

一般座標系平面2次元流れへのコロケート格子 による非圧縮性流体の数値解析手法の適用

Application of Numerical Method for Incompressible Fluid on Collocated Grid
for Depth-averaged Flow in Generalized Coordinate System

浪平 篤*・高木強治**

Atsushi NAMIHIRA and Kyoji TAKAKI

* 正会員 農博 農村工学研究所 水源施設水理研究室 (〒305-8609 つくば市観音台2-1-6)

** 農博 農村工学研究所 水源施設水理研究室 (〒305-8609 つくば市観音台2-1-6)

The equations of strong conservation form which are derived by the coordinate transformation called chain rule and in which cartesian components are used as basic variables and generalized coordinate contravariant components as convection velocity, are adopted as the equations of motion of depth-averaged flow in a generalized coordinate system. Variables are arranged based on the collocated grid. As a result, the calculation routine used at numerical analysis for incompressible fluid in a generalized coordinate system is able to be applied. It is thought that the computational complexity and the amount of the memory decreases. The results by this method are in good agreement with the results by other acknowledged method and experimental measurements.

Key Words: *generalized coordinate, depth-averaged flow, incompressible fluid, collocated grid*

1. はじめに

一般座標系における平面2次元流れの数値解析は、近年の計算機能力の向上および数値解析技術の発展に伴い、河道の設計技術の一つとして広く認識されるようになってきている¹⁾。そして、河川における水面形やハイドログラフの推定^{2)~5)}だけでなく、河床・河道変動を推定する際の流れ場の解析^{6)~8)}においても実績が増えつつある。しかし、その基礎方程式のうち運動方程式は、デカルト座標系の場合と異なり、型式が統一されていない。適用事例が多いのは、①デカルト座標物理成分を基本変数とし、一般座標反変成分を対流速度に用いるもの^{2), 3), 9)}、②①の式の変形から得られる一般座標反変成分を基本変数とするもの^{2), 8)}、③デカルト座標系の式の変形から得られる一般座標反変成分を基本変数とするもの⁶⁾、④一般座標反変物理成分を基本変数とするもの^{4), 5)}等である。これらの式の空間的な離散化手法は多岐にわたるが、時間的な離散化手法としては大まかには陽解法が適用されているようである。

一方、時間的な離散化手法として、非圧縮性流体の数値解析手法を適用し、連続式を運動方程式における水面勾配項とカップリングさせて水深のみを陰的に扱った事例^{10)~15)}がある。このような手法は、運動方程式に含まれる残差成分を修正するので、数値的な安定性の面から

有効と考えられている¹⁴⁾。特に、隣り合う水深定義点同士の水面勾配をそれらの点の間にある流速に作用させられるデカルト座標系のようなスタガード配置を単純に行えない一般座標系で、その効果は大きいと考えられる。しかし現状では、デカルト座標系もしくは直交曲線座標系に対して適用された事例が大半であり、一般座標系への適用事例¹⁰⁾では、前述①~④のような運動方程式の型式、変数の配置法、計算手順の詳細が示されていない。

そこで本研究では、一般座標系における平面2次元流れの基礎方程式に対し、非圧縮性流体の数値解析手法を適用し、連続式を運動方程式における水面勾配項とカップリングさせて水深のみを陰的に扱う場合について、基礎方程式の型式、変数の配置法、計算手順の詳細を提示する。さらに、基本的な例題を対象として、本解析手法の再現性を検討する。

2. 数値解析手法

2.1 基礎方程式

(1) デカルト座標系

デカルト座標系における平面2次元流れの基礎方程式は、次のように表記される。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial M_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial M_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_j M_i)}{\partial x_j} = -gh \frac{\partial(z+h)}{\partial x_i} - \frac{\tau_{bi}}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \nu_i \left(\frac{\partial M_i}{\partial x_j} + \frac{\partial M_j}{\partial x_i} \right) \right\} \quad (2)$$

式(1)は連続式、式(2)は運動方程式である。繰返し添字は総和規約に従うものとし、このことは以降も共通とする。\$t\$は時間、\$x_i\$はデカルト座標(\$i=1, 2\$)、\$u_i\$は\$x_i\$軸方向の流速成分、\$M_i\$は\$x_i\$軸方向の単位幅流量、\$z\$は河床高、\$h\$は水深、\$\rho\$は水の密度、\$g\$は重力加速度、\$\tau_{bi}\$は\$x_i\$軸方向の底面摩擦応力、\$\nu_i\$は渦動粘性係数である。\$\tau_{bi}\$はManning則に基づけば次式となる。

$$\tau_{bi} = \frac{\rho g n^2 u_i \sqrt{u_j u_j}}{h^{1/3}} \quad (3)$$

ここで、\$n\$はManningの粗度係数である。\$\nu_i\$の評価式としては、様々な乱流モデルがあるが、本研究では平面2次元流れの数値解析で多くの実績(例えば2)、5)、8)、11)がある式(4)の0方程式モデルを用いることとした。

$$\nu_i = \frac{\kappa}{6} u_* h \quad (4)$$

ここで、\$\kappa\$はカルマン定数(\$\kappa=0.4\$)、\$u_*\$は摩擦速度であり、次式から得られる。

$$u_* = \sqrt{\sqrt{\frac{\tau_{bj}}{\rho}} \sqrt{\frac{\tau_{bj}}{\rho}}} \quad (5)$$

