

大・小粒子集合体のせん断強度に関する微視力学モデル

A micromechanics model on shear strength of binary granular assemblies

上田高生*・松島亘志**・山田恭央***

Takao UEDA, Takashi MATSUSHIMA and Yasuo YAMADA

*学生会員 筑波大学大学院 システム情報工学研究科 (〒305-8577 茨城県つくば市天王台 1-1-1)

**正会員 工博 筑波大学准教授 システム情報工学研究科 (〒305-8577 茨城県つくば市天王台 1-1-1)

***正会員 工博 筑波大学教授 システム情報工学研究科 (〒305-8577 茨城県つくば市天王台 1-1-1)

The shear strength of binary granular assemblies is evaluated using a newly-proposed micromechanics model. The key issue is the relation between the volume fraction of the smaller and larger particles and the resulting coordination number of the assemblies that is classified into several types depending on the type of contacting particle pairs. Each type of coordination number is evaluated from geometrical simplification. Furthermore, the bulk shear strength of the assemblies is derived by the volume average of the contacts and their inter-particle friction angles. The proposed model is validated through a series of Discrete Element simulations.

Key Words : binary granular packing, coordination number, DEM

1. はじめに

粒径幅の広い粒状材料のせん断強度特性については、ロックフィル材などを対象とした実験的研究の蓄積がある^{1),2)}が、その微視的メカニズムについては、未解明な点が多い。その背景には、一言で「粒度の影響を検討する」といっても、粒度の影響は極めて多面的であり、系統的な理解の筋道立てることも難しい、という現状がある。粒度を表す指標としては均等係数や曲率係数などがあるが、その力学的な意味合いは必ずしも明らかではない。また、地盤材料の場合、細粒分は粘土としての性質を有し、礫材は粒子破砕性などが問題となる場合が多いなど、粒径の大小により異なる粒子物性の影響も含まれるため、問題は複雑にならざるを得ない。

粒度のみを考慮し、粒子形状、破砕性、粒子間付着力等の、他の粒子物性を排除して、純粋に砂のような粒状体の力学特性(特にせん断強度)に及ぼす粒度の影響を考えると、(1)粒度が粒子の間隙比に影響を及ぼし、(2)それが粒子接触点数に影響し、(3)接触点物性と相まってせん断強度に影響を及ぼす、というメカニズムが予想される。(1)についてはLadeらの研究³⁾が参考となる。(2)については、単粒度ではSmithらの先駆的研究⁴⁾があるが、粒度分布の影響を考慮するには、新しい考え方が必要となる。(3)については、Changらのマイクロメカニクスモデル⁵⁾の有効性が弾性変形に対してはあ

る程度検証されているものの、せん断強度については未だ研究段階にある。本研究では、接触点数とせん断剛性とは線形関係がある、という文献⁵⁾の結果をせん断強度の関係に援用して、接触点数と粒子の体積率を考慮したモデルの構築を試みている。

近年、コンピュータの発達に伴い、個別要素法(DEM, Discrete Element Method)⁶⁾などの固体粒子集合体の直接数値解析法の利用が拡大している。DEMでは、粒子物性を自由に設定できるため、それぞれの因子の影響を系統的に検討することが可能である。DEMによる粒度分布の影響評価の研究では、粉体工学での粒子混合プロセスや、砂防分野の土石流などに現れる、分級現象(大きな粒子と小さな粒子が分離する)の検討が行われている^{7),8)}が、地盤のように密に充填された状態での粒状体の力学特性に及ぼす影響についての検討はあまり行われていない。

本研究では、滑らかに粒径の分布する粒子集合体の力学特性を検討する最初のステップとして、最も単純な大・小2粒子の集合体(粒径比=10:1)を対象として、それぞれの単粒度でのせん断強度と大・小2粒子配合割合をパラメータとし、粒子接触点特性を介して集合体のせん断強度特性を予測するモデルを提案している。また、様々な配合での密詰め供試体に対するDEM単純せん断シミュレーションを行い、提案モデルの妥当性を検討している。

2. 提案する予測モデル

大・小2粒径の粒子集合体においては、これら2粒子の配合に応じて、各々の粒子がそれぞれいくつの大・小粒子と接触しているか、すなわち大・小粒子ごとの配位数が異なってくると予測される。本研究では表-1に示すように、大・小粒子相互間の各種の配位数に着目しているが、ここに、 C は接触点数、 N は粒子数であり、添え字 L, S はそれぞれ大粒子と小粒子を表している。例えば、 C_{LS} は大粒子の小粒子との接触点数である。

