

半無限周期構造を対象とした表面波モード解析手法の改善

An Enhancement of Surface Wave Analysis Method for Periodic Half-Planes

阿部和久*・笠原祐樹**・紅露一寛***

Kazuhisa ABE, Yuuki KASAHARA and Kazuhiro KORO

*正会員 工博 新潟大学教授 工学部建設学科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)

**修(工) 日本通運株式会社東北重機建設支店 (〒 984-0011 仙台市若葉区六丁の目西町 8 番 30 号)

***正会員 博(工) 新潟大学准教授 大学院自然科学研究科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)

A numerical method is presented for the surface wave analysis of half-plane having a periodic structure. In order to grope out the dispersion curves of surface waves over a wide region, an improvement in the computational efficiency is attempted. This is realized by employing a transfer matrix for nodal vectors between the lower and the upper boundaries of a unit cell. Waves transmitting in the half-plane toward the far field are composed of eigenvectors of the transfer matrix. Exploration of the surface wave modes in a wavenumber-frequency domain can be reduced to an eigenvalue problem of a matrix consisted of the above eigenvectors. A numerical procedure to calculate the wave motion of surface wave modes is also constructed. The developed method is applied to the dispersion analysis of periodic half-planes. The validity of the proposed method is proved through those analyses, and characteristics of the dispersion curves and the wave motion are discussed.

Key Words : surface wave, periodic structure, transfer matrix

1. はじめに

複合材料のような周期構造内を伝播する波動には、均質な材料には認められない特性が存在する。例えば、無限周期場中の波動伝播モードは一般に分散性を持ち、さらに伝播モードの存在する周波数帯(パスバンド)と、存在しない周波数帯(ストップバンド)とが交互に分布するといった特徴を有することが知られている。繊維強化複合材料や導波路などに代表される周期構造は、近年工学の広範な分野で用いられており、当然のことながらこれらの材料を設計する際には、上述のような特性の把握も重要となる^{1),2)}。

無限周期構造における波動伝播特性は、Bloch の定理³⁾を適用することで、当該周期場の最小単位を与えるユニットセルを対象とした波数—振動数域での固有値問題に帰着して、比較的容易に評価することができる。これに対して、半無限周期場の表面波モードを対象とした場合、Bloch の定理が直接適用できず、具体的解法の構成は容易でない。しかし、複合材料の非破壊検査や、地盤中に周期介在物を設置することによる新たな防振工法の開発など様々な用途において、半無限周期構造における表面波モードの評価は有用な知見を与え得る。

そのため、以前著者らは当該問題を対象とした解析法の構成を試みた⁴⁾。具体的には、2次元半無限周期場を対象に、それを構成しているユニットセルを有限要素で離散化し、自由表面における節点力と節点変位との関係を与えるインピーダンス行列を導出した。なお、その際には Floquet 変換⁵⁾と逆 Floquet 変換を利用した。表面波モードの解析は、この行列の固有値問題に帰着して実施する方法を採った。具体例として、直交

格子状に正方形介在物が配置されている場合について解析を行った。その結果、介在物の存在により、表面波モードの分散曲線においても上述のストップバンドが存在することが確認できた。しかし、下から2番目の振動数帯に位置するパスバンドにおいて、分散曲線が途中で途切れる結果が得られた。

なお、文献4)の解法で用いた逆 Floquet 変換は、後述のように自由表面に直交する方向の波数成分に関する有限区間積分により与えられる。その際の被積分関数は有限要素解析を含む一連の数値計算を経て得られるものとなる。したがって、当該積分は数値的に処理せざるを得ず、波数—振動数空間内のある1つの点におけるインピーダンス行列の導出に多大な計算を余儀なくされた。そのため、波数—振動数空間における分散曲線の作成には、Newton-Raphson 法に基づき曲線の接線方向に沿ってモードを探索する効率的方法を採用した。しかし、この手法による場合、分散曲線が一旦途切れるとその先が探索不能となり、そのため、文献4)では一度途切れた分散曲線の先の様子を調べることができなかった。また仮にそれが可能であったとしても、他の分散曲線を見逃す恐れがあった。

本研究では、上述のような文献4)の手法における問題点の改善を図り、分散曲線の大域的探索を試みる。具体的には、まずユニットセル境界の内、自由表面と平行な上下2つの辺上に位置する有限要素節点間に対して、節点変位と節点力に関する伝達マトリックスを、Floquet 変換を介することなく固有モードの一次結合に基づき導出する。次に、それに関する固有値問題を解くことで無限遠方へ伝播して行く波動モード成分を抽出し、それらを並べて得られる行列を作成する。表面波モードの条件は、この行列における何れかの固有値

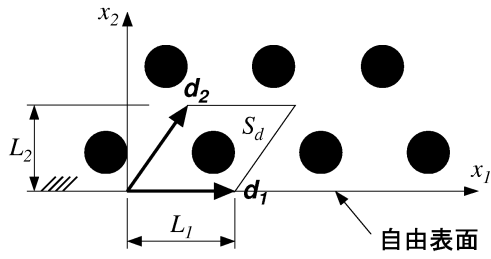


図-1 半無限周期構造

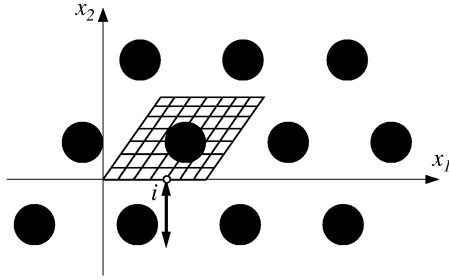


図-2 無限周期構造の加振問題

がゼロとなる条件により判定する．また，表面波モードの分散曲線は，この条件をみたす波数—振動数空間中の点集合により構成する．本手法では逆 Floquet 変換を用いないので，前報のものに比べ解析効率は格段に向上する．そのため，所定の波数—振動数域全体に亘る大域的モード探索が，現実的な計算時間内で実施可能となる．また，分散曲線の探索に加え，個々の波数—振動数点における変位モード形状を求めるための具体的手法についても構成する．最後に文献 4) で対象とした問題に本手法を適用し，前報で得た結果との比較等を通して提案解法の妥当性を検証する．さらに，高振動数域における分散曲線の分布の様子や，変形モードに基づく表面波モードの特性などについて考察する．