なお、合流部を有する直線水路の流れの平面2次元解析では、0方程式モデルと標準型\$k-\epsilon\$モデルとで再現性に大きな差がみられなかったことが確認されている¹⁶⁾。

(2) 一般座標系

式(1)、(2)を一般座標系へと座標変換する場合、非圧縮性流体の数値解析で多く行われているように^{17), 18)}、空間微分をchain ruleと呼ばれる式(6)、流速と単位幅流量をそれぞれ式(7)、(8)によって変換すると、デカルト座標物理成分を基本変数とし、一般座標反変成分を対流速度に用いる強保存型¹⁸⁾の式(9)、(10)が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial \xi^j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \xi^j} \quad (6)$$

$$U^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x_j} u_j \quad (7)$$

$$Q^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x_j} M_j \quad (8)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{J} \frac{\partial J Q^j}{\partial \xi^j} = 0 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_i}{\partial t} + \frac{1}{J} \frac{\partial (J U^j M_i)}{\partial \xi^j} \\ = -gh \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^j} \left\{ J \frac{\partial \xi^j}{\partial x_i} (z+h) \right\} - \frac{\tau_{bi}}{\rho} \\ + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^j} \left\{ J \frac{\partial \xi^j}{\partial x_k} \nu_i \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x_k} \frac{\partial M_i}{\partial x_l} + \frac{\partial \xi^l}{\partial x_i} \frac{\partial M_k}{\partial x_l} \right) \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、\$\xi^i\$は一般座標(\$i=1, 2\$)、\$U^i\$は\$\xi^i\$軸方向の流速の反変成分、\$Q^i\$は\$\xi^i\$軸方向の単位幅流量の反変成分である。座標変換の各係数については、次のように得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \xi}, \\ J &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (11)$$

一方、河川流れの数値解析の分野では、式(10)とは異なる型式の一般座標系の運動方程式がいくつか提案されており(表-1)、これらに基づく数値解析は多くの実績を挙げている。しかしながら、これらの式では基本変数と対流速度が同一の成分である。そのため、全ての変数を格子の中心で与えるレギュラー配置とすれば、隣り合う水深定義点同士の水面勾配をそれらの点の間にある流速もしくは単位幅流量に作用させることができず、連続式と運動方程式における水面勾配項のカップリングで得られる式は保存性が高く安定したものにならない。一方、長田²⁾のように一般座標系でのスタガード配置とすれば、適切なカップリングが可能だが、計算量と記憶容量が非常に多くなり、プログラムコードも複雑になる。さらに、表-1の各式では項の数が式(10)よりも多くなる。そこで本研究では、非圧縮性流体の数値解析で広く使用されている型式と同様に、デカルト座標物理成分を基本変数とし、一般座標反変成分を対流速度に用いる式(10)を運動方程式として用いることとした。

2.2 一般座標系における非圧縮性流体の数値解析手法の適用

式(9)、(10)に基づく一般座標系の平面2次元流れに非圧縮性流体の数値解析手法を適用し、連続式を運動方程式における水面勾配項とカップリングさせる。

まず変数の配置については、一般座標系における非圧縮性流体の数値解析では、流速の一般座標反変成分を格子の界面で、他の全ての変数を格子の中心で与えるコロケート格子とすることが一般的である^{17), 18)}。そこで本研究もこれに倣った(図-1)。その際、非圧縮性流体の数値解析では使用されない変数のうち単幅流量の一般座標反変成分については格子の界面で、他の全てについては格子の中心で与えた。

次にカップリング手法については、デカルト座標系における非圧縮性流体の数値解析ではSMAC法¹⁹⁾や

表-1 河川流れの数値解析で適用事例の多い一般座標系における平面2次元流れの運動方程式

基本変数と 対流速度	導出方法	変数配置	代表的な 適用事例
ともに一般 座標反変成分	$i=1$ の式: $\{i=1\text{の式}(9) \times \partial \xi^1 / \partial x_1\} + \{i=2\text{の式}(9) \times \partial \xi^1 / \partial x_2\}$ $i=2$ の式: $\{i=1\text{の式}(9) \times \partial \xi^2 / \partial x_1\} + \{i=2\text{の式}(9) \times \partial \xi^2 / \partial x_2\}$ ※ 空間微分は式(6)によって変換され、一般座標反変成分は式(7)と式(8)から求められる	z と h は格子の中心 Q^i は格子の界面 その他は格子の角	長田 ²⁾ 竹林 ⁸⁾
ともに一般 座標反変成分	$i=1$ の式: $\{i=1\text{の式}(2) \times \partial \xi^1 / \partial x_1\} + \{i=2\text{の式}(2) \times \partial \xi^1 / \partial x_2\}$ $i=2$ の式: $\{i=1\text{の式}(2) \times \partial \xi^2 / \partial x_1\} + \{i=2\text{の式}(2) \times \partial \xi^2 / \partial x_2\}$ ※ 空間微分は式(6)によって変換され、一般座標反変成分は式(7)から求められる(Q^i は使用されず)	不明	伊東・清水 ⁶⁾
ともに一般 座標反変物理成分	$i=1$ の式: $\{i=1\text{の式}(2) \times \partial \tilde{\xi}^1 / \partial x_1\} + \{i=2\text{の式}(2) \times \partial \tilde{\xi}^1 / \partial x_2\}$ $i=2$ の式: $\{i=1\text{の式}(2) \times \partial \tilde{\xi}^2 / \partial x_1\} + \{i=2\text{の式}(2) \times \partial \tilde{\xi}^2 / \partial x_2\}$ ※ $\partial \tilde{\xi}^i / \partial x_j$ は $\partial \xi^i / \partial x_j$ を無次元化して単位長さとしたものであり、空間微分は式(6)において ξ^i を $\tilde{\xi}^i$ に置き換えた式によって変換され、一般座標反変物理成分は式(7)において ξ^i を $\tilde{\xi}^i$ に置き換えた式から求められる(単位幅流量の反変物理成分は使用されず)	不明	渡邊ら ⁴⁾ 福岡ら ⁵⁾

