applied Ocean Research, Vol.22(6), pp.361-374, 2000.
- 8) Chung, W. and Sotelino, E. D.: Three-dimensional finite element modeling of composite girder bridges, Engineering Structures, Vol.28(1), pp.63-71, 2006.
- 9) Fernandes, G. R. and Konda, D. H.: A BEM formulation based on Reissner's theory to perform simple bending analysis of plates reinforced by rectangular beams, Computational Mechanics, Vol.42, pp.671-683, 2008.
- 10) Massonnet, C.: Methode de calcul des points multiples tenant de leur resistance a la torsion, Publication of I.A.B.S.E., Vol.10, 1950.
- 11) Troitsky, M. S.: Orthotropic bridges theory and design, James F. Lincoln Arc Welding Foundation, Cleveland, 1968.
- 12) Kennedy, J. B. and Gupta, S. R. D.: Bending of skew orthotropic plate structures, ASCE Journal of the Structural Division, Vol.102, pp.1559-1574, 1976.
- 13) Gupta, S. D. R. and Kennedy, J. B.: Continuous skew orthotropic plate structures, ASCE Journal of the Structural Division, Vol.104, pp.313-328, 1978.
- 14) Sapountzakis, E. J. and Katsikadelis, J. T.: Analysis of plates reinforced with beams, Computational Mechanics, Vol.26, pp.66-74, 2000.
- 15) Sapountzakis, E. J. and Katsikadelis, J. T.: A new model for slab and beam structures - comparison with other models, Computer and Structures, Vol.80, pp.459-470, 2002.
- 16) Sapountzakis, E. J. and Mokos V. G.: Analysis of plates stiffened by parallel beams, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.70, pp. 1209-1240, 2007.
- 17) Reissner, E.: The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, Journal of Applied Mechanics, Vol.12, pp.A69-A77, 1945.
- 18) Mindlin, R.D.: Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, Journal of Applied Mechanics, Vol.18(1), pp.31-38, 1951.
- 19) 半谷祐彦: 平板の基礎理論, 彰国社, 1995.
- 20) AASHTO LRFD Bridge Design Specifications: American Association of State Highway and Transportation Officials, Washington D.C. 4th Ed. 2007.
- 21) 全邦釘, Fu, G.: 厚肉斜板の曲げに関する支配方程式の導出とその解析解, 応用力学論文集, Vol.12, pp.15-25, 2009.
- 22) 菊池洋一, 近藤明雅: 橋梁工学 (第六版), オーム社, 1995.
- 23) 原弘行, 本田秀行: 斜角 47° を有する鋼道路橋の構造特性と動的応答, 構造工学論文集, Vol.49A, pp.325-330, 2003.
- 24) Ebeido, T. and Kennedy, J.B.: Girder moments in continuous skew composite bridges, Journal of Bridge Engineering, Vol.1(1), pp.37-45, 1996.
- 25) Rajagopalan, N.: Bridge Superstructure, Alpha Science, Oxford, 2006.
- 26) Menassa, C., Mabsout, M., Tarhini, K. and Frederick, G.: Influence of Skew Angle on Reinforced Concrete Slab Bridges, Journal of Bridge Engineering, Vol.12, pp. 205-214, 2007.
- 27) (社) 日本道路協会: 道路橋示方書・同解説, 丸善, 2002.

- 28) Bishara, A. G., Liu, M. C. and El-Ali, N. D.: Wheel Load Distribution on Simply Supported Skew I-Beam Composite Bridges, *Journal of Structural Engineering*, Vol.119(2), pp.399-419, 1993.
- 29) 中井博, 北田俊行: 鋼橋設計の基礎, 共立出版, 1992.
- 30) 成瀬輝男: ねじり剛性を持つ斜連続箱桁橋の解析について, *土木学会論文集*, Vol.80, pp.1-6, 1962.
- 31) 松本嘉司: 鉄道橋としての鉄筋コンクリート斜角げたの設計に関する研究, *土木学会論文報告集*, Vol.162, pp.49-76, 1969.
- 32) Morley, L. S. D.: *Skew Plates and Structures*, Pergamon Press, New York, 1963.
- 33) 岸正彦: 構造解析のための有限要素法実践ハンドブック, 森北出版株式会社, 2006.
- 34) W. Chung and E.D. Sotelino: Three-dimensional finite element modeling of composite girder bridges, *Engineering Structures*, Vol.28, pp.63-71, 2006.
- 35) Chun, P.: *Skewed Bridge Behaviors: Experimental, Analytical, and Numerical Analysis*, Ph.D Dissertation in Wayne State University, 2010.
- 36) Dennis M.: Simplified live load distribution factor equations, Transportation Research Board, NCHRP Report 592, 2007.

(2010年3月9日受付)