2. 文献 4) における解法と解析結果の概要

ここでは，本手法と前報における手法との違いを明確にするため，文献 4) で構成した解法の概略について示す．また，それによる解析結果についても概要を述べる．

2.1 解析対象問題

図-1 の様な 2 次元平面ひずみ半無限周期場における表面波モードの解析を対象とする．なお，周期性を特徴付けている 2 つの基底ベクトルを $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ とし，それにより与えられる周期構造の最小単位であるユニットセル S_d を図のようにとる．また， $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ の各座標軸 x_1, x_2 への射影長をそれぞれ L_1, L_2 とおく．

2.2 Bloch の定理

Bloch の定理は本論文における以降の議論においても重要となるので，その概略を述べる．

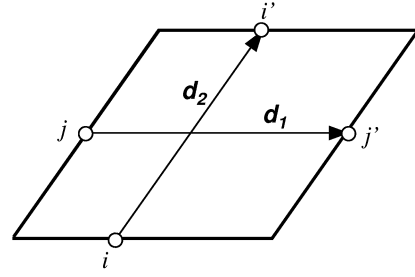


図-3 定常解の節点間における対応関係

無限周期構造における定常波動解には次の関係が成り立つ．

$$\mathbf{u}(\mathbf{r} + n_i \mathbf{d}_i) = e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot n_i \mathbf{d}_i} \mathbf{u}(\mathbf{r}) \quad (n_i \in \mathbb{Z}) \quad (1)$$

ここで， $\mathbf{u}$ は定常波動解， $\mathbf{r}$ は任意点の位置ベクトル， $\boldsymbol{\kappa}$ は当該波動場における Floquet 波数ベクトル， $n_i (i = 1, 2)$ は任意の整数であり，繰り返し指標は総和規約に従うものとする．なお，Floquet 波数と通常の波数との対応関係については後出の式 (7) において説明する．

2.3 文献 4) における解法

図-1 の半無限場と同一の周期性を持つ無限場を設定する (図-2)．半無限場の自由表面に相当する x_1 軸に接して置かれているユニットセルの x_1 軸上の節点 i を，円振動数 ω の下で調和加振する問題を考える．この無限波動場の加振問題は，2 重 Floquet 変換⁵⁾によりユニットセルに関する次の有限要素方程式で与えられることとなる．

$$[\tilde{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2) - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2)] \{\tilde{\mathbf{U}}\} = \{\tilde{\mathbf{F}}\} \quad (2)$$

ここで， $\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2$ は x_1, x_2 方向の Floquet 波数成分である．また， $[\tilde{\mathbf{K}}], [\tilde{\mathbf{M}}]$ はユニットセルを離散化して得られる剛性行列と質量行列に対し，次のような周期性を課して得られる行列である．

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{i'} &= e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{d}_2} \mathbf{u}_i, \\ \mathbf{u}_{j'} &= e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{d}_1} \mathbf{u}_j \end{aligned} \quad (3)$$

ここで， $(\mathbf{u}_{i'}, \mathbf{u}_{j'})$ はユニットセル底辺と左辺上に位置する節点 i, j に対応する上辺と右辺の節点 i', j' における節点変位ベクトルである (図-3)．式 (3) を運動方程式に代入し， $(\mathbf{u}_{i'}, \mathbf{u}_{j'})$ の項を消去することで式 (2) を得る．

式 (2) を解いて得られた $\{\tilde{\mathbf{U}}(\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2; \omega)\}$ を， $\boldsymbol{\kappa}_2$ について次式に基づき逆 Floquet 変換⁵⁾する．

$$\{\hat{\mathbf{U}}(\boldsymbol{\kappa}_1; \omega)\} = \frac{L_2}{2\pi} \int_0^{2\pi/L_2} \{\tilde{\mathbf{U}}(\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2; \omega)\} d\boldsymbol{\kappa}_2 \quad (4)$$

式 (4) の積分は $\{\tilde{\mathbf{U}}\}$ の特異性を処理しつつ，Gauss の求積法に基づき計算する．

$\{\hat{\mathbf{U}}\}$ は x_1 方向に波数 $\boldsymbol{\kappa}_1$ の下で伝播する定常解を与える． $\{\hat{\mathbf{U}}\}$ を得たら，この変位解に対するユニットセルの内部節点力ベクトル $\{\hat{\mathbf{F}}\}$ を計算する． x_1 軸上の節