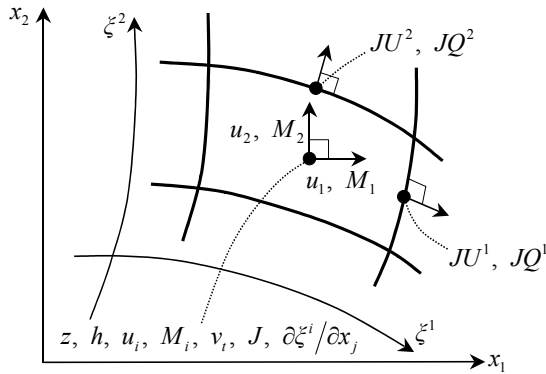


図-1 格子における変数の配置

HSMAC法²⁰⁾を適用した事例が多いが、一般座標系の場合は部分段階法が比較的多く用いられる^{21), 22)}ため、これを採用した。具体的な計算手順は以下になる。

まず、現在の時間ステップを N とし、水面勾配項を除いた式(10)から、 M_i^{N+1} の推定値 M_i^* を求める(式(12))。

$$M_i^* = M_i^N + \Delta t \left[-\frac{1}{J} \frac{\partial (JU^{jN} M_i^N)}{\partial \xi^j} + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^j} \left\{ J \frac{\partial \xi^j}{\partial x_k} v_i^N \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x_k} \frac{\partial M_i^N}{\partial x_i} + \frac{\partial \xi^i}{\partial x_i} \frac{\partial M_k^N}{\partial x_i} \right) \right\} - \frac{\tau_{bi}^N}{\rho} \right] \quad (12)$$

ここで、 Δt は計算時間刻みである。次に、 M_i^* を式(8)に基づいて座標変換して格子の中心における単位幅流量の反変成分を求め、これに J を乗じてからセル界面で補間し、さらに、式(10)の水面勾配項を式(6)に基づいて座標変換したものを付加して、格子の界面における単位幅流量の反変成分 JQ^{iN+1} の推定値 JQ^{i*} を求める(式(13))。

$$JQ^{i*} = J \frac{\partial \xi^i}{\partial x_j} M_j^* - \Delta t gh^N J \frac{\partial \xi^i}{\partial x_i} \frac{\partial \xi^j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \xi^j} (z + h^N) \quad (13)$$

ここで、 $^{-i}$ は ξ^i 軸方向の補間である。

JQ^{iN+1} は、水深の変化分 ψ (式(14))の勾配を式(6)に基づいて座標変換したものを、 JQ^{i*} に付加すれば得られるとする(式(15))。

$$\psi = h^{N+1} - h^N \quad (14)$$

$$JQ^{iN+1} = JQ^{i*} - \Delta t gh^N J \frac{\partial \xi^i}{\partial x_i} \frac{\partial \xi^j}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial \xi^j} \quad (15)$$

式(15)を連続式(式(9))に代入すれば、 ψ に関するPoisson方程式(式(16))が導かれる。

$$\frac{\psi}{\Delta t} + \frac{1}{J} \frac{\partial JQ^{i*}}{\partial \xi^j} = \frac{\partial}{\partial \xi^j} \left(\Delta t gh^N J \frac{\partial \xi^j}{\partial x_i} \frac{\partial \xi^k}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial \xi^k} \right) \quad (16)$$

この式(16)を解けば、 ψ が求められる。なお、非圧縮性流体の数値解析の場合は本式の左辺第一項に相当する項は含まれないが、この項は同じく ψ に関する項からなる右辺と一緒に扱うことができるので、本式を解く上でこの項の存在は問題にならない。 h^{N+1} については、式(14)を変形した $h^{N+1} = h^N + \psi$ から得ることは可能だが、この方法では保全性が厳密には満たされないとの指摘¹⁴⁾があるため、デカルト座標系の平面2次元流れに非圧縮性流体の数値解析手法を適用した事例¹⁴⁾と同様に、連続式(式(9))から求めることとした(式(17))。

$$h^{N+1} = h^N - \Delta t \frac{1}{J} \frac{\partial JQ^{jN+1}}{\partial \xi^j} \quad (17)$$

