

弾性波伝播問題に対する粒子法の適用性

Applicability of meshfree particle method to elastic wave propagation analysis

岩本 哲也*・小野 祐輔**
Tetsuya IWAMOTO, Yusuke ONO

*京都大学大学院修士課程学生 工学研究科都市社会工学専攻 (〒615-8540 京都市西京区京都大学桂)

**京都大学大学院助教 工学研究科都市社会工学専攻 (〒615-8540 京都市西京区京都大学桂)

In this paper, applicability of meshfree particle methods, to elastic wave propagation were discussed. We addressed Smoothed Particle Hydro dynamics (SPH), Corrective SPH (CSPH) and Moving Particle Semi-implicit Method (MPS). First, we focused on the boundary treatment and showed that free or rigid boundary conditions were well satisfied by giving boundary value directly to boundary particles though deficiency of particles were expected to decrease accuracy. Second, we investigated the effect of particle spacing and found that to accomplish same accuracy as the finite difference method (FDM), particle spacing of the CSPH and MPS must be two-third of the FDM. Third, we confirmed numerically that the CSPH method is stable to the disturbance of the particle arrangement compared to the SPH and MPS method.

Key Words : meshfree particle method, SPH, MPS, elastic wave propagation

1. 序論

今現在、地震時の地盤や土構造物の挙動を予測する解析手法においては有限要素法(FEM)が主流である。有限要素法は高い精度を誇る一方で、メッシュに依存した解析手法であるがゆえに、メッシュが壊れてしまうほどの大変形解析を扱うことができないという制約も内包している。

こうした背景を受け、近年では土構造物の地震時挙動解析に粒子法を用いる試みが見受けられている。粒子法は大変形解析に適用性が高い一方で、境界の定義が曖昧で、粒子が不足する自由境界付近で誤差が大きくなるという欠点を抱えている。そこで、本研究では粒子法である SPH 法や MPS 法を基本的な弾性波伝播問題に適用することで、境界条件を含む様々な計算精度の検証を行う。

SPH 法とは粒子法の一つで、元来圧縮性流体の数値解析手法として宇宙物理学における星雲の衝突や分裂などを解析する手法として Lucy や Gingold and Monaghan によって提案された^{1,2)}が、メッシュの作成が不要で大変形解析に適正が高いというメリットを有するため、近年では自由表面流れといった非圧縮性流れ^{3,4,5)}や弾性体^{6,7)}、このほか地盤工学の分野^{8,9)}にも応用されている。

他方 MPS 法¹⁰⁾とは SPH 法同様粒子法であり、元々非圧縮性流れの解析のために開発された手法である。MPS 法では水柱の崩壊や砕波が計算されており、自由表面の大変形のみならず、流体の分裂や合体に対しても適用できることが示されている。SPH 法同様

MPS 法も流体解析のみならず構造解析にも適用されている¹¹⁾。

2. 粒子法の概要と波動方程式の離散化

2.1 SPH

SPH 法では位置 x での物理量 $f(x)$ をカーネル近似と呼ばれる近似手法によって評価する。関数 $f(x)$ の近似 $\langle f(x) \rangle$ は次式によって表される。

$$\langle f(x) \rangle = \int f(x') W(x-x', h) dx' \quad (1)$$

ここで $W(x-x', h)$ はカーネル関数と呼ばれ以下の性質を満たす。

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(x-x', h) dx' = \delta(x-x') \quad (2)$$

$$\int W(x-x', h) dx' = 1 \quad (3)$$

ここで、 $\delta(x)$ はディラックのデルタ関数である。

対象とする媒質を N 個の微小な要素に分割し、各要素の質量を $m_1, m_2, \dots, m_N$ 、重心位置を $x_1, x_2, \dots, x_N$ 、密度を $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N$ とし、

体積 $dx' = \frac{m_j}{\rho_j}$ として式 (1) を離散化すると関数 $f(x)$ の離散化したカーネル近似が次式のよう

に得られる。

$$\langle f(x) \rangle = \sum_{j=1}^N f(x_j) W(x-x_j, h) \frac{m_j}{\rho_j} \quad (4)$$

物理量が(4)式に従うという事は、対象粒子の物理量が平滑化関数によって表される分布をもって周囲に空間的に広がっているとみなせる。

また、(4)式は全要素の足し合わせを意味しているが、一般的にはカーネル関数 $W(x, h)$ として、距離 h 内にある粒子のみの影響を考慮する。この意味で h は影響半径と呼ばれる。

2.2 CSPH と MSPH

CSPH 法¹²⁾とは SPH 近似式をテーラー展開することにより高次精度の計算を行う手法である。(1)式の粒子 i 周りのテーラー展開は以下の式で表される。

$$\begin{aligned} \int f(x) W dx = & f_i \int W dV \\ & + f_{\alpha i} \int (x^\alpha - x_i^\alpha) W dV \\ & + \frac{f_{\alpha\beta i}}{2!} \int (x^\alpha - x_i^\alpha)(x^\beta - x_i^\beta) W dV \\ & + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{ここで } f_{\alpha i} = \frac{\partial f_i}{\partial x^\alpha}, f_{\alpha\beta i} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$$

$(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$ である。CSPH 法において一回微分である $f_{\alpha i}$ は式(5)の右辺第三項目以降を無視した以下の式を解くことで得られる。

$$f_{\alpha i} \int (x^\alpha - x_i^\alpha) W_\beta dV = \int (f - f_i) W_\beta dV \quad (6)$$

$$\text{ここで } W_\beta = \frac{\partial W_i}{\partial x^\beta} \text{ である。一次元問題の場合は}$$

上式の左辺を右辺に移項するだけで解が得られるが、二次元問題の場合は式を連立させて解く必要がある。

また MSPH 法¹³⁾は式の右辺の任意の第 n 項まで考慮して解を得る手法であり、本論文では CSPH 法よりもひとつ項が多い第三項まで採用し、第四項以降は無視した。

2.3 MPS

MPS 法¹⁴⁾では以下の式で表される重み関数 w を導入して離散化を行っている。

$$w(r) = \begin{cases} \frac{r_e}{r} - 1 & (0 \leq r < r_e) \\ 0 & (r \leq r_e) \end{cases} \quad (7)$$

ここで r は粒子間距離である。上式の重み関数によって、粒子間距離がパラメータ r_e より短い場合のみ粒子間で相互作用が生じる。このパラメータ

r_e は計算時間と安定性のバランスから粒子間距離の 2~4 倍としている。これらのパラメータはそれぞれ SPH 法におけるカーネル関数と影響半径に相当する。本論文ではパラメータ r_e も SPH 法に習い影響半径と呼ぶことにする。

次に対象粒子 i およびその近傍の粒子 j の位置ベクトルをそれぞれ r_i, r_j とする。以下の式で表される対象粒子 i の重み関数の和をとったものを粒子数密度と呼ぶ。

$$n_i = \sum_{j \neq i} w(|r_j - r_i|) \quad (8)$$

MPS 法の重み関数は $r=0$ で $w=\infty$ となるので対象粒子 i の計算は行わない。

MPS 法では、対象粒子 i の位置における勾配ベクトルに対して次式でモデル化する。

$$\begin{aligned} \langle \nabla \phi_i \rangle = & \frac{\dim}{n^0} \sum_{j \neq i} \left[\frac{\phi_j - \phi_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^2} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) w(|r_j - r_i|) \right] \end{aligned} \quad (9)$$