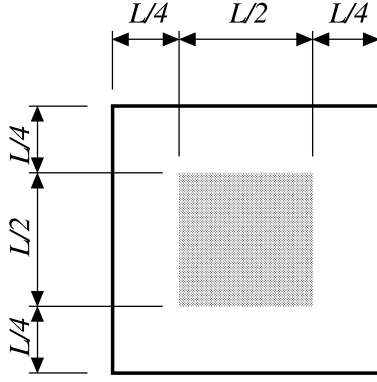


図-4 正方形介在物を有するユニットセル

点 i を加振して得た解 $\{\hat{\mathbf{U}}\}, \{\hat{\mathbf{F}}\}$ から, x_1 軸上に位置する節点に関する成分のみ抽出して得られるベクトルを $\{\tilde{\mathbf{U}}_i\}, \{\tilde{\mathbf{F}}_i\}$ とおく. x_1 軸上の各節点毎にこれらを順次求め, それらを列成分に持つ正方形行列 $[\tilde{\mathbf{U}}], [\tilde{\mathbf{F}}]$ を作成する. すると, 半無限周期場の (κ_1, ω) 空間における表面節点変位と節点力との関係を与えるインピーダンス行列 $[\hat{\mathbf{K}}]$ が, 次式により間接的に定義される.

$$[\hat{\mathbf{K}}][\tilde{\mathbf{U}}] = [\tilde{\mathbf{F}}] \quad (5)$$

以上より, Floquet 波数 κ_1 の下で x_1 方向に伝播する表面波モードの条件は次式で与えられる.

$$\det[\hat{\mathbf{K}}] = 0 \quad (6)$$

表面波モードの分散曲線は, (κ_1, ω) 空間で式(6)をみたす点の集合として求めることができる.

2.4 解析結果の概要

文献 4) では, 図-4 の正方形ユニットセルで与えられる半無限周期構造を対象に, 上述の手法を適用した. なお, 母材および介在物のポアソン比はいずれも 0.3 とし, 各材料中の実体波の伝播速度が一致するように, 剛性と質量密度を設定した. この際の母材に対する介在物の剛性比を r_s で定義する. また, 有限要素解析に当り, ユニットセルを 4 節点矩形要素により 8×8 分割した.

$r_s=1, 2, 5, 0.5$ の下で求めた分散曲線を図-5 に示す. 図で C_T は横波の伝播速度である.

なお, Floquet 波数 κ_1 と通常の波数 k_1 との間には, 下から n 番目のパスバンドに対して一般に次の関係が成り立つ⁶⁾.

$$\begin{aligned} k_1 &= -\kappa_1 + m \frac{2\pi}{L} \quad (n = 2m), \\ &= \kappa_1 + m \frac{2\pi}{L} \quad (n = 2m + 1) \end{aligned} \quad (7)$$

図-5 は, 式(7)に基づき横軸を Floquet 波数にとって描画したものである.

$r_s = 1$ の場合, 均質な半無限場を与えるので, 表面波モードは Rayleigh 波に一致する. 当該モードに対しては $n = 2$ の振動数帯まで分散曲線が完全に得られ

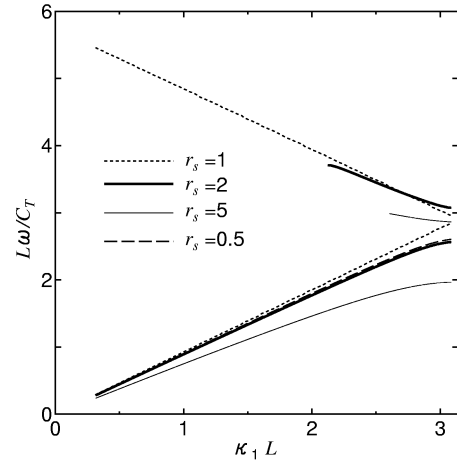


図-5 正方形介在物を有する半無限周期構造の分散曲線

ている. なお, 理論解との一致は良好であった. 一方, $r_s \neq 1$ のケースでは, $2 < L\omega/C_T < 3$ の振動数域において分散曲線が上下に分離し, そこに表面波モードの存在しない振動数帯であるストップバンドが現れていることが確認できる. また, 下から 2 本目の分散曲線が途中で途切れている. 前述のとおり, 文献 4) では分散曲線の探索の効率化を図る目的で, その接線方向に沿ってモードの存在を調べる方法によった. そのため, 図-5 のように, 一旦曲線が途切れると, その先の分散曲線を探索できず, その様子を知ることができなかった.

3. 提案手法

3.1 伝達マトリックスの導出

周期場の解を構成する方法として, 前述の Floquet 変換による方法の他に, モード重畳に基づく方法が考えられる. なお, Shen⁷⁾は, 単一の部分構造が円環状に連なった構造を対象に振動モード解析を行った. その際に, それを構成している部分構造に関する伝達マトリックスを利用している. 本研究では文献 7) と同様に, ユニットセルにおける対面境界辺に関する伝達マトリックスを導出し, その下で得られる固有モードにより波動解を構成する方法を採る.

まず, 図-1 の半無限周期構造に対応する無限場での波動問題を考える. あるユニットセル内における運動方程式は, 離散化の後次式で与えられる.

$$[\hat{\mathbf{K}}]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (8)$$

ここで, $\{\mathbf{U}\}, \{\mathbf{F}\}$ はユニットセルの節点変位ベクトルと節点力ベクトルである. また, $[\hat{\mathbf{K}}]$ は剛性行列 $[\mathbf{K}]$ および質量行列 $[\mathbf{M}]$ により与えられる次の行列である.

$$[\hat{\mathbf{K}}] = [\mathbf{K}] - \omega^2[\mathbf{M}] \quad (9)$$

なお, $\{\mathbf{U}\}, \{\mathbf{F}\}$ を構成する部分ベクトルを次のよう

に与える.

$$\begin{aligned} [\mathbf{U}]^T &= [\mathbf{U}_L \ \mathbf{U}_R \ \mathbf{U}_B \ \mathbf{U}_T \ \mathbf{U}_M]^T, \\ [\mathbf{F}]^T &= [\mathbf{F}_L \ \mathbf{F}_R \ \mathbf{F}_B \ \mathbf{F}_T \ \mathbf{F}_M]^T \end{aligned} \quad (10)$$

ここで, $(\)_L, (\)_R, (\)_B, (\)_T, (\)_M$ はそれぞれユニットセルの左辺, 右辺, 底辺, 上辺, 内部に位置する節点に関する部分ベクトルを表している.