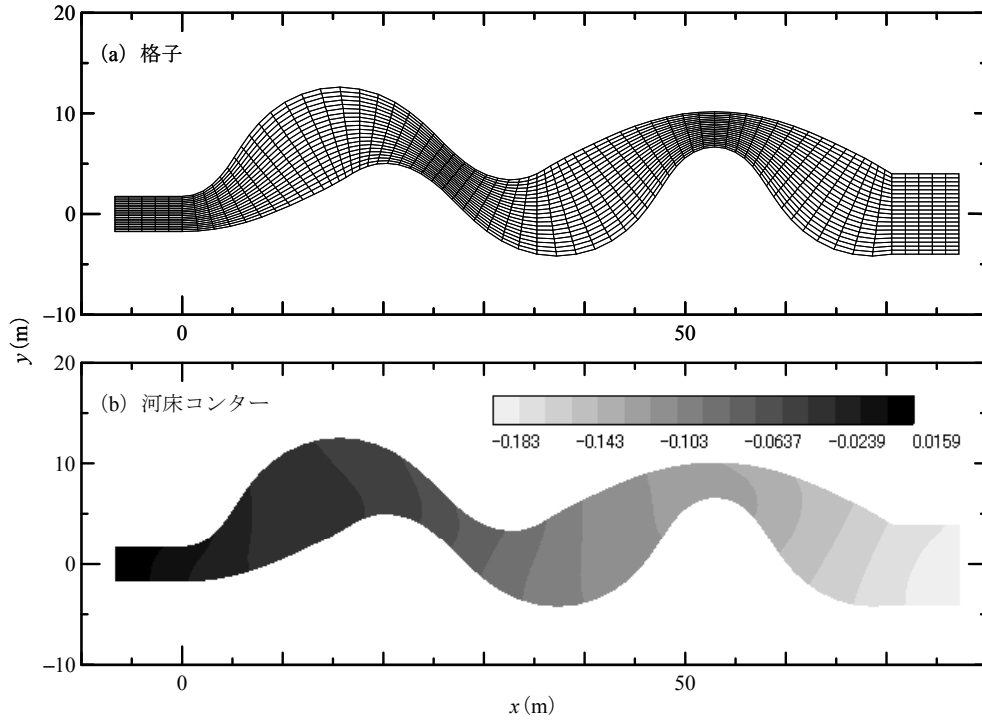


図-2 模擬河川の格子と河床コンター²⁵⁾

ここで、 $JQ^{i^{N+1}}$ は式(15)から得られる。また、 M_i^{N+1} については式(12)で計算しなかった水面勾配項を M_i^* に加えることによって(式(18))、 u_i^{N+1} については M_i^{N+1} を h^{N+1} で除すことによって(式(19))、得られる。

$$M_i^{N+1} = M_i^* - \Delta t g h^N \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^j} \left\{ J \frac{\partial \xi^j}{\partial x_i} (z + h^{N+1}) \right\} \quad (18)$$

$$u_i^{N+1} = \frac{M_i^{N+1}}{h^{N+1}} \quad (19)$$

$JU^{i^{N+1}}$ については、 u_i^{N+1} を式(7)に基づいて座標変換して格子の中心における流速の反変成分を求め、これに J を乗じてから格子の界面で補間することによって、算出する(式(20))。

$$JU^{i^{N+1}} = J \frac{\partial \xi^i}{\partial x_j} \overline{u_j^{N+1}} \quad (20)$$

このように、デカルト座標物理成分を基本変数とし、一般座標反変成分を対流速度に用いる式(9)、(10)に基づき、各変数をコロケート格子によって配置することによって、一般座標系の非圧縮性流体の数値解析で多く用いられている計算手順¹⁸⁾をほぼそのまま適用できる。

2.3 その他の数値解析手法

時間的な離散化手法は2.2の各式で示したように基本的にはオイラー陽解法としたが、式(12)のみ2段階のRunge-Kutta法¹⁸⁾(修正オイラー法¹⁷⁾)を適用した。空間的な離散化手法としては、跳水等の水位の不連続部での数値振動を抑制するため運動方程式における対流項には

TVD-MUSCL法²³⁾を適用した。その他の項には2次精度中心差分を用いた。なお、TVDスキームは本来、基礎方程式全体をベクトル型式に書き換え、このベクトル方程式に対して適用されるものであるが、本研究ではそのようにしていない。式(16)のPoisson方程式の解法には、収束性および安定性に優れた前処理付BiCGStab法²⁴⁾を用いた。

3. 模擬河川における流れへの適用結果

3.1 解析の対象

土木学会水工学委員会基礎水理部会河床変動計算法研究グループが河川流れの数値解析モデルの比較検討²⁵⁾を行った、sin-generated curveに幅を適当に変化させた模擬河川における流れに対して、2.の数値解析手法を適用する。模擬河川の格子と河床コンターを図-2に示す。

3.2 初期条件および境界条件

3.1で述べた比較検討のために指定されている条件は、上流からの供給流量 $0.1\text{m}^3/\text{s}$ 、Manningの粗度係数0.01、計算時間刻み 0.01s である²⁵⁾。

本研究では、初期条件として、水面勾配が河床(図-2(b))の平均勾配と並行となるように、かつ、下流端では水位が後述の境界条件と等しくなるように、水深の初期値を設定した。流速および単位幅流量の初期値については、全ての位置でゼロとした。