配合を表す指標として、本研究では大・小2粒子の小粒子の体積(2次元では面積)の合計を全粒子の体積で除した値である小粒子混合割合(W_S)を採用している。図-1は W_S が異なるケースでの粒子の接触の様子を模式的に表しており、 W_S が小さいケース(図-1(b))では大粒子同士の接触が多く、小粒子は大粒子の隙間にまばらに存在するだけである。このケースでは、集合体のせん断強度には大粒子の粒子物性が大きく影響することが予想される。一方、 W_S が大きいケース(図-1(d))では小粒子同士の接触が多く、大粒子は小粒子の中に埋もれているため大粒子同士の接触は無い。このケースでは、集合体のせん断強度には小粒子の粒子物性が大きく影響することが予想される。このように W_S と大・小粒子の粒径比(α)から配位数を予測できると考え、配位数を予測するモデルを考案した。また、 W_S が大きくなるに従って、集合体のせん断強度に粒子物性が与える影響は、大粒子が支配的である状態から小粒子が支配的である状態に遷移すると推測される。そこで、大・小粒子の単粒度でのせん断強度、配位数及び W_S から集合体のせん断強度を予測することができると考え、せん断強度を予測するモデルを構築した。本研究で提案するモデルは図-2に概念図で示す通り、大・小粒子の単粒度でのせん断強度が分かっている場合に、 W_S に応じた大・小粒子混合体のせん断強度を予測するモデルであり、そのinputとoutputを表-2に示している。

2.1 配位数の予測モデル

粒子混合割合 W_S が増加するとき、最密状態における粒子配列は図-1(a) から図-1(e)のように変化すると考えることができる。 W_S が0%の場合、すなわち大粒子の単粒度では大粒子が最密で詰まっている(図-1(a))。 W_S が少し増加すると、最密で詰まっている大粒子同士の隙間に小粒子が配置される(図-1(b))。 W_S が更に大きくなると、大粒子同士の隙間に小粒子が最密に詰まった状態になる(図-1(c))。この状態での W_S を W_S^b とする。 W_S^b での間隙比が最小になることがLadeら³⁾によ

表-1 各種の配位数

配位数の記号	注目する粒子	接触を数える相手粒子	配位数の定義式
n	全粒子	大・小粒子	$n = C/N$
n_L	大粒子	大・小粒子	$n_L = C_{LS}/N_L$
n_S	小粒子	大・小粒子	$n_S = C_{SL}/N_S$
n_{LL}	大粒子	大粒子	$n_{LL} = C_{LL}/N_L$
n_{LS}	大粒子	小粒子	$n_{LS} = C_{LS}/N_L$
n_{SL}	小粒子	大粒子	$n_{SL} = C_{SL}/N_S$
n_{SS}	小粒子	小粒子	$n_{SS} = C_{SS}/N_S$