ここでは ϕ 物理量を表し、 r は位置ベクトルを表している。 $\dim$ は次元数を表している。本論文ではより厳密な計算をするため初期状態の粒子密度 n^0 ではなく、対象粒子 i の粒子密度 n_i を用いた。

2.4 波動方程式の離散化

一次元波動方程式は以下の式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial t} &= \mu \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \\ \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial x} \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 τ は応力、 $\dot{u}$ は粒子速度、 μ は弾性係数、 ρ は密度である。応力と粒子速度の時間積分には粒子法には蛙飛び法⁴⁾を、差分法にはオイラー法を用いる。積分時間間隔 dt は安定した解を得ることのできるよう、波動伝播速度 $c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ と格子間隔、および粒子間隔 dx に対して、クーラン条件 $\frac{dx}{dt} > c$ 満たす十分に小さな値を用いた。また同様に応力と粒子速度の空間微分には各解析手法による近似式を用いるものとする。

次に二次元波動方程式に関して述べる。本論文では面外振動問題 (SH 波) のみ扱う。面外方向の座標軸を Y とすると以下のように定式化される。

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} + \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \right)_{=0} \\ \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right)_{=0} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\frac{\partial \dot{v}}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(\left(\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right)_{=0} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right)$$

ここで $\dot{u}$, $\dot{v}$, $\dot{w}$ はそれぞれ X 方向, Y 方向, Z 方向の粒子速度を表している. なお時間積分および速度と応力の空間微分の方法は一次元と同様である.

3. 一次元弾性波の解析

3.1 SPH 法による一次元弾性波の解析

(1) 解析条件

解析モデルを図-3 に示す. また解析パラメータは以下の表-1 に従う. 境界条件に関しては, 固定境界上の粒子の速度を 0, 自由境界上の粒子の応力を 0 とする単純な形で導入した. 速度 f を左端から 0.1 秒間入力し, SPH 法固有のパラメータである影響半径 h の値を粒子間距離 dx の 2.6 倍, 2.9 倍, 3.2 倍と変化させて 3 パターンの解析を行った.

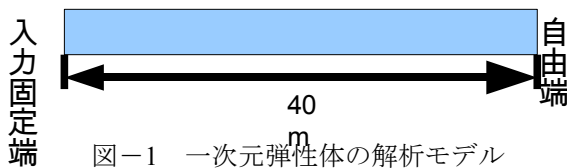


図-1 一次元弾性体の解析モデル

表-1 解析パラメータの諸元

弾性体の長さ: l	40(m)
弾性体の密度: ρ	$2.0 \times 10^3 (kg/m^3)$
弾性係数: μ	$2.0 \times 10^7 (N/m^2)$
入力速度: f	$\sin(\pi/0.1 t) (m/sec)$

粒子間隔: dx	$5.0 \times 10^{-2} (m)$
影響半径: h	2.6dx, 2.9dx, 3.2dx (m)
積分時間間隔: dt	$1.0 \times 10^{-4} (sec)$
解析時間: t	1.2(sec)

(2) 解析結果

解析開始後 0.3 秒経過した段階での波動伝播の比較を以下の図-2 に示す.

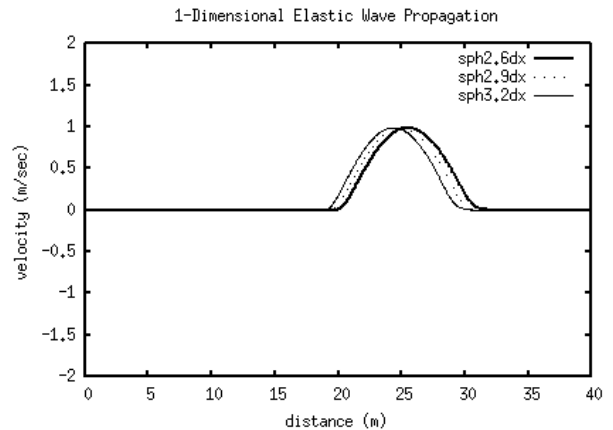


図-2 波動伝播の比較

図-2 より同じ粒子間隔であっても影響半径によって波動伝播速度が変化していることがわかる. 本ケースの他にも粒子の大きさを小さくし, 粒子数を増加させ解析を行ったが同様に影響半径によって波動の伝播速度が異なるという結果が得られた. またカーネル関数を Gauss kernel¹¹⁾ や Quintic kernel¹¹⁾ に変更しても, 同様の問題が見受けられた. 本ケースにおける波動伝播速度の理論値が 100 (m/sec) であることを考慮すると, 影響半径が粒子間隔の 2.9 倍程度の際に精度が高いことがわかった. SPH 法では一般的にカーネル関数の積分値が 1 に近い程精度が良い. そのためには計算に用いる粒子数が十分になるように影響半径を大きくし, かつ粒子間隔を細かくすればよいと考えられる. 実際には精度を高めるためには影響半径は大きすぎても小さすぎてもいけないという結果になった. このことは粒子の移動を考慮しない場合には問題とならないが, 通常の SPH 法における解析のように時々刻々粒子配置が変化する場合には深刻な解析精度の低下を引き起こす恐れがある.

一方, SPH 法では物理量を平滑化して計算を行うため, 周囲の粒子が不足する境界近傍で誤差が大きくなることが知られているが, ここで示した解析例においては境界付近で誤差が大きくなるような結果は見られなかった.

これらの結果は SPH 法の性質としてよく知られていたものではないため, 次項において影響半径と SPH 法の精度に関して検討を行う.

(3) 近似精度と影響半径の関係

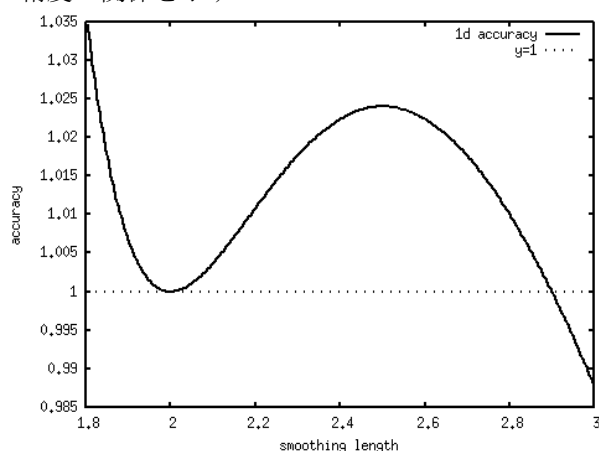
SPH 法で波動方程式を解く際, 速度と応力に対して SPH 近似による微分を行う. まず任意の直線勾配を SPH 近似で評価する場合の精度に関して論じる. 対象粒子 i における SPH 近似の評価式は次式によって表される.

$$\frac{f(x_i) - f(x_j)}{dx} = \sum \frac{1}{\rho_i} m_j (f(x_j) - f(x_i)) \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (12)$$

ここで f は各粒子の物理量を意味する．全粒子の密度と質量が一定，即ち dx が一定であるという仮定を導入し，式(12)を式変形すると次式が成り立つ．

$$1 = \sum dx^2 \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (13)$$

式(13)の右辺の値が影響半径 h の値によってどう変化するかを調べる事で，SPH 法における直線勾配評価の精度の検証を行う．カーネル関数は cubic spline kernel を用いた．以下に影響半径と SPH 近似の精度の関係を示す．