$\mathbf{d}_1$ 方向に伝播して行く波動場 ($\kappa_1 > 0$) を考える. Bloch の定理より, 周期構造における左右边上の定常解には次の関係が成り立つ.

$$\{\mathbf{U}_R\} = \{\mathbf{U}_L\}e^{-i\kappa_1 L_1}, \quad \{\mathbf{F}_R\} = -\{\mathbf{F}_L\}e^{-i\kappa_1 L_1} \quad (11)$$

式(11) を(8) に代入し, 節点変位, 節点力ベクトルから $(\)_R$ 成分を消去して次式を得る.

$$\begin{aligned} [\hat{\mathbf{K}}']\{\mathbf{U}'\} &= \{\mathbf{F}'\}, \\ [\mathbf{U}']^T &= [\mathbf{U}_L \ \mathbf{U}_B \ \mathbf{U}_T \ \mathbf{U}_M]^T, \\ [\mathbf{F}']^T &= [\mathbf{F}_L \ \mathbf{F}_B \ \mathbf{F}_T \ \mathbf{F}_M]^T \end{aligned} \quad (12)$$

ここで, $[\hat{\mathbf{K}}']$ は $(\)_R$ を消去することで $[\hat{\mathbf{K}}]$ を縮約して得られる行列である. なお, 式(9) に対応して, $[\hat{\mathbf{K}}']$ を構成する剛性行列と質量行列をそれぞれ $[\mathbf{K}'], [\mathbf{M}']$ と表しておく.

以上の準備の下, 式(12) に対する次の固有値問題を考える.

$$[\mathbf{K}']\{\phi'\} = \omega^2[\mathbf{M}']\{\phi'\} \quad (13)$$

式(13) における固有円振動数を ω_i , それに対する固有ベクトルを $\{\phi'_i\}$ と表すと, 運動方程式(12) における変位解はこの固有ベクトルの一次結合により構成することができる.

$$\{\mathbf{U}'\} = \sum_i^N \alpha_i \{\phi'_i\} \quad (14)$$

ここで, N は系の自由度, α_i は係数である.

α_i を決定するため, まず式(14) を(12) に代入する.

$$\sum_j^N \alpha_j [\mathbf{K}' - \omega^2 \mathbf{M}']\{\phi'_j\} = \{\mathbf{F}'\} \quad (15)$$

式(15) の両辺に左から $[\bar{\phi}'_i]^T$ をかけると, 最終的に次式により α_i を得ることができる.

$$\alpha_i = \frac{1}{m_i(\omega_i^2 - \omega^2)} [\bar{\phi}'_i]^T \{\mathbf{F}'\} \quad (16)$$

ここで, $(\)$ は共役を意味する. また, m_i は次式により与えられる.

$$\begin{aligned} [\bar{\phi}'_i]^T [\mathbf{M}']\{\phi'_j\} &= 0 \quad (i \neq j) \\ &= m_i \quad (i = j) \end{aligned} \quad (17)$$

外力が物体内に作用せず $\{\mathbf{F}_M\} = \{\mathbf{0}\}$ とすると, 式(16) を(14) に代入することで, 上・底辺における節点変位と節点力に関する次の式を得る.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_B \\ \mathbf{U}_T \end{Bmatrix} &= \sum_i^N \frac{1}{m_i(\omega_i^2 - \omega^2)} \{\phi_i\} [\bar{\phi}_i]^T \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_B \\ \mathbf{F}_T \end{Bmatrix} \\ &:= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{BB} & \mathbf{H}_{BT} \\ \mathbf{H}_{TB} & \mathbf{H}_{TT} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_B \\ \mathbf{F}_T \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

ここで, $\{\phi_i\}$ は $\{\phi'_i\}$ から $\{\mathbf{U}_B\}, \{\mathbf{U}_T\}$ に対応する成分のみ抽出して構成されるベクトルである.

式(18) をさらに変形して, 底辺の節点変位と節点力から上辺のそれらを与える伝達マトリックス $[\mathbf{G}]$ を導出し, 以下の関係を得る.

$$\begin{aligned} [\mathbf{G}] \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_B \\ \mathbf{F}_B \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_T \\ -\mathbf{F}_T \end{Bmatrix}, \\ [\mathbf{G}] &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{TT}\mathbf{H}_{BT}^{-1} & -\mathbf{H}_{TT}\mathbf{H}_{BT}^{-1}\mathbf{H}_{BB} + \mathbf{H}_{TB} \\ -\mathbf{H}_{BT}^{-1} & \mathbf{H}_{BT}^{-1}\mathbf{H}_{BB} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

3.2 半無限波動場の構成

無限周期構造内を x_1, x_2 の正方向に進行する定常波動場を考える. ユニットセルの上・底辺の節点ベクトル間に Bloch の定理を適用すると次式を得る.

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}_T \\ -\mathbf{F}_T \end{Bmatrix} = e^{-i\kappa \cdot \mathbf{d}_2} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_B \\ \mathbf{F}_B \end{Bmatrix} = e^{-ih_2} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_B \\ \mathbf{F}_B \end{Bmatrix} \quad (20)$$

ここで, $\kappa = h_i \mathbf{b}_i$, また $\mathbf{b}_i$ は $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ で与えられるユニットセルの逆格子ベクトル³⁾であり, 次式をみだす.

$$\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{d}_j = \delta_{ij} \quad (21)$$

なお, δ_{ij} は Kronecker のデルタである.