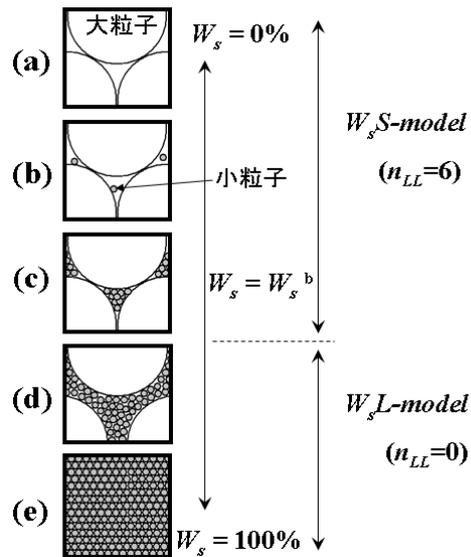


図-1 W_S による粒子配列の模式図

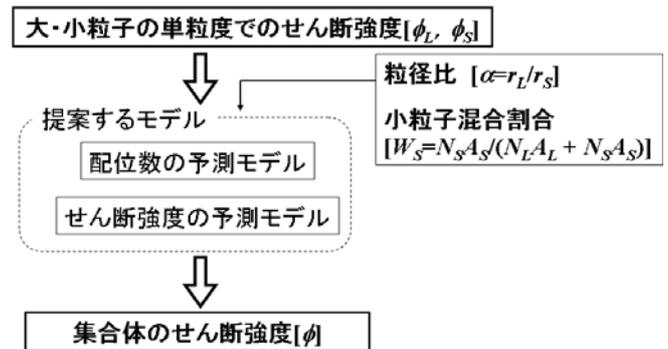


図-2 モデルの概念図

表-2 モデルのinputとoutput

配位数の予測モデル	input	大・小粒子の粒径比(α) 小粒子混合割合(W_S)
	output	配位数($n, n_L, n_S, n_{SS}, n_{SL}, n_{LS}, n_{LL}$)
せん断強度の予測モデル	input	配位数(n_S, n_{LL}) 小粒子混合割合(W_S) 大・小粒子の単粒度でのせん断強度(ϕ_L, ϕ_S)
	output	粒子集合体のせん断強度(ϕ)

て指摘されている。 W_S が W_S^b よりも大きくなると、最密に詰まった小粒子の中に大粒子が埋め込まれる状態となり、大粒子同士の接触は無くなる(図-1(d))。 W_S が 100% では、単粒度で小粒子が最密に詰まった状態となる(図-1(e))。本モデルでは、 W_S が W_S^b より小さいケース(図-1(a),(b),(c))では、大粒子同士の接触が最大値を保ち、 W_S が W_S^b を超えるケース(図-1(d),(e))では大粒子同士の接触が0になると仮定し、 W_S が小さい場合のモデル($W_S S$ -model)では $n_{LL}=6$ 、 W_S が大きい場合のモデル($W_S L$ -model)では $n_{LL}=0$ を前提条件としている。

(1) W_S が小さい場合の配位数モデル ($W_S S$ -model)

大粒子数と小粒子数の比 (D) は、「式(1)」と表せる。

$$D = \frac{N_L}{N_S} = \frac{1 - W_S/100}{(W_S/100)\alpha^2} = \frac{100 - W_S}{W_S \alpha^2} \quad (1)$$

図-3 に大粒子が最密に詰った状態を示しており、

$$n_{LL} = 6 \quad (2)$$

である。このとき大粒子 1 つの周りに他の大粒子が 6 つ接触し、大粒子同士の接触により作られる隙間は 6 つ存在する。隙間 1 つ当たりに入る平均小粒子数(N_p)は、

$$N_p = \frac{N_S}{N_L} \frac{1}{2} = \frac{1}{2D} \quad (3)$$

である。大粒子同士の接触による隙間の 1 つの面積を A_1 、隙間のうち小粒子が存在できる面積を A_2 、小粒子が存在できる面積の中で、大粒子との接触がある面積を A_3 とすると、図-3 より幾何学的に

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= 0.161 r_L^2 \\ A_2 &= r_L^2 (0.161 - 3(\tan \theta - \theta)) + r_S^2 \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \\ A_3 &= 2 r_S (r_L + r_S) \delta + \pi r_S^2 \\ \theta &= \sin^{-1} \left(\frac{1}{1 + \alpha} \right) \\ \delta &= \frac{\pi - 3\theta}{3} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

と表せる。ここに、 r_L, r_S は大・小粒子の粒径であり、 θ, δ は図-3 に定義する角度に対応している。接触点数が面積比に比例すると仮定すると、「式(4)」より n_{LS} と n_{SL} は、

$$\left. \begin{aligned} n_{LS} &= 6 \frac{A_3}{A_2} N_p \\ n_{SL} &= n_{LS} \frac{N_L}{N_S} = n_{LS} D \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

と表せる。 W_S が小さいとき、小粒子は大粒子の隙間に浮いた状態となるため、小粒子同士の配位数(n_{SS})を幾

何学的に求めるのは困難である。そこで大粒子の隙間に占める小粒子の間隙比 e_s を求め、間隙比 e_s から配位数 n_{SS} を Smith らによる n - e 関係⁴⁾を用いて予測した。Smith らによる n - e 関係は 3 次元であるため、2 次元に変換した。具体的には、2 次元粒状体が、最も密度が大きい構造である三角格子($e = 0.103, n = 6$)と、最も密度が小さい構造である正方形格子($e = 0.91, n = 4$)の混合体であると仮定して、計測した粒状体の間隙比から三角格子と正方形格子の存在割合を計算し、存在割合に応じて全体の配位数を求めることにより「式(6)」を得る。

$$n = \frac{2.176 - 4.306e}{0.3121 - 0.228e} \quad (6)$$

Smith らによる理論線では、間隙比が最大間隙比を越えて大きくなると配位数が負になってしまう。そこで、モデルでは Smith らによる理論線で配位数が負になる間隙比では、配位数を 0 に補正した(図-4)。従って n_{SS} は