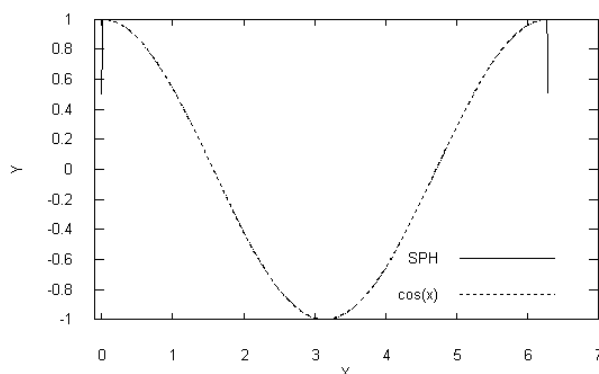
図－3 影響半径と直線勾配評価の精度の関係

図－3 より影響半径が粒子間隔の 2 倍，もしくはは 2.9 倍の際に SPH 近似による直線勾配の評価の精度が高いことがわかる．2.9 倍という値で精度が高いという事実は，前述した SPH 法による一次元弾性波の解析結果と合致する．

格子状に配置された粒子に対して影響半径が粒子間隔の 2 倍である場合，実質的にある粒子の物理量を評価する際に，隣接する粒子の物理量しか用いないことになってしまう．これは影響半径の範囲内で物理量の平滑化を行う，という SPH 法の特色上好ましくないと言える．従って一次元解析における精度の高い影響半径の値としては粒子間隔の 2.9 倍が望ましいだろう．しかしながら変形によって粒子配置や粒子の大きさが乱れた場合，必ずしもこの影響半径の値で精度が高いとは限らない．この結果はあくまでも一次元解析かつ粒子間隔が一定の際に成立する，という点に留意しておく必要がある．

次に SPH 法を波動の解析に用いることを想定し，一般的な正弦関数の勾配の評価の精度と影響半径の関係の検証を行う．ここで取り扱う正弦関数

$\sin(x)$ の位相範囲は $0 \leq x \leq 2\pi$ とする．また SPH 粒子の数は 800 個とした．以下の図－4 に影響半径を粒子間距離の 2.9 倍とした場合の SPH の勾配評価と解析解との比較の結果を示す．

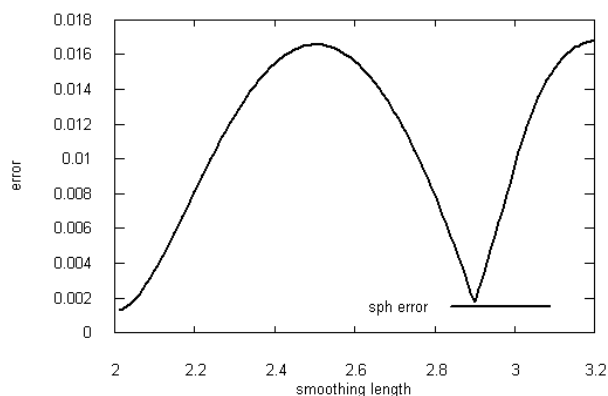


図－4 正弦関数の勾配の解析解と SPH 法による解析結果の比較

SPH 法による解析結果は両端で誤差が出ている．これは境界付近では粒子が不足し，SPH 法の計算を行うための十分な情報が不足しているためである．このような正弦関数の勾配の解析解と SPH 法による解析結果の差を以下の式を用いて指標化する．

$$error = \frac{\sum_{i=1}^n |\text{解析結果} - \text{解析解}|}{n} \quad (14)$$

ここで n は粒子数を意味する．本式は粒子数一個あたりの平均誤差を意味している．(14) 式の値を縦軸，影響半径を横軸としたグラフを以下に示す．



図－5 正弦関数における SPH 法の勾配評価の精度と影響半径の関係

図－5 より正弦関数の勾配評価に関しても，影響半径が粒子間隔の 2.9 倍付近の際に精度が高いことがわかる．以降一次元解析における SPH 法では影響半径の値は粒子間隔の 2.9 倍を採用するものとする．

3.2 CSPH と MSPH による一次元弾性波の解析

(1) 解析条件

解析パラメータは表-1 に従うものし、その他の解析条件も通常の SPH 法による解析と同じとした。

(2) 解析結果

CSPH 法や MSPH 法では影響半径によって波動伝播速度が図-2 の SPH 法のように変化しなかった。また波動伝播速度の理論値が 100 (m/sec) であることを踏まえても精度に大きな問題は見受けられなかった。境界条件の導入は、境界上の粒子の速度が 0、あるいは応力が 0 という形で直接代入する形で十分な精度が得られた。

(3) 近似精度と影響半径の関係

図-4、同様に一般的な正弦関数の勾配評価精度と影響半径の関係をそれぞれ以下の図-6、図-7 に示す。

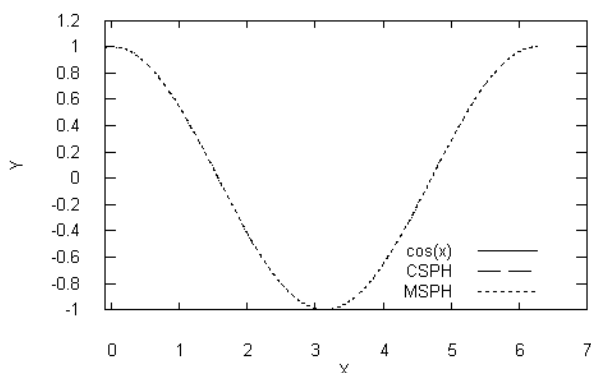


図-6 正弦関数の勾配の解析解と CSPH 法と MSPH 法による解析結果の比較

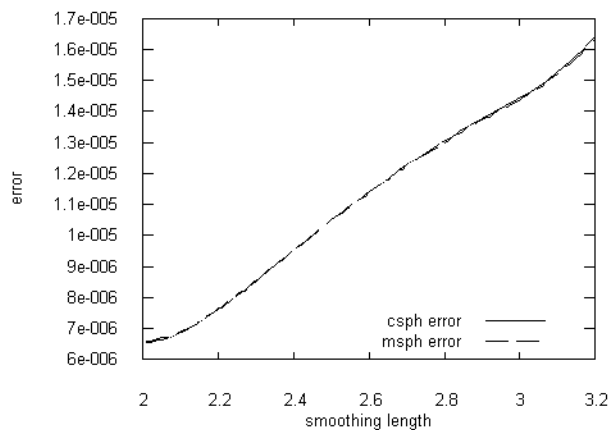


図-7 影響半径と誤差の関係

図-6 より CSPH 法と MSPH 法では境界で誤差が生じていない。また CSPH 法と MSPH 法では影響半径が小さい方が精度がよいことがわかる。あくまで格子状に配置した状態での精度となるが、不必要に影響半径を大きくすることは得策ではないと言えるだろう。また図-3 と比較すると、誤差の値がかな