境界条件としては、下流端では、水位を -0.145m で一定とするとともに、流量の勾配がゼロとなるように流速お

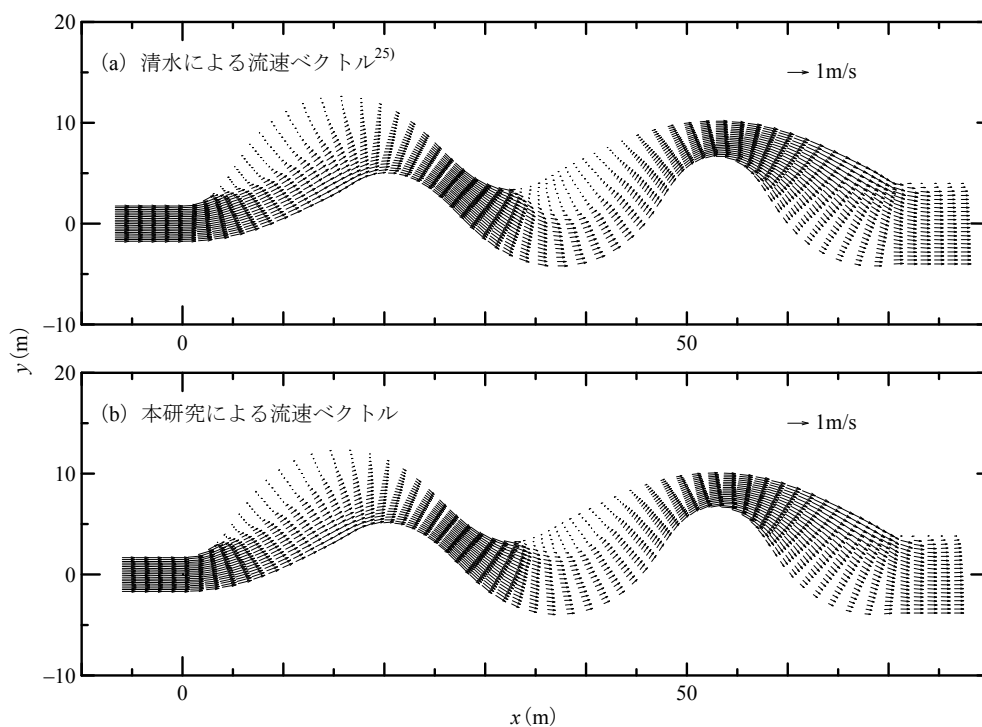


図-3 流速ベクトルの解析結果

よび単位幅流量を設定した。上流端では、水面勾配が直下流の格子間のものと等しくなるように水深を設定するとともに、流量が初期値のゼロから前述の所定値まで180s間で直線的に増加するように、流速および単位幅流量を調整した。側壁では、すべりなし境界条件とした。

流況は解析開始から600sでほぼ定常になったが、さらにその600s後に終了させた。以降では、解析終了時の流速ベクトルおよび水面形状を解析結果として用いる。

3.3 解析結果と考察

流速ベクトルの解析結果を図-3に、水面形状の解析結果を図-4に示す。これらの図では、3.1で述べた比較検討において他の手法による解析結果とほぼ同様の流況が得られており、代表的と考えられる清水によるもの²⁵⁾を比較のため掲載した。但し、図-3では清水による流速ベクトルは格子の角の値であるのに対し、本研究では格子の中心の値である。また、図-4では清水による水面形状は横断方向中央の格子線(以下、中央線という)に含まれる格子の角の値であり、本研究では中央線の両側にある格子の中央の値を中央線上に補間している。

図-3および図-4より、本研究による解析結果は、清水によるもの²⁵⁾と比較して、渦の生じる位置やその規模、水面形状の変曲点、水深のピークの位置やその値等がほぼ等しい。よって、2.の数値解析手法は、河川流れの数値解析で現在広く使われている基礎方程式(表-1)に基づく手法とほぼ同様の再現性を有すると考えられる。

さらに本手法は、連続式を運動方程式における水面勾配項とカップリングさせて水深のみを陰的に扱うことに

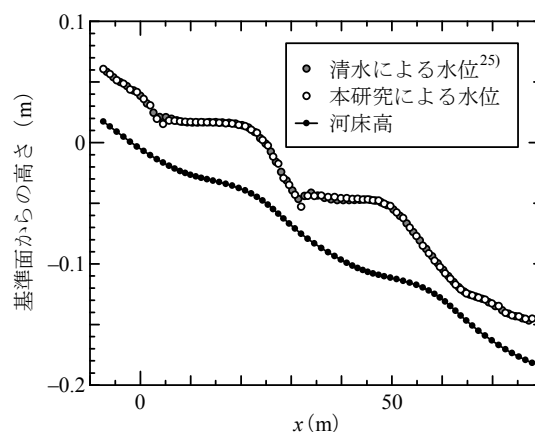


図-4 中央縦断面の水面形状の解析結果

より、運動方程式に含まれる残差成分を修正するので、数値的な安定性も高くなる。また、Poisson方程式を解くために反復計算が必要であるものの、コロケート格子に基づいて変数を配置しているため、計算量や記憶容量が少なくなり、プログラムコードも単純になる。そのため、一般座標系における平面2次元流れに対する数値解析手法として有効と考えられる。但し、実河川を対象とする場合は、実際境界条件と呼ばれる水域と陸域との境界における処理方法が必要となるので、今後の検討が必要である。なお、本手法の保存性については、次章4.にて検討する。

4. 連続湾曲水路における流れへの適用結果

4.1 解析の対象

玉井ら²⁶⁾が模型実験を行った連続湾曲水路における流れに対して、2.の数値解析手法を適用する。この水路は互いに反転する中心角 $\pi/2$ の円弧が10個連続したものであり、その諸元および実験条件は表-2の通りである。本研究では、この水路のうち図-5に示す円弧2個分の区間を対象とし、同図のように格子分割した。