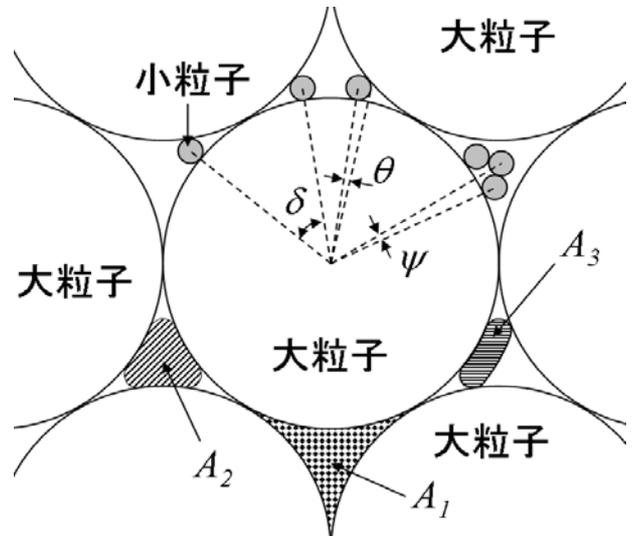


図-3 大粒子が最密の状態の模式図

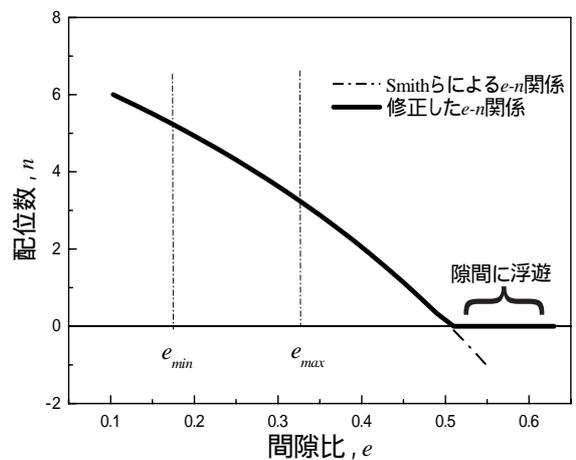


図-4 n_{SS} を求めるのに用いた e - n 関係

$$\left. \begin{aligned} n_{SS} &= \frac{2.176 - 4.306e_S}{0.3121 - 0.228e_S} & (e_{\max} \leq e < 0.5) \\ n_{SS} &= 0 & (0.5 \leq e) \end{aligned} \right\} (7)$$

となる。その他の配位数は、「式(8)」のようになる。

$$\left. \begin{aligned} n_L &= n_{LL} + n_{LS} \\ n_S &= n_{SS} + n_{SL} \\ n &= \frac{N_S n_S + N_L n_L}{N_S + N_L} = \frac{n_S + D n_L}{1 + D} \end{aligned} \right\} (8)$$

(2) W_S が大きい場合の配位数モデル ($W_S L$ -model)

前提条件より、大粒子同士の配位数は 0 である。

$$n_{LL} = 0 \quad (9)$$

大・小粒子間の接触については、密詰めであっても、実際には大粒子のすぐ外側の小粒子がきれいに配列して接触することはなく、配列に乱れが生じると推測される。後述するシミュレーションにおいては、**図-5(a)**に示すように、最密に詰められた小粒子の中に大粒子を配置している。大粒子を配置して、大粒子と重なる位置にある小粒子を排除して初期状態としたが、小粒子の配列は乱れていないものの、大粒子の周囲に隙間が存在する。その後、等方圧密すると**図-5(b)**に示すように大粒子に小粒子がまんべんなく接触するようになる。この状態では、大粒子の周りに接触する小粒子の配列は多少乱れているが、大粒子に対して小粒子が密に接触しているパターン(**図-5(b)**の A)と、疎に接触しているパターン(B)のどちらかに概ね区分される。これは、最密の小粒子が十分大きな大粒子と接触するパターンには、小粒子が大粒子と密に接するパターン(**図-6(a)**)と、疎に接するパターン(**図-6(b)**)の基本的な 2 パターンが存在するためと考えた。それぞれのパターンで小粒子が大粒子に接触した場合の大・小粒子の配位数は