り小さいオーダーとなっていることもわかる。したがって SPH 法のように影響半径によって波動伝播速度が大きく違ってくるような結果にはならなかったと考えられる。

3.3 MPS 法による一次元弾性波の解析

(1) 解析条件

解析モデルは SPH 法による解析同様図-1 に従う。また解析パラメータも同様に表-1 に従う。その他の解析条件も基本的に SPH 法による解析と同じとした。

(2) 解析結果

MPS 法による解析では影響半径によって図-2 の SPH 法のように変化しなかった。また、波動伝播速度の理論値が 100 (m/sec) であることを踏まえても精度に問題はなかった。自由境界及び固定境界での反射も特に問題は見受けられず、MPS 法においても境界条件の導入は、境界上の粒子の速度が 0、あるいは応力が 0 という形で直接代入する形で十分であると考えられる。

(3) 近似精度と影響半径の関係

図-4、図-5 同様に一般的な正弦関数の勾配評価精度と影響半径の関係を計算した結果を以下の図-8、図-9 に示す。粒子数は SPH 法の評価と同様 800 個とした。

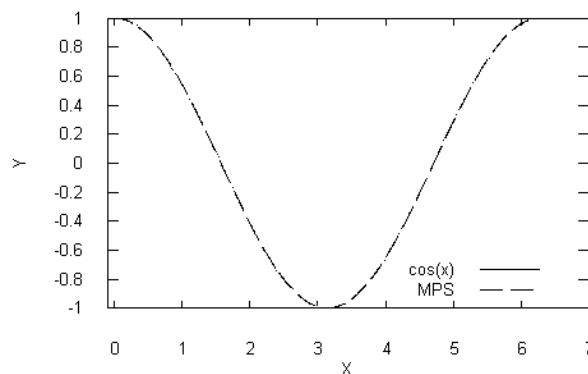


図-8 正弦関数の勾配の解析解と MPS 法による解析結果の比較

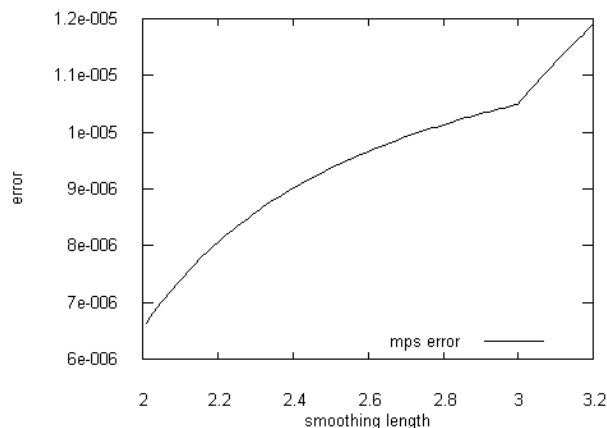


図-9 影響半径と誤差の関係

図-8 より MPS 法では境界で誤差が生じないことがわかる。また図-9 から分かるように、影響半径が大きくなるに従い、単調に誤差が大きくなっている。これは影響半径が大きい方が空間的な解像度が低下するので精度も低下するためであると考えられる。これらの結果から、MPS 法においても CSPH 法や MSPH 法同様不必要に影響半径を大きくするべきではないことがわかる。

3.4 各種解析手法による解析結果の比較検討

(1) 解析条件

これまで行ってきた粒子法による波動伝播解析と差分法による解析を比較する事で、粒子法の適用性を検討する。差分法の計算方法には中央差分を採用している。各解析手法ごとのパラメータを以下の表-2 に示す。弾性体のパラメータは表-1 に従うものとする。

表-2 各解析手法ごとの固有のパラメータ

各種粒子法	
粒子間隔: dx	$5.0 \times 10^{-2} (m)$
影響半径: h	$2.9dx (m)$
積分時間間隔: dt	$1.0 \times 10^{-4} (sec)$
解析時間: t	$1.2 (sec)$

差分法	
格子間隔: dx	$1.0 \times 10^{-2} (m)$
積分時間間隔: dt	$1.0 \times 10^{-5} (sec)$
解析時間: t	$1.2 (sec)$
差分方法	中央差分

(2) 解析結果

各手法の解析開始後から 1.0 秒経過した状態の結果を以下の図-10 に示す。

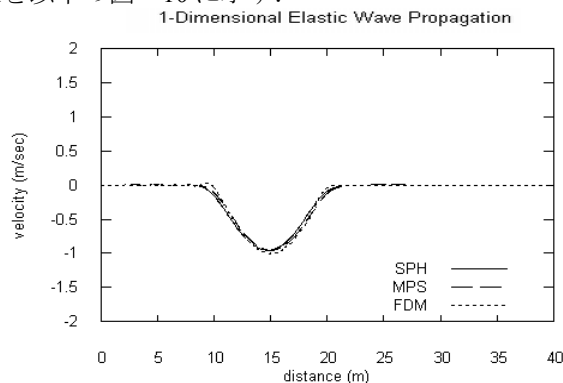


図-10 各手法の波動伝播の比較

SPH 法および MPS 法による解析結果は、ごく僅かに波動伝播速度の遅れが見受けられるものの概ね差分法と一致していた。粒子法による結果は若干波が滑らかになっているが、これは平滑化という計算手法による影響が出ていると考えられる。

3.5 各解析手法における誤差の定量的評価

本節では実際にどの程度の誤差が出ているかを定量的に検証する。誤差の計算は式(14)を踏襲し、正しい解として先程の十分に格子を細かくした差分法を用いた。比較対象は、SPH 法、CSPH 法、MPS 法、粒子法と同じ粒子間隔を格子間隔として採用した差分法とする。CSPH 法と MSPH 法と MPS 法の差異を考察することを目的として、荒い粒子間隔、格子間隔として $dx = 4.0 \times 10^{-1}$ で解析を行い、誤差の比較を行った。以下の図-11 に時刻の経過と誤差の関係を示す。

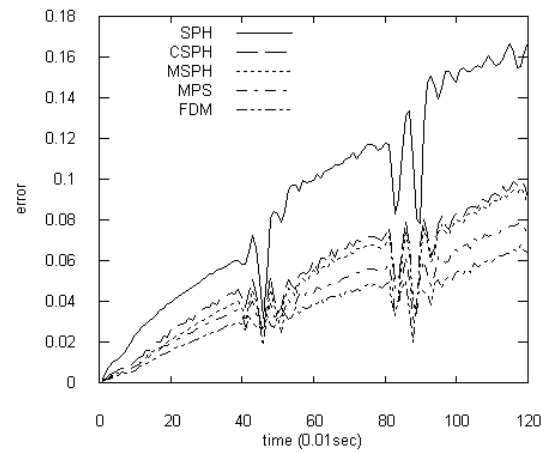


図-11 時刻に伴う誤差の変化

図-11 より CSPH 法や MSPH 法よりも MPS 法の方が精度が若干高いことがわかる。空間的な重みを配慮して陰的に解を求めている MSPH 法やそれに準ずる精度となる CSPH 法よりも MPS 法の方が精度が高いことは意外である。そこで以下の CSPH 法と MPS 法の計算式を比較することで考察を行う。以下の(15)式に一次元における CSPH 法の勾配評価の式を、(16)式に MPS 法の勾配評価の式を示す。

$$\langle \nabla f_i \rangle = \frac{\int (f_j - f_i) \nabla W dx}{\int (x_j - x_i) \nabla W dx} \quad (15)$$

$$\langle \nabla f_i \rangle = \frac{1}{n} \sum_{j \neq i} \left[\frac{f_j - f_i}{|x_j - x_i|^2} (x_j - x_i) w(|x_j - x_i|) \right] \quad (16)$$