なお、我が国の主要河川では低水路幅/低水路深さが10~100、蛇行度(低水路の延長距離/低水路の蛇行波長)が1.01~1.35である²⁷⁾のに対し、この実験水路を実河川の低水路と想定すると、その流れは前者が10程度、後者が1.25程度で、水深と蛇行度が大きい。しかし、農業用取水堰はこのような条件に近い河川の比較的上流側の湾曲部に設置されることが多く、また、堰の設置や改修にあたりその周辺の水面形や河床・河道変動の推定を行う必要があることから、この実験を解析の対象とした。

4.2 初期条件および境界条件

初期条件として、全ての位置で表-2の平均水深を与え、流速および単位幅流量の初期値をゼロとした。上下流端では、周期境界条件を設定した。底面のManningの粗度係数 n は、モルタル仕上げの模型では0.010~0.014²⁸⁾であることから、この範囲内で解析結果と実験結果の差が小さくなるように試行錯誤で定めたところ、0.012となった。

側壁では、すべり境界条件とすると、実験結果²⁶⁾に見られるような側壁近傍における主流速の低下が十分に現れず、すべりなし境界条件とすると、この現象が実験結果²⁶⁾よりも極端となり、いずれの場合も側壁近傍での再現性が低くなった。これは、側壁近傍で格子密度が不足していることが原因と考えられる。しかしながら、河川流れ等に適用する平面2次元流れの数値解析において、これ以上に格子を密にすることは実用的でないと考えられる。そこで、ニュートンの粘性則の考え方とManning則に基づく底面摩擦応力(式(3))を利用して、側壁では以下のような速度勾配を与えることとした。

$$\frac{\tau_{wall}}{\rho} = \nu_t \frac{\Delta u_{wall}}{\Delta y_{wall}} \quad (21)$$

$$\tau_{wall} = \frac{\rho g n_{side}^2 u_{wall} \sqrt{u_{wall} u_{wall}}}{\Delta y_{wall}^{1/3}} \quad (22)$$

ここで、 u_{wall} は側壁に最も近い流速点における側壁と平行な流速成分、 Δy_{wall} は側壁とそれに最も近い流速点との距離、 Δu_{wall} は側壁とそれに最も近い流速点との u_{wall} の差、 n_{side} は側壁のManningの粗度係数である。 n_{side} については、塩化ビニールと粗度係数が同等と考えられ、模型実験で比較的多く用いられるアクリル板では0.008~0.009²⁸⁾であることから、この範囲内で解析結果と実験結

表-2 連続湾曲水路の諸元と実験条件²⁶⁾

水路幅	0.3 m
水路中心軸の曲率半径	0.6 m
円弧の中心角	$\pi/2$
円弧間の直線区間の流下方向長さ	0.3 m
水路勾配	1/1000
水路底面の材質	モルタル
水路側壁の材質	塩化ビニール
流量	$1.96 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$
平均水深	0.0293 m