$$\left. \begin{aligned} n_{LS}^{\max} &= \frac{\pi}{\theta} = \frac{\pi}{\sin^{-1}\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)} \\ n_{LS}^{\min} &= \frac{\pi}{\psi} = \frac{\pi}{\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1+\alpha}\right)} \end{aligned} \right\} (10)$$

となる。**図-5**において仮に大粒子が正方形であると仮定して、小粒子の規則配列方向に沿った角度で埋め込まれている場合を考えると、2 つの接触パターンは同数発生する。埋め込まれる角度が異なる場合や、粒子が円形の場合には、**図-6**の 2 パターン以外の接触状況も存在するが、本モデルでは第 1 次近似として、平均的な n_{LS} を次のように評価した。

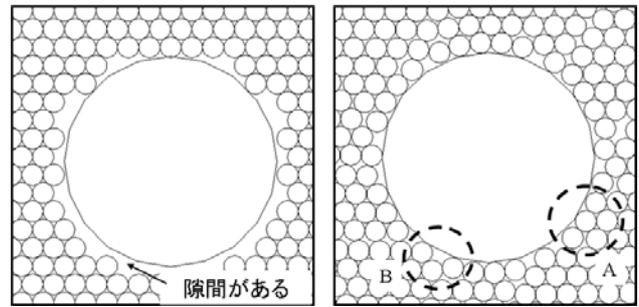
$$n_{LS} = \frac{1}{2}(n_{LS}^{\max} + n_{LS}^{\min}) \quad (11)$$

n_{LS} に対して、大粒子 1 つ当たり的大粒子に接触しない小粒子数(n_{LS}^{-1})は

$$n_{LS}^{-1} = \frac{1}{D} - n_{LS} \quad (12)$$

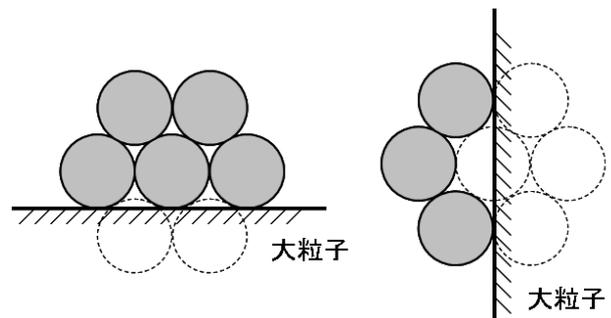
となる。 n_{LS} と n_{LS}^{-1} から、他の配位数は「式(13)」となる。

$$\left. \begin{aligned} n_{SL} &= \frac{n_{LS}}{n_{LS} + n_{LS}^{-1}} \\ n_{SS} &= \frac{4n_{LS} + 6n_{LS}^{-1}}{n_{LS} + n_{LS}^{-1}} \\ n_L &= n_{LL} + n_{LS} \\ n_S &= n_{SS} + n_{SL} \\ n &= \frac{N_S n_S + N_L n_L}{N_S + N_L} = \frac{n_S + D n_L}{1 + D} \end{aligned} \right\} (13)$$



(a) 大粒子を配置 (b) 等方圧密後

図-5 小粒子中に埋め込まれた大粒子



(a) 密に接するパターン (b) 疎に接するパターン

図-6 大・小粒子接触の基本パターン

(3) 配位数モデルに与える粒径比(α)の影響

$W_S S$ -model では大粒子同士の接触が最大(**図-1(a),(b),(c)**)であり、 $W_S L$ -model では大粒子が小粒子の中に埋もれている(**図-1(d),(e)**)という前提条件を与えて幾何学的考察に基づいて構築している。そのため、 $W_S S$ -model の最大 W_S と $W_S L$ -model の最小 W_S の間にどちらのモデルでもカバーできない遷移領域が存在する。モデルで W_S は、

$$W_s = \frac{N_s \pi r_s^2}{N_s \pi r_s^2 + N_L \pi r_L^2} \quad (14)$$

$$= \frac{\left(\frac{N_s}{N_L}\right)}{\left(\frac{N_s}{N_L}\right) + \alpha^2}$$