無限自由場の中を伝播して行く波動に対して式(20) の関係を仮定し, これを式(19) に代入すると次の固有値問題を得る.

$$[\mathbf{G}] \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_B \\ \mathbf{F}_B \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_B \\ \mathbf{F}_B \end{Bmatrix}, \quad (\lambda = e^{-ih_2}) \quad (22)$$

ここでは上述のようにユニットセルの底辺から上辺に向かって進行する波動について考えているので, 式(22) の固有モードの内, その条件をみたすもののみ抽出する. なお, 全固有モード数を N_1 とすると, x_2 の正方向に進行する成分を与えるモードはその半数存在する. これらを $\{\mathbf{U}_i\}, \{\mathbf{F}_i\} (i = 1, \dots, N_1/2)$ とおき, それを列成分に持つ以下の正方形行列をそれぞれ $[\mathbf{U}_s], [\mathbf{F}_s]$ と定義する.

$$\begin{aligned} [\mathbf{U}_s] &= [\mathbf{U}_1 \cdots \mathbf{U}_{N_1/2}], \\ [\mathbf{F}_s] &= [\mathbf{F}_1 \cdots \mathbf{F}_{N_1/2}] \end{aligned} \quad (23)$$

次に, 半無限場の表面に加振力 $\{\mathbf{F}_B^1\}$ を作用させた場合の定常問題を考える. 表面変位応答解を $\{\mathbf{U}_B^1\}$ と

するとき、これらは式(22)の固有モードの内、表面から無限遠方に伝播して行く成分により構成される。したがって、一般に次式のように表現することができる。

$$\{\mathbf{U}_B^1\} = \sum_i^{N_1/2} a_i \{\mathbf{U}_i\} = [\mathbf{U}_s] \{\mathbf{a}\}, \quad (24)$$

$$\{\mathbf{F}_B^1\} = \sum_i^{N_1/2} a_i \{\mathbf{F}_i\} = [\mathbf{F}_s] \{\mathbf{a}\}$$

ここで、 $\{\mathbf{a}\}$ は係数 a_i を成分に持つベクトルである。

表面波モードの条件は、 $\{\mathbf{U}_B^1\} \neq \{\mathbf{0}\}$ 、 $\{\mathbf{F}_B^1\} = \{\mathbf{0}\}$ で与えられるから、式(24)より次の条件式を得る。

$$\det[\mathbf{F}_s] = 0 \quad (25)$$

または次式のように、固有値の何れかがゼロとなる条件により置き換えることもできる。

$$[\mathbf{F}_s] \{\mathbf{a}\} = \mu \{\mathbf{a}\}, \quad (\mu = 0) \quad (26)$$

(κ_1, ω) 空間において、式(25)または(26)をみたす点の集合を求めることで、表面波モードの分散曲線を得ることが可能となる。なお、行列式の値は大きく変動する恐れがあり、その評価は必ずしも容易でない。そのため本研究では表面波モードの探索に際し、式(26)の固有値解析による方法を用いる。

4. モード形状の計算

(κ_1, ω) 空間内の分散曲線を構成する個々の点での表面波に対応する変形モードを具体的に計算するための手順を構成する。

自由表面に接しているユニットセルから $\mathbf{d}_2$ 方向に向かって順に各段のユニットセルに番号を付ける。 k 段目のユニットセルにおける節点変位と節点力の部分ベクトルを、式(10)と同様にそれぞれ以下のように表しておく。

$$\begin{aligned} [\mathbf{U}^k]^T &= [\mathbf{U}_L^k \ \mathbf{U}_R^k \ \mathbf{U}_B^k \ \mathbf{U}_T^k \ \mathbf{U}_M^k]^T, \\ [\mathbf{F}^k]^T &= [\mathbf{F}_L^k \ \mathbf{F}_R^k \ \mathbf{F}_B^k \ \mathbf{F}_T^k \ \mathbf{F}_M^k]^T \end{aligned} \quad (27)$$

表面波の分散曲線上に位置する (κ_1, ω) では、式(26)の何れかの固有値が $\mu = 0$ となっている。今これに対応する固有ベクトルを改めて $\{\mathbf{a}\}$ で表すものとする。この固有ベクトルが固有値解析により求められると、表面波モードにおける第1段目のユニットセル底辺の節点ベクトル $\{\mathbf{U}_B^1\}$ 、 $\{\mathbf{F}_B^1\} (= \{\mathbf{0}\})$ は式(24)により計算できる。一方、上辺節点ベクトル $\{\mathbf{U}_T^1\}$ 、 $\{-\mathbf{F}_T^1\}$ は伝達マトリックス $[\mathbf{G}]$ を介して次式のように構成することができる。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_T^1 \\ -\mathbf{F}_T^1 \end{Bmatrix} &= [\mathbf{G}] \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_B^1 \\ \mathbf{F}_B^1 \end{Bmatrix} \\ (24) \rightarrow [\mathbf{G}] \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_s \\ \mathbf{F}_s \end{Bmatrix} \{\mathbf{a}\} &= \sum_i^{N_1/2} a_i [\mathbf{G}] \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_i \\ \mathbf{F}_i \end{Bmatrix} \\ (22) \rightarrow \sum_i^{N_1/2} \lambda_i a_i \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_i \\ \mathbf{F}_i \end{Bmatrix} & \end{aligned} \quad (28)$$

上・底辺の節点力ベクトル $\{\mathbf{F}_T^1\}$ 、 $\{\mathbf{F}_B^1\}$ が求められると、1段目のユニットセルの全節点変位 $\{\mathbf{U}^1\}$ が次式により計算できる。

$$\{\mathbf{U}^1\} = [\tilde{\mathbf{H}}] \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_B^1 \\ \mathbf{F}_T^1 \end{Bmatrix} \quad (29)$$