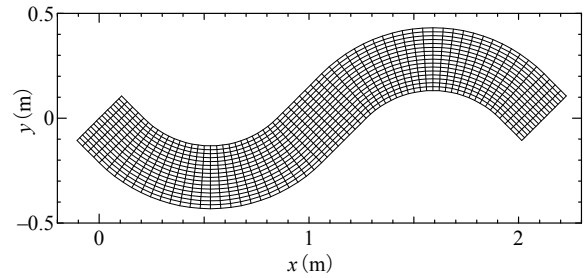


図-5 連続湾曲水路²⁶⁾のうち解析対象区間の格子

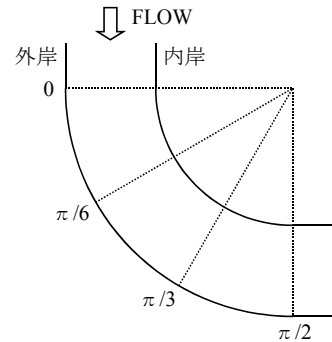


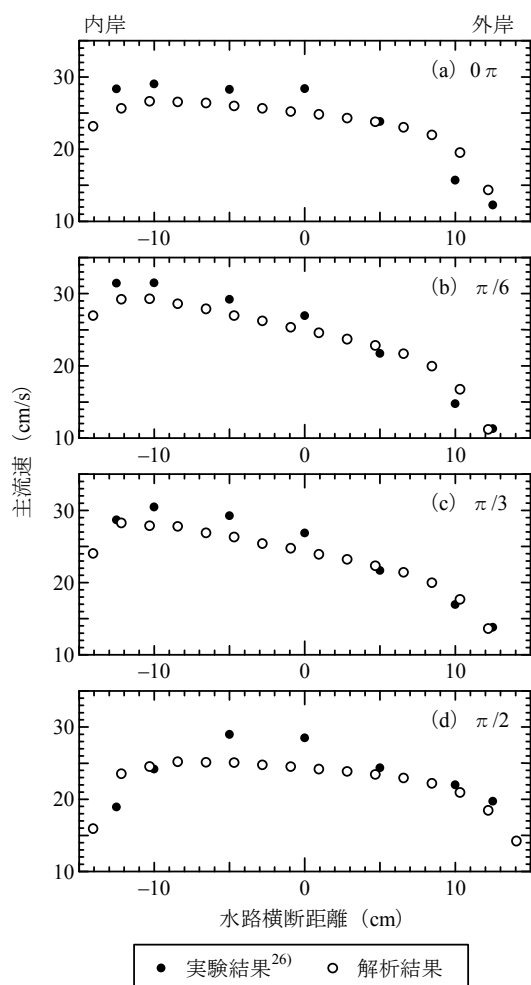
図-6 円弧区間のうち解析結果を比較する位相断面

果の差が小さくなるように試行錯誤で定めたところ、0.009となった。なお、前述の n の値は、この n_{side} と一体的に定めたものである。

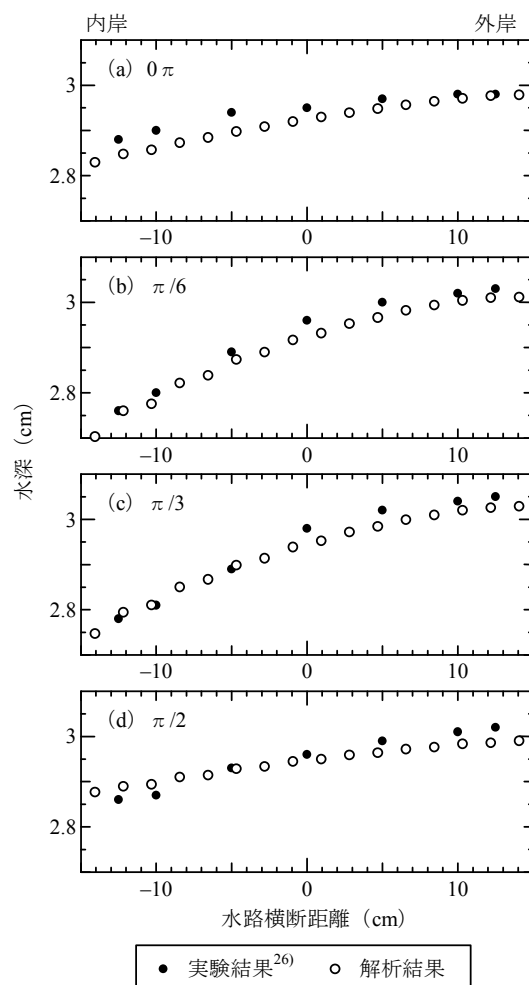
流況は解析開始から150sでほぼ定常になったが、さらにその150s後に終了させた。以降では、解析終了時の流速ベクトルおよび水面形状を解析結果として用いる。また、このときの解析結果は、玉井ら²⁶⁾に倣い、各円弧区間のうち図-6に示す位相断面毎に、内岸と外岸の関係を考慮して平均したものとする。すなわち、玉井ら²⁶⁾は10断面の平均値、本研究では2断面の平均値となる。

4.3 解析結果と考察

水路横断方向における主流速の分布および水面形状が流下方向でどのように変化するかを示した解析結果が、それぞれ図-7、図-8である。これらの図では、玉井らによる実験結果²⁶⁾も比較のため掲載した。なお、図-5の解析対象区間内の水の体積の保存性については、初期



図ー7 水路横断方向の主流速分布の流下方向変化



図ー8 水路横断方向の水面形の流下方向変化

値に対する相対誤差で評価すると、流況がほぼ定常となった150s以降は常に $10^{-12}\%$ 未満であった。

図ー7より、実験結果と比較してピーク値付近では小さく、逆にその周囲では大きくなっており、全体的に分布が平滑化されている。しかし、位相 $\pi/6$ と $\pi/3$ の断面では位相 0π と $\pi/2$ の断面よりもピークが内岸側で現れ、その形状はより尖っていること等を、解析結果は良好に再現している。

図ー8より、水面形状についても、主流速と同様、実験結果よりも分布が若干平滑化されているものの、内岸から外岸にかけて水深が高くなり、特に位相 $\pi/6$ と $\pi/3$ の断面では位相 0π と $\pi/2$ の断面よりもその傾向が強いこと等を、解析結果は良好に再現している。

以上より、本研究の手法は平面2次元流れの数値解析であるものの、実河川の範囲ではかなり水深と蛇行度が大きい流れも良好に再現できる。但し、主流速分布と水面形の分布が平滑化される等の相違が生じ、当然ながらその適用には限界もある。このような場合には2次流の影響を考慮した項の付加が有効との報告²⁹⁾があるので、今後はそれを導入してその効果を検証したい。

5. 結論

本研究では、一般座標系における平面2次元流れの基礎方程式に対し、非圧縮性流体の数値解析手法を適用し、連続式を運動方程式における水面勾配項とカップリングさせて水深のみを陰的に扱う場合について、基礎方程式の型式、変数の配置法、計算手順の詳細を提示した。さらに、基本的な例題を対象として再現性を検討した。得られた主な結果は以下の通りである。

- (1) 運動方程式には、デカルト座標系の式における空間微分をchain ruleによって座標変換することによって得られる、デカルト座標物理成分を基本変数とし、一般座標反変成分を対流速度に用いる強保存型の式を採用する。
- (2) 変数の配置としては、コロケート格子に倣い、流速および単幅流量の一般座標反変成分を格子の界面で、他の全ての変数を格子の中心で与える。
- (3) (1), (2)のようにすれば、連続式を運動方程式における水面勾配項とカップリングさせて水深のみを陰

的に扱うことができるため、数値的な安定性が高くなる。さらに、計算量や記憶容量が簡素化され、プログラムコードも単純になる。

- (4) 運動方程式における対流項にはTVD-MUSCL法、水深の変化分に関するPoisson方程式の解法には前処理付BiCGStab法を適用することにより、蛇行しながら幅が変化する水路や連続湾曲水路における流れを良好に再現できる。
- (5) 今後の課題として、水際境界条件の処理方法を取り入れる必要がある。また、2次流の影響を考慮した項の付加を検討する必要がある。