MPS 法の式において今回一次元の解析を取り上げて

いることを考慮すると、 $\frac{(x_j - x_i)}{|x_j - x_i|^2} = \frac{1}{(x_j - x_i)}$ が

成立する．また CSPH 法の式において分母の

$x_j - x_i$ を分子に入れる．すると以下の(17)(18)式のような形で CSPH 法による計算式と MPS 法による計算式は対応していることがわかる．

$$\frac{1}{n^0} \cdots \frac{1}{\int \nabla W dx} \quad (17)$$

$$\sum_{j \neq i} \left[\frac{f_j - f_i}{|x_j - x_i|^2} (x_j - x_i) w(|x_j - x_i|) \right] \cdots \int \frac{(f_j - f_i)}{(x_j - x_i)} \nabla W dx \quad (18)$$

つまり一次元解析に限っては CSPH 法と MPS 法の相違点は平滑化関数 W の微分を行うかどうかに限ることになる．そこで，CSPH 法においても平滑化関数 W の微分を行わず以下の式のようにカーネル関数をそのまま用いる．

$$\langle \nabla f_i \rangle = \frac{\int (f_j - f_i) W dx}{\int (x_j - x_i) W dx} \quad (19)$$

この手法を SCSPH (Simple CSPH) 法と便宜上名づける．SCSPH 法による解析を行い，先の解析同様に誤差の定量的な評価を行ったところ，MPS 法の結果とはほぼ一致した．完全に結果が一致しないのは SCSPH 法の平滑化関数と MPS 法の重み関数が異なるからである．しかしながら二次元解析の場合は求めるべき未知数が増加するため，平滑化関数 W を微分せずにそのまま用いるだけでは解は得られない．二次元解析では連立方程式を解くために平滑化関数 W の微分をしなければならない．

MSPH 法に関しては，CSPH 法に比べて解析時間が大きく増大する割には際立って精度が向上していない．今回用いている平滑化関数は cubic spline と呼ばれる三次スプライン関数であり，微分を 2 回行うと直線の関数になってしまう．つまり MSPH 法の解を求めるために微分を繰り返したことで平滑化関数としての性能が劣化しており，それゆえ解析結果の精度が大して向上しなかったのではないかと推測できる．よって平滑化関数をもっと高次のスプライン関数とすることで MSPH 法の精度が向上する可能性がある．しかしながら本論文では二次元化に伴うさらなる解析時間の増大を考慮し，MSPH 法を用いなくとも CSPH 法で比較的十分な精度があるものとして，二次元解析における MSPH 法による解析は留保する．

3.6 粒子法における粒子間隔と精度の関係

粒子法による波動伝播解析において，一波長あたりに必要な粒子数はどれほどかを検証する．一般的

な正弦関数の勾配評価を粒子間隔と格子間隔を変化させて行い，式(14)を踏襲して誤差を算出する．ここで取り扱う正弦関数は $\sin(x)$ とし，位相範囲は $0 \leq x \leq 2\pi$ とする．粒子法の影響半径として粒子間隔の 2.9 倍を採用した．以下の図-12 に粒子数，格子数と誤差の関係を示す．

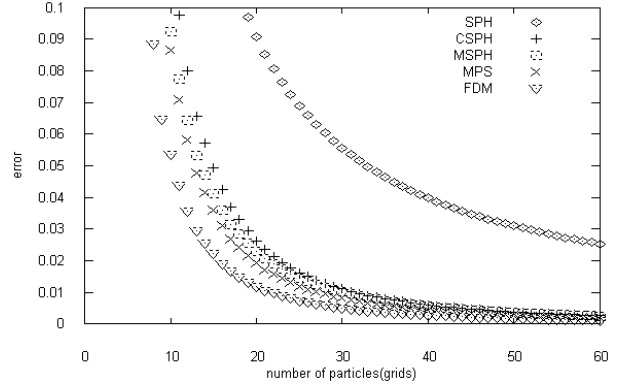


図-12 粒子数（格子数）と誤差の関係

図-12 より同じ粒子数や格子数であると SPH 法の誤差が相対的に大きく，CSPH 法や MSPH 法および MPS 法の精度が同程度であり，差分法の精度が最も高くなっている．まず SPH 法に関しては図-4 のように境界で誤差が出る．従って他の手法と比べて粒子数の増加に伴う誤差の減少具合がなだらかになっている．差分法と同程度の精度を出そうとすると，CSPH 法や MSPH 法および MPS 法の粒子数は差分法の格子数に比べておおよそ 1.5 倍の数が必要であることがわかった．これは粒子法では影響半径内にある複数の粒子によって空間的な広がりを持たせるため，両横の格子点だけを用いる差分法と比べて相対的に空間的な解像度が低いことが原因として考えられる．

3.7 不規則粒子配置

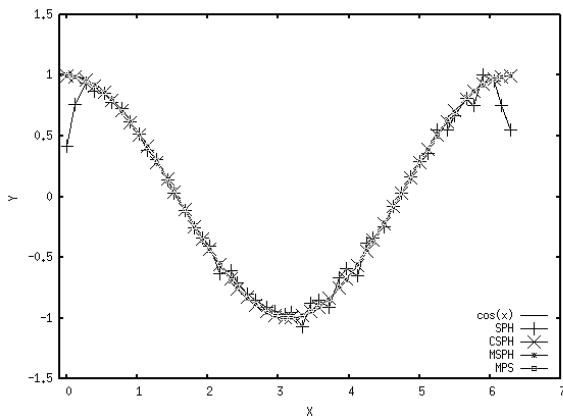
大変形解析を想定し，粒子配置が乱れた際の波動伝播問題に対する精度の検討を行う．ここで取り扱う正弦関数は $\sin(x)$ とし，位相範囲は

$0 \leq x \leq 2\pi$ とする．粒子法の影響半径として粒子間隔の 2.9 倍の値を採用した．粒子数は 50 とした．以下の式(20)に示す乱数を導入し，粒子配置をランダムにする．

$$x'_i = x_i + dx' \quad (20)$$

$$\{dx' = dx \times \text{randomnumber}(-0.35 \sim 0.35)\}$$

粒子配置をランダムにした際の各手法による解析結果を以下の図-13 に示す．



図－13 正弦関数の勾配の解析解と粒子法による解析結果の比較

図－13 より SPH 法においてはランダム配置による誤差が生じている。これは粒子の配置に偏りが生じることで、一部の粒子において粒子数が不足、或いは過剰な状態になっていることが原因として考えられる。しかしながら元来圧縮性流体の解析手法である SPH 法は、粒子の偏りに応じて密度を更新することで補正が可能でもある。今回の SPH 法の誤差はあくまで粒子のランダム配置に対して非圧縮的な数値計算をした場合に生じる、ということに留意しておく必要がある。CSPH 法や MSPH 法ではこうした SPH 法における粒子の偏りの誤差を補正する効果があるので、誤差は生じていない。MPS 法においても一次元解析ではランダム配置による誤差は見受けられなかった。