ただし、 $[\tilde{\mathbf{H}}]$ は次式で与えられる長方形行列である。

$$[\tilde{\mathbf{H}}] = \sum_i^N \frac{1}{m_i(\omega_i^2 - \omega^2)} \{\phi_i'\} [\bar{\phi}_i]^T \quad (30)$$

同様の計算により、第 k 段目のユニットセルに対して次式を得る。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_T^k \\ -\mathbf{F}_T^k \end{Bmatrix} &= [\mathbf{G}] \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_B^k \\ \mathbf{F}_B^k \end{Bmatrix} = [\mathbf{G}]^k \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_B^1 \\ \mathbf{F}_B^1 \end{Bmatrix} \\ &= \sum_i^{N_1/2} \lambda_i^k a_i \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_i \\ \mathbf{F}_i \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (31)$$

以上より、第 k 段目のユニットセル内の変形モードは、結局次式により求めれば良いこととなる。

$$\begin{aligned} \{\mathbf{F}_B^k\} &= \sum_i^{N_1/2} \lambda_i^{k-1} a_i \{\mathbf{F}_i\}, \\ \{\mathbf{F}_T^k\} &= - \sum_i^{N_1/2} \lambda_i^k a_i \{\mathbf{F}_i\}, \\ \{\mathbf{U}^k\} &= [\tilde{\mathbf{H}}] \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_B^k \\ \mathbf{F}_T^k \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (32)$$

5. 解析結果

5.1 分散曲線の探索方法

以下では、2.で説明した文献4)での解析対象に、本手法を適用して表面波モード解析を実施する。ここでは、本解析で用いた分散曲線の探索手順について説明する。

(κ_1, ω) 空間における表面波モード探索域は、 κ_1, ω それぞれの下端と上端で囲まれた長方形領域により与える。この探索域において、 κ_1 区間を所定のきざみ幅 $\Delta\kappa_1$ により等分割する。これにより与えられる各波数 κ_1 の下で、 ω 方向に順次振動数を変えながら3.に示した手法により解析を進める。なお、表面波モードの判定条件式(26)において、固有値 μ は一般に複素数値をとる。そのため、その絶対値が基準値以下となった場合に $\mu = 0$ と見なすこととした。また、一定の波数 κ_1 の下で当該条件をみたす ω を求める際に、まずある大きさの増分 $\Delta\omega$ により走査し、極小値を与える ω を検出する。次に、その ω に対して $(\omega - \Delta\omega, \omega + \Delta\omega)$ の範囲で $\Delta\omega/10$ 、さらには $\Delta\omega/100$ のきざみ幅で同様の操作を繰り返し、最終的に得られた固有値の絶対値の極小値が基準値以下となった場合に、表面波モードが存在するものと判定した。

なお、以下の解析では $(0.1/L \leq \kappa_1 \leq \pi/L)$ 、 $(0.1C_T/L \leq \omega \leq 6.0C_T/L)$ を探索域にとり、 κ_1 方

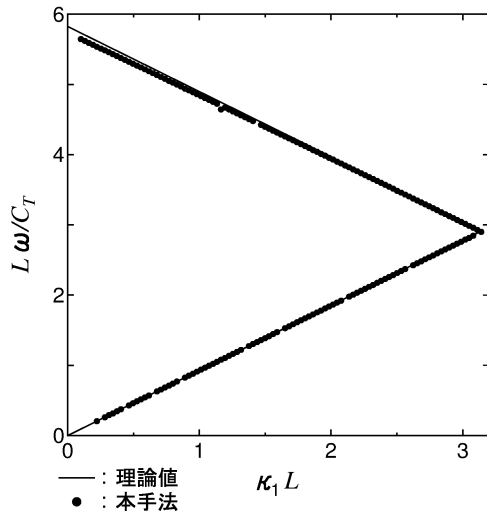


図-6 半無限均質場での理論分散曲線と本解析結果との比較

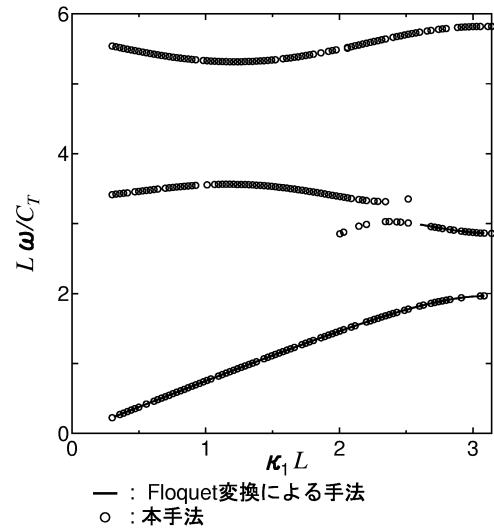


図-8 半無限周期構造での分散曲線 ($r_s = 5$)

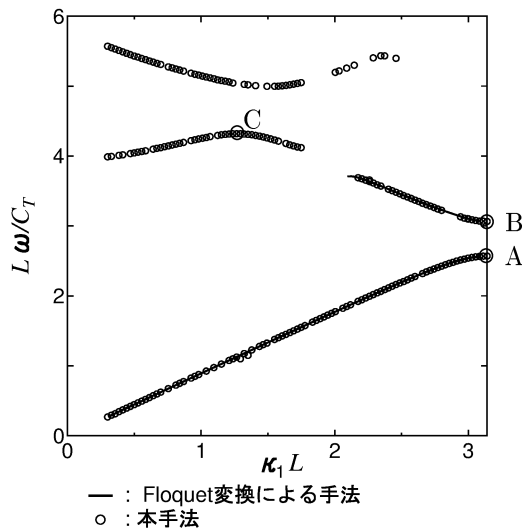


図-7 半無限周期構造での分散曲線 ($r_s = 2$)