参考文献

- 1) 日本河川協会編：改訂新版 建設省河川砂防技術基準(案) 同解説 調査編, 山海堂, pp.148-151, 1997.
- 2) 長田信寿：一般座標系を用いた平面2次元非定常流れの数値解析, 水工学における計算機利用の講習会講義集, 土木学会水理委員会基礎水理部会, pp.61-76, 1999.
- 3) 前野詩朗：百間川の洪水流解析による二ノ荒手の保存の検討, 水工学論文集, 44, pp.353-358, 2000.
- 4) 渡邊明英, 福岡捷二, Alex G. M., 太田勝：複断面蛇行河道におけるハイドログラフの変形と河道内貯留の非定常2次元解析, 水工学論文集, 46, pp.427-432, 2002.
- 5) 福岡捷二, 渡邊明英, 原俊彦, 秋山正人：水面形の時間変化と非定常2次元解析を用いた洪水流量ハイドログラフと貯留量の高精度計算, 土木学会論文集, 761, II -67, pp.45-56, 2004.
- 6) 伊東祐一郎, 清水康行：浮遊砂混在平面2次元一般座標モデルと石狩川模型実験の再現計算によるその検証, 水工学論文集, 47, pp.661-666, 2003.
- 7) 福岡捷二, 海野修司, 成田一郎, 辰野剛志, 西本直史：多摩川二ヶ領宿河原堰の改築による堆積土砂の移動, 水工学論文集, 48, pp.1081-1086, 2004.
- 8) 竹林洋史：沖積河川の地形予測技術と治水対策への利用, 2005年度(第41回)水工学に関する夏期研修会講義集Aコース, pp.A-6-1-A-6-17, 2005.
- 9) 清水康行, 山下恭正, 山下彰司, 崇田徳彦：一般座標系を用いた常・射流混在流れの計算, 開発土木研究所月報, pp.18-33, 1991.
- 10) 中山恵介, 佐藤圭洋, 堀川康志：CIP法を用いた浅水流方程式の数値計算手法の開発, 水工学論文集, 42, pp.1159-1164, 1998.
- 11) 横山洋, 清水康行：CIP法を用いた急勾配複断面蛇行水路の数値計算, 水工学論文集, 45, pp.601-606, 2001.
- 12) 川崎 浩司, 小野 稔和, Napaporn PIAMSA-NGA, 熱田浩史, 中辻 啓二：CIP法とSMAC法に基づく平面2次元汜濫流モデルの構築, 水工学論文集, 48, pp.565-570, 2004.
- 13) 内田龍彦, 河原能久：任意の境界形状を有する二次元浅水流の高精度解析手法の開発, 水工学論文集, 50, pp.799-804, 2006.
- 14) 牛島省, 山下英夫, 藤岡奨, 棚津家久：コロケート格子状の非圧縮性流体計算法に基づく浅水流方程式の数値解法, 水工学論文集, 50, pp.775-780, 2006.
- 15) 牛島省, 福谷彰, 藤岡奨, 棚津家久：非圧縮性流体計算法(MACS)を用いた浅水流方程式による常射流の数値計算, 水工学論文集, 51, pp.811-816, 2007.
- 16) 舩甚甲介, 清水康行：河川合流点を含む流れに関する研究, 水工学論文集, 49, pp.529-534, 2005.
- 17) 越塚誠一：数値流体力学, 培風館, 1997.
- 18) 梶島岳夫：乱流の数値シミュレーション, 養賢堂, 1999.
- 19) Amsden A. A., Harlow F. H. : A simplified MAC Technique for Incompressible Fluid Flow Calculations, *Journal of computational physics*, Vol.6, pp.322-325, 1970.
- 20) Hirt C. W., Cook J. L. : Calculating three-dimensional flows around structures and over rough terrain, *Journal of computational physics*, Vol.10, pp.324-340, 1972.
- 21) 小垣哲也, 小林敏雄, 谷口伸行：非圧縮性乱流数値解析に適した一般座標系差分スキーム(第1報, 座標変換後の基礎方程式の解析的保存特性と適切な差分スキームの一般座標への拡張), 日本機械学会論文集(B編), 65(633), pp.55-63, 1999.
- 22) 横嶋哲, 中山昭彦：DNS及びLESのための一般座標系コロケート格子を用いた差分法の開発と検証, 水工学論文集, 45, pp.565-570, 2001.
- 23) 藤井孝蔵：流体力学の数値計算法, 東京大学出版会, 1994.
- 24) 小国力 編著：行列計算ソフトウェア, 丸善株式会社, 1991.
- 25) <http://ws3-er.eng.hokudai.ac.jp/yasu/hendou/index.htm>
- 26) 玉井信行, 池内幸司, 山崎晶：連続わん曲水路における流れの実験的研究, 土木学会論文集, 331, pp.83-94, 1983.
- 27) 福岡捷二：洪水の水理と河道の設計法, 森北出版, 2005.
- 28) 須賀堯三：水理模型実験, 山海堂, 1990.
- 29) 細田尚, 長田信寿, 岩田通明, 木村一郎：一般座標系での主流と2次の遅れを考慮した平面2次元流モデル, 水工学論文集, 44, pp.587-592, 2000.

(2009年4月9日受付)