4. 二次元弾性波の解析

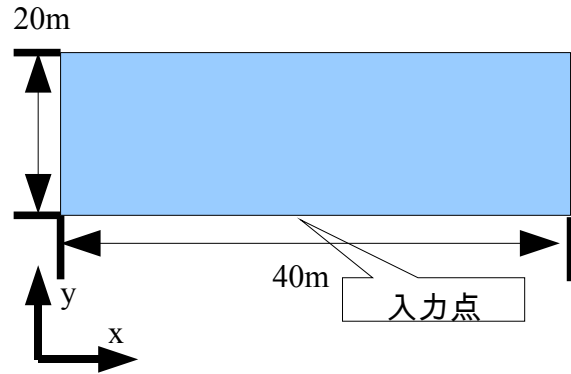
4.1 CSPH 法と MPS 法による二次元弾性波の解析

本章では二次元面外 SH 波の解析を行う。一次元解析の結果を受け、二次元解析では粒子法として CSPH 法と MPS 法を主に取り扱うものとする。SPH 法の解析は一次元においても精度に種々の問題が見受けられたが、CSPH 法との比較の意味も含めて参考までに解析を行う。MSPH 法に関しては、一次元解析において CSPH 法に比べて際立った精度の向上が見られなかったので本章では取り扱わない。

(1) 解析条件

解析モデルを以下の図－14 に示す。また解析パラメータは以下の表－3 に従う。境界条件に関しては、固定境界上の粒子の速度を 0、自由境界上の粒子の応力を 0 とする単純な形で導入した。速度 f を入力点から 0.1 秒間入力し、振幅は入力点中心で 1.0 とし、境界上で入力点中心から 1 粒子、1 格子離れるに連れて 0.85, 0.5, 0.15 と徐々に振幅を減らし、合計 7 点から入力を行う。これは両隣の入力点の振幅にギャップを緩和し、入力点からノイズが出ないよ

うにするためである¹⁵⁾。また影響半径のパラメータは一次元における解析に比べ小さくしているが、これは影響半径が大きいと入力ノイズが生じやすく、継続した解析が行えなくなるためである。この入力ノイズの問題は差分法でも同様に見受けられる。したがって各手法での比較を目的としている本研究では、この入力ノイズの問題は扱わない。



図－14 二次元弾性体の概念図

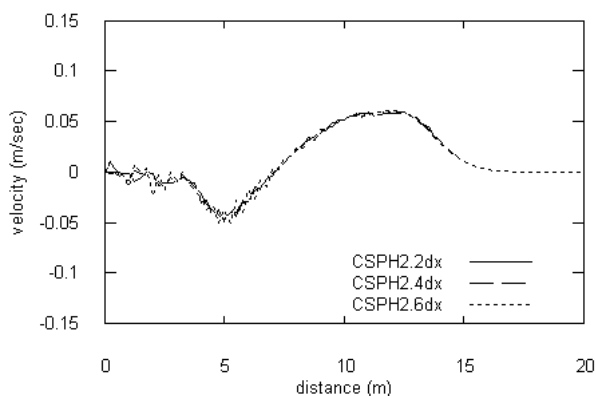
表－3 解析パラメータの諸元

弾性体の横長さ： x_l	40(m)
弾性体の縦長さ： y_l	20(m)
弾性体の密度： ρ	$2.0 \times 10^3 (kg/m^3)$
弾性係数： μ	$2.0 \times 10^7 (kg/m^2)$
入力速度： f	$\sin(\pi/0.1 t) (m/sec)$

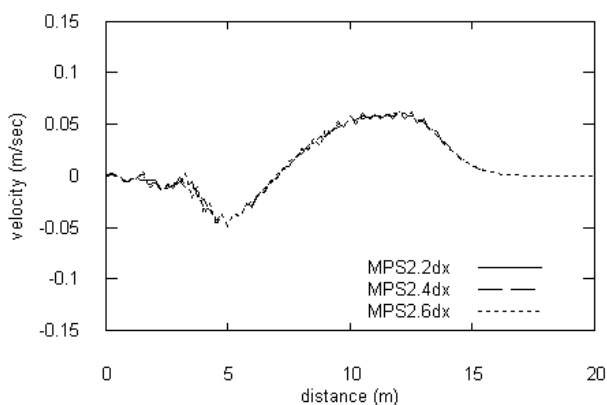
粒子間隔： dx	$2.5 \times 10^{-1} (m)$
影響半径： h	2.2dx, 2.4dx, 2.6dx (m)
積分時間間隔： dt	$2.0 \times 10^{-4} (sec)$
解析時間： t	0.5(sec)

(2) 解析結果

入力点を含む Y 方向の断面における弾性波に着目し、解析開始から 0.15 秒経過した段階の弾性波の比較を以下の図－15 に示す。



(a)CSPH



(b)MPS

図－15 波動伝播の比較

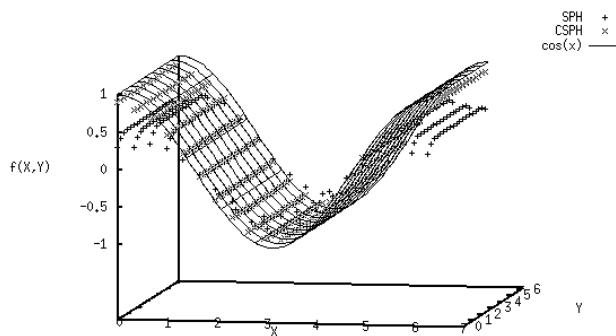
図－15 より，影響半径が粒子間隔の 2.6 倍のケースにおける解析では入力からノイズが発生している．影響半径が大きい方が入力ノイズが発生しやすいと言える．定量的な精度の評価は差分法との比較を行う際に述べる．

(3) 近似精度と影響半径の関係

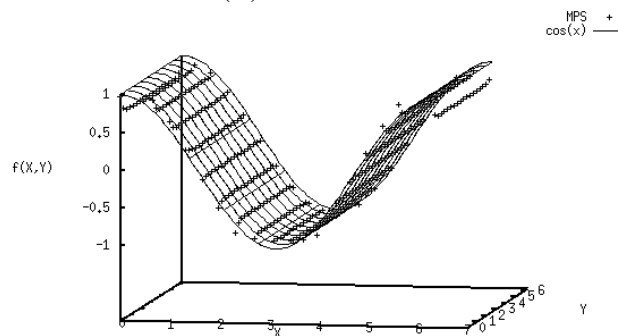
本手法を波動の解析に用いることを想定し，一般的な正弦関数の勾配の評価の精度と影響半径の関係の検証を行う．ここで取り扱う正弦関数

$f(x, y) = \sin(x)$ の位相範囲は $0 \leq x \leq 2\pi$ とし，X 軸方向の勾配の精度の評価を行う．粒子数は XY 方向共に 20 個とする．これは境界での誤差を視認しやすくするために適当に設定している．以下の図－16 に影響半径を粒子間距離の 2.4 倍とした場合の CSPH の勾配評価と解析解との比較の結果を示す．

図－16 より CSPH 法では境界誤差が補正されているのに対し，SPH 法では比較的大きな誤差が出ていることがわかる．特に領域の角は最も粒子数が不足するので誤差が大きくなっている．また MPS 法では境界付近で誤差が生じていることがわかる．これは(9)式の勾配評価モデルは X 方向と Y 方向に存在する粒子の空間的な偏りが無い場合にしか成り立たないためである．図－8 より一次元のケースでは