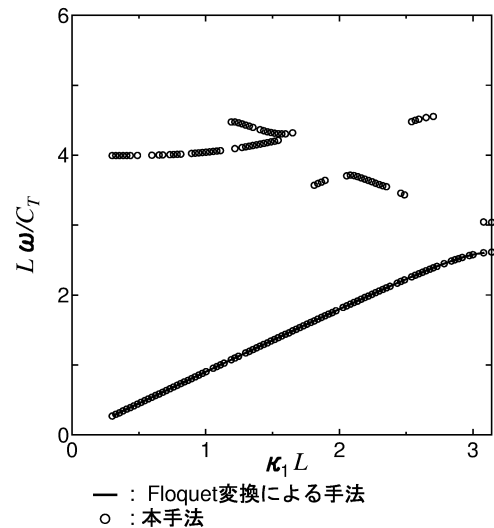


図-9 半無限周期構造での分散曲線 ($r_s = 5$)

向に 40 等分割し, $\Delta\omega = 0.05C_T/L$ の下で解析を行った. また, ゼロ固有値の判定基準値は, 試行の結果本解析では 0.01 と設定した.

5.2 均質場での分散曲線

本手法の妥当性を確認する目的で, 半無限均質場 ($r_s = 1$) の場合の表面波モード解析を試みた. 解析におけるユニットセルおよびその有限要素分割は 2.4 に述べたものと同じである. 当該問題の表面波モードは Rayleigh 波で与えられるので, 分散曲線は波数によらず一定の傾き ($\omega/\kappa_1 = C_R \approx 0.927C_T$) の直線により与えられる. Rayleigh 波の理論分散曲線と, 本解析による結果とを合わせて図-6 に示す. なお, 図-5 と同様に横軸は式(7) の関係で与えられる Floquet 波数により表示している.

図より, 理論値と本手法による結果とが良く一致し

ており, 提案法の妥当性が確認できる. また, 高振動数域において本解析結果が理論値より多少下方にずれているが, この傾向は文献 4) の解析でも認められた. これは, 高振動数域ではより短波長の変形モードを与えるため, 離散化誤差が相対的に増大することによるものと考えられる.

5.3 半無限周期場の分散曲線

図-4 の正方形介在物で与えられる半無限周期場の本手法を適用する. 剛性比 $r_s = 2$ における解析結果を図-7 に示す. なお, 比較のため文献 4) で得られた分散曲線を実線で示した. 文献 4) での分散曲線は, 下方から 2 番目のパスバンドの途中で探索不能となり途切れていたが, その曲線が得られている範囲において両者間に良好な一致が認められ, これら両手法の妥当性を裏付ける結果となっている.

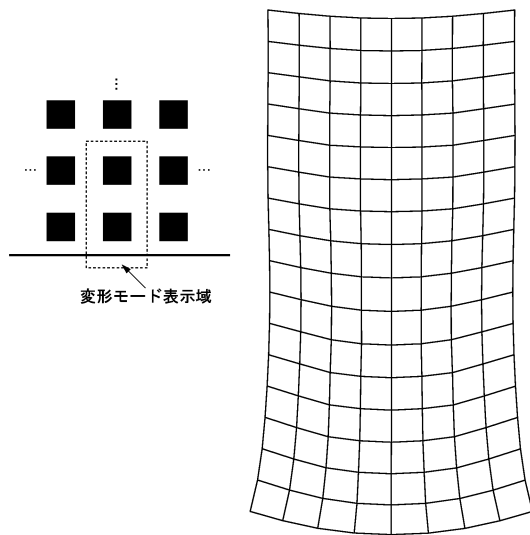


図-10 表面波の変形モード (A)

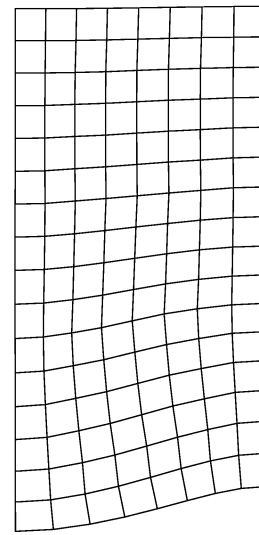


図-11 表面波の変形モード (B)

大域的に分散曲線を探索する方法を採った本解析では、文献4)で得たものよりもさらに高振動数域での分散曲線をも捉えることができた。その結果を見ると、文献4)で探索不能となった領域で、やはり分散曲線が途切れていることがわかる。また、その延長線上(κ_1 軸の負の方向)に再度分散曲線が現れ、 $\kappa_1 L \approx 1.2$ 付近で極大値(図中C点)をとった後漸減している様子が確認できる。 $L\omega/C_T \approx 5$ の上方に位置する分散曲線は、 $\kappa_1 L \approx 1.5$ 付近で極小値を取っている。なお、これらの極値点における表面波モードの特徴については次節で考察する。ちなみに、有限要素分割を 16×16 とし、細分割して解析を行ったが、分散曲線の分布に大きな変化は認められなかった。このことから、これらの特徴は近似精度とは直接関係のないものであると考えられる。

$r_s = 5.0$ での結果を図-8に示す。 $r_s = 2.0$ の場合と同様に、文献4)で得られた分散曲線との良好な一致が認められる。また、文献4)で探索不能となった付近で、やはり分散曲線の不連続点が存在している。さらに、 $L\omega/C_T \approx 5$ より上方に分布する分散曲線と、その下の分散曲線との間のストップバンドの幅が $r_s = 2$ の場合に比べ拡大しており、介在物の剛性増加による遮蔽性能の向上が確認できる。

次に $r_s = 0.5$ での結果を図-9に示す。 $r_s = 2, 5$ の場合と同様に、文献4)で分散曲線が得られた範囲において、両解析による良い一致が認められる。また、最初のパスバンドは明瞭に捉えられているものの、剛性比が1より高い場合と異なり、高振動数域では分散曲線が離散的に分布している。なお、分散曲線が途切れる事については、実際に表面波モードが存在しないのか、固有値の計算精度の問題で本手法によっても検出できていないのか現段階では不明であり、今後さらに検討が必要である。

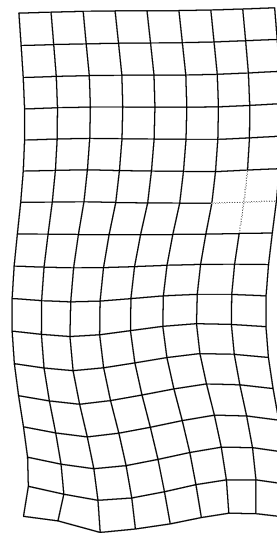


図-12 表面波の変形モード (C)

5.4 表面波の変形モード

$r_s = 2.0$ の場合を例に、4.に構成した手法により求めた表面波の変形モードを幾つか示す。なお、求めたモードは図-7中に示したA, B, Cの3点におけるものである。これら各点での変形モードを図-10,11,12に示す。なおこれらの図は自由表面(下端)から2段目のユニットセルまでの変形モードを表示したものである。モードA, Bの2つはバンド端に位置し、分散曲線の傾きがゼロとなっている点に対応しており、定在波モードを与える。静止画では分かりづらいが、モードAでは介在物(図の水平方向中央部)付近が上下に大きく振動するものとなっており、逆にモードBでは介在物付近が節となり、ユニットセル左右端が交互に上下動している。これらの表面波モードの水平方向波長は両者とも $2L$ で等しい。なお、本解析では、母材と介在物内の実体波の伝播速度が等しくなるように、剛性と合わせて介在物の質量密度も変えている。したがって、 $r_s = 2.0$

の場合、介在物の質量密度は母材のその2倍となる。介在物付近が上下に振動しているモードAがモードBより低い振動数値をとる結果となったのは、この質量の不均一性が影響しているものと考えられる。これらの表面波モードの水平方向波長が互いに等しいにも関わらず、モードA, B間で分散曲線にギャップ(パスバンド)が存在するのはこのことによるものと思われる。

モードCは分散曲線の傾きがゼロとなる極値点に対応しているが、モードA, Bとは異なり、定在波モードとはなっていない。図-12の静止画ではわからないが、上下の介在物間に位置する母材中を水平方向に波動が伝播して行く様子が動画により確認できた。ただし、その伝わる方向は各層のユニットセル間で異なり、左右交互に変化することがわかった。この波動進行方向の交番により、ユニットセル左右の半無限境界辺を通過する波動全体で評価した群速度(分散曲線の傾き)が結果的にゼロとなったことが推測される。

6. おわりに

本研究では半無限周期構造における表面波の分散曲線の、波数—振動数空間での大域的探索を試みた。また、そのためには波数—振動数域における極めて多数の離散点を対象に表面波モードを探索する必要があるため、文献4)の解法に比べ計算効率の良い、逆Floquet変換によらない手法を新たに構築した。

均質場におけるRayleigh波の理論分散曲線や、文献4)で得た分散曲線などとの比較を通し、提案手法の妥当性を確認することができた。また、正方形介在物で構成される半無限周期場では分散曲線が途中で途切れるため、高振動数域における分散曲線の分布の様子が文献4)のNewton-Raphson法に基づく手法では探索不能となっていたが、本探索法を用いることによりそれを確認することができた。なお、下から2本目の分

散曲線が途中で途切れる傾向や、 $\kappa_1 = 0, \pi/L$ 以外の中間波数域においても分散曲線が極値をとることが全てのケースに共通して認められた。最後に、変形モードを調べることで、定在波モード間の振動数のギャップの存在が周期構造の変形モード特性と関係していることや、中間波数における極値点では定在波を与えず、ユニットセル層間の母材域中を波動が左右方向に伝播することなどがわかった。

参考文献

- 1) Cai, L.-W. and Williams Jr., J.H.: NDE via stop band formulation in fiber reinforced composites having square fiber arrangements, *Ultrasonics*, **37**, 483-492, 1999.
- 2) Sigmund, O. and Jensen, J.S.: Systematic design of phononic band-gap materials and structures by topology optimization, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, **361**, 1001-1019, 2003.
- 3) Brillouin, L.: Wave propagation in periodic structures, Dover Publications, Inc., 1953.
- 4) 阿部和久・笠原祐樹・紅露一寛: 半無限周期構造における表面波モード解析法, 応用力学論文集, **11**, 1031-1038, 2008.
- 5) Clouteau, D., Arnst, M., Al-Hussaini, T.M. and Degrande, G.: Freefield vibrations due to dynamic loading on a tunnel embedded in a stratified medium, *J. Sound Vib.*, **283**, 173-199, 2005.
- 6) Mead, D.J.: Free wave propagation in periodically supported, infinite beams, *J. Sound Vib.*, **11**, 181-197, 1970.
- 7) Shen, I.Y.: Vibration of rotationally periodic structures, *J. Sound Vib.*, **172**, 459-470, 1994.

(2009年4月9日 受付)