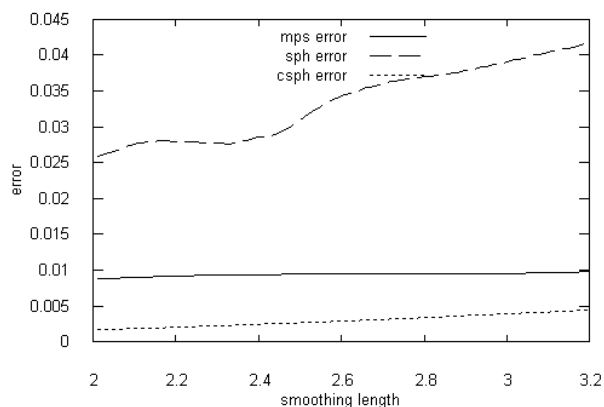


(a)SPH と CSPH



(b)MPS

図－16 正弦関数の勾配の解析解と解析結果の比較



図－17 正弦関数における勾配評価の精度と影響半径の関係

MPS 法でも境界近傍の誤差が生じていないが，これは一次元では X 方向にのみ粒子が存在するためである．

次に(14)式を用いて誤差を算出し，影響半径との関係を示したものを図－17 に示す．粒子数は XY 方向共に 100 個，計 10000 個の粒子で計算を行った．

図－17 よりいずれの手法においても影響半径が大きくなるに連れて誤差も大きくなっているが，SPH 法に比べて CSPH 法と MPS 法の精度が良いことが分かる．

また，SPH 法における影響半径と誤差の関係が一次元の計算結果である図－5 とは異なり，単調増加

に近い形となっている。これは、本稿のモデルの二次元解析においては一次元解析と比べて、境界付近にあって精度が低い粒子の、全粒子に占める割合が高くなっているため、境界による誤差が境界以外の誤差に対して卓越しているためであると考えられる。すなわち、粒子間隔をより細かくし、多くの粒子を用いた解析を行えば一次元と同様な誤差の性質が得られると予想できる。

4.2 各解析手法における比較検討

(1) 解析条件

これまで行ってきた粒子法による二次元面外振動（SH 波）の解析結果を差分法と比較する。差分法の計算方法には中央差分を採用している。各解析手法ごとのパラメータを以下の表-4 に示す。弾性体の解析モデルは図-14、パラメータは表-3 に従うものとする。

表-4 各解析手法ごとの固有のパラメータ

各種粒子法	
粒子間隔： dx	$2.5 \times 10^{-1}(m)$
影響半径： h	$2.4dx(m)$
積分時間間隔： dt	$2.0 \times 10^{-4}(sec)$
解析時間： t	$0.5(sec)$

差分法	
格子間隔： dx	$2.5 \times 10^{-1}(m)$
積分時間間隔： dt	$1.0 \times 10^{-5}(sec)$
解析時間： t	$0.5(sec)$
差分方法	中央差分

(2) 解析結果

解析開始から 0.35 秒の段階での波動伝播の比較を図-18 に示す。また入力点を含む Y 方向の断面における弾性波に着目したものも同様に示す。

CSPH 法および MPS 法共に概ね一致していることがわかった。境界での誤差が生じる MPS 法でも良好な結果が得られた。これは一次元解析における SPH 法同様、境界条件として真の解を直接境界粒子に代入しているがゆえに、結果的に大部分の境界誤差が緩和されるためである。

次に差分法と粒子法との誤差を式(14)を踏襲して算出した結果の時刻歴を図-19 に示す。

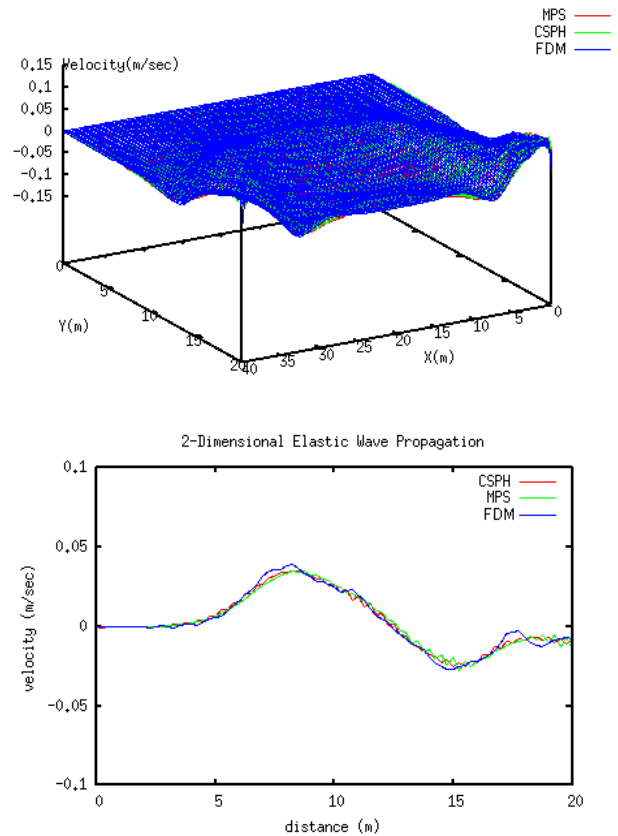


図-18 波動伝播の比較

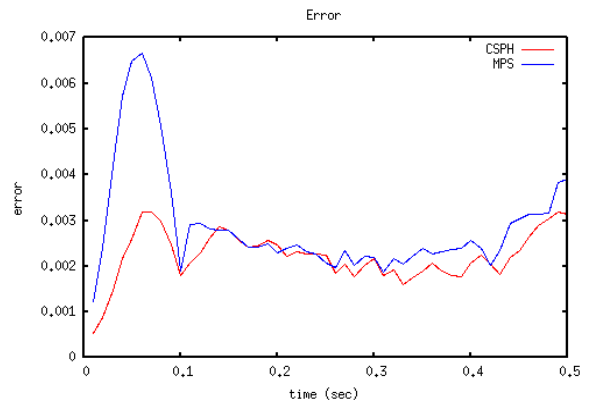


図-19 差分法との誤差の時刻歴

図-19 よりまず入力の際で大きく誤差が出ている。これは入力の際のノイズが原因であると考えられる。また時刻が経過するに連れて MPS 法の方が CSPH 法より若干誤差が大きくなっている。一次元解析の同じスケールでの解析においては CSPH 法よりも MPS 法の方が精度が良かったが、二次元においては CSPH 法の方が MPS 法よりも僅かに精度が良いという結果になっている。これは MPS 法は二次元解析では境界誤差を補正できないことが原因として考えられる。もっとも、この二次元解析における MPS 法における境界誤差というのは一次元解析における SPH 法の考察同様、境界部分に境界条件と

して真の解を代入することで殆ど緩和されるので、解析結果に対する実際的な悪影響はごく軽微でもある。

4.3 不規則粒子配置

大変形解析を想定し、粒子配置が乱れた際の波動伝播問題に対する精度の検討を行う。一次元同様、波動の解析に用いることを想定し一般的な正弦関数の勾配の評価の精度の検討を行う。ここで取り扱う正弦関数 $f(x, y) = \sin(x)$ の位相範囲は

$0 \leq x \leq 2\pi$ とし、X 軸方向の勾配の精度の評価を行う。粒子数は 50 個とした。一次元のケース同様式(20)に示す乱数を導入し、粒子配置をランダムにして同様の計算を行う。 $Y = \pi$ の断面における結果を以下の図-20 に示す。

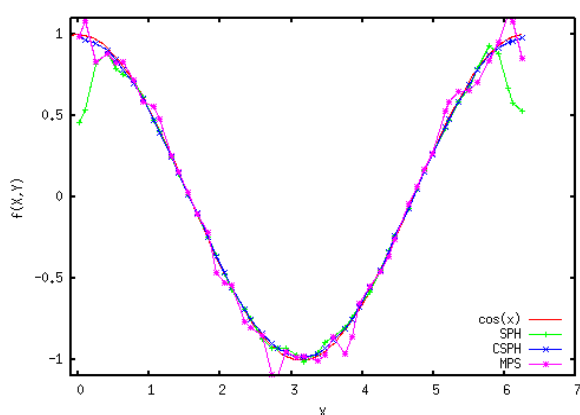


図-20 正弦関数の勾配の解析解と各種粒子法による計算結果の比較

図-20 より一次元の結果である図-13 とは異なり、MPS 法においてもランダム配置による誤差が生じている。これは先にも述べたように、(9)式の MPS 法の勾配評価モデルは X 方向と Y 方向に空間的に均一に粒子が存在する場合にしか成り立たないため、粒子配置が乱れると誤差が生じてしまう。一方 CSPH 法は方向に応じて重みを算出するため粒子配置が乱れても精度が下がることはない。変形解析を想定する場合、時刻ステップの進行に従って粒子配置が乱れていくことを考えると、MPS 法よりも CSPH 法の法が適用性が高いと言える。

次にランダムに配置された状態で二次元弾性体の解析を行う。ランダム幅は-0.075~0.075 とし、境界以外の粒子において Y 方向にのみ粒子配置を乱す。入力点から生じるノイズによって解析が不安定になっているため、ランダム幅は小さく設定している。解析パラメータは表-3 および表-4 に従うものとする。解析モデルは図-14 を用いるが、入力点に関しては下部固定端の全域とする。これは入力を単純化させ入力ノイズによる影響をできるだけ排除するた

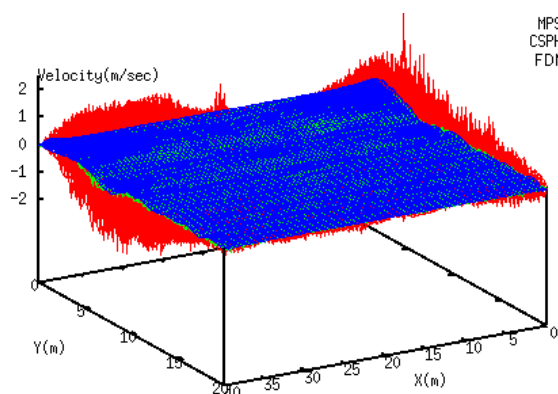


図-21 ランダム配置状態における波動伝播の比較

めである。解析開始後から 0.45 秒経過した段階での波動伝播の比較を示す。

図-21 より MPS 法ではこの時刻で解が発散し始めた。主に境界から解が発散し始めているので MPS 法における境界誤差の影響も考えられる。しかしながら、スタッガードグリッドのように応力と速度を計算する位置をずらすことでこの不安定性は改善する蓋然性が高い。次にランダム配置とそうでない場合における差分法との誤差の時刻暦を(14)式を踏襲し以下の図-22 に示す。

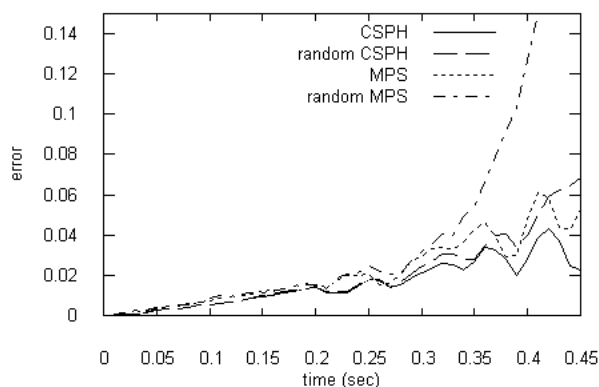


図-22 誤差の時刻歴

図-22 よりランダム配置における MPS 法の解析結果が発散していることがわかる。また CSPH 法も格子配置よりはランダム配置のケースの方が誤差が大きくなっている。

5. 結論

SPH 法は影響半径によってその精度が大きく変化することが示された。また一次元問題において MPS 法は CSPH 法において重み関数の形状が異なる特殊な場合として位置づけることができることが明らかになった。このほか固定端と自由端の処理は境界上の粒子に境界条件を与えるだけでよいことがわかった。そして二次元解析において、境界誤差の有無や不規則粒子配置に対する適用性の観点から、CSPH

法がMPS法よりもより適した手法であることが確認された。

参考文献

- 1)L.B. Lucy: A numerical approach to the testing of the fission hypothesis, *The Astronomical Journal*, vol.82, No.12, pp.1013-1024, 1977.
- 2)R.A. Gingold and J.J. Monaghan: Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars, *Monthly Notes of Royal Astronomical Society*, Vol.181, pp.375-389, 1977.
- 3)J.J. Monaghan: Simulating Free Surface Flows with SPH, *Journal of Computational Physics*, Vol.110, pp.399-406, 1994.
- 4)J.P. Gray, J.J. Monaghan and R.P. Swift: SPH elastic dynamics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, pp.6641-6662, 2001.
- 5)小野祐輔, 岩本哲也, Charles Scawthorn: SPH シミュレーションに基づく液体貯蔵タンクの固定式屋根に作用するスロッシング荷重の評価, 応用力学論文集 Vol. 10, 2007
- 6)酒井譲, 山下彰彦: SPH 理論に基づく粒子法による構造解析の基礎的検討, 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 67, No. 659, pp. 1093-1102, 2001.
- 7)宋武燮, 酒井譲, 山下彰彦: SPH 法による弾塑性解析手法の検討 (第 1 報, 2 次元小変形問題), 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 68, No. 669, pp. 772-778, 2002.
- 8) M.Naili, T. Matsushima and Y. Yamada: A 2D Smoothed Particle Hydrodynamics method for liquefaction induced lateral spreading analysis, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.8, pp.591-599, 2005
- 9)竿本英貴他: 豊浦砂の高解像度 X 線 CT 画像を利用した三次元多孔質体モデルの構築および SPH による透水シミュレーション, 応用力学論文集, Vol.9, pp.649-657, 2006.
- 10)Koshizuka, S., Chikazawa, Y. and Oka, Y.: Particle Method for Fluid and Solid Dynamics, *Computational Fluid and Solid Mechanics 2*, pp.1269-1271, 2001
- 11) G.R.Liu, M.B.Liu : Smoothed Particle Hydrodynamics a meshfree particle method, World Scientific Publishing, 2003
- 12)J.K.Chen, J.E.Beraun, C.J.jih : Completeness of corrective smoothed particle method for linear elastodynamics, 1999
- 13)G.M.Zhang, R.C.Batra : Modified smoothed particle hydrodynamics method and its application to transient problems, 2004
- 14)越塚 誠一 : 粒子法, 日本計算工学会, 2005
- 15)佐藤 雅弘 : FDTD 法による弾性振動・波動の解析入門, 森北出版, 2003

(2009 年 4 月 9 日 受付)