ただし、小粒子数を大粒子数で除した値 (N_s/N_L) は、

$$\left. \begin{aligned} \frac{N_s}{N_L} &= \frac{2\{\alpha^2[0.161 - 3(\tan\theta - \theta)]\}}{\pi(1+e)} \\ &\quad + \frac{6\theta + \pi}{\pi(1+e)} \quad (W_s \geq W_s^b) \\ \frac{N_s}{N_L} &= \frac{0.323\alpha^2 + 6.928\alpha + 3.464}{\pi(1+e)} \quad (W_s < W_s^b) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

と表せ、 W_s が粒径比 (α) の関数であるため、遷移領域も粒径比 (α) に依存する。 W_sS -model と W_sL -model の取り得る W_s の範囲と粒径比 (α) の関係を図-7 に示す。粒径比 (α) が小さいときはどちらのモデルでもカバーできない遷移領域が大きい。粒径比 (α) が大きくなるに従って、両モデルの限界は $W_s = 8.5$ に収束していくことが分かった。 $W_s = 8.5$ は Lade らによる間隙比の理論線において、最小間隙比となる W_s^b の値と一致する。

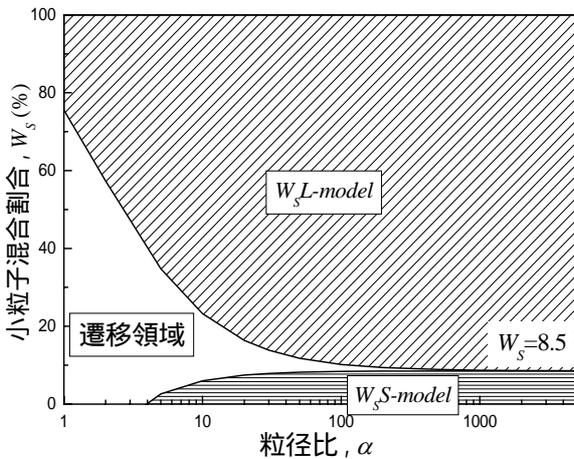


図-7 モデルの適用範囲

2.2 せん断強度の予測モデル

集合体のせん断強度は W_s によって変化すると予測される。 W_s によって粒子同士の接触の仕方が変わること、せん断特性に支配的な粒子が変わるからである (図-1)。大・小単粒度のせん断強度と配位数から W_s の異なる集合体のせん断強度を予測することを目指し、予測式を考案する。

密に詰まった大粒子と小粒子の単粒度の集合体と同じ荷重を受け持っている状態 (図-8) で大粒子 1 つ分の領域における接触点数を考える。大粒子の 1 つの粒子に注目すると (図-8 左) 少ない接触点で荷重を支えてい

るが、接触点 1 つ当たりの接触力が大きい。これに対して、小粒子の集合体 (図-8 右) では、大粒子 1 つ分の領域内でたくさんの小粒子が荷重を支えているため、領域内の接触点数が多く、接触点 1 つ当たりの接触力は小さい。そこで、集合体の内部摩擦角を考えるに当たって、粒子面積で重み付けした接触点数に応じて大・小粒子の影響度を定めることにした。ただし、大・小粒子集合体の接触点には、(1)大粒子同士、(2)小粒子同士及び(3)大・小粒子間の接触点の 3 種類がある。本研究では、(1)大粒子同士の接触点数を C_{LL} 、(2)小粒子同士の接触点数と(3)大・小粒子間の接触点数を合わせて C_S として 2 つに分類した。せん断強度を考える上で、大・小粒子間の接触点数を C_S に加えた理由は、粒子間摩擦角などの接触点特性は粒子表面の小さな凹凸によることから、大・小粒子間の接触点においてはサイズの小さい小粒子の接触点特性が支配的になるため、大・小粒子間には小粒子の接触点特性を当てはめるものとしたためである。集合体の内部摩擦角 (ϕ) の予測式は、

$$\phi = \frac{C_S A_S \phi_S + C_{LL} A_L \phi_L}{C_S A_S + C_{LL} A_L} \quad (16)$$

$$= \frac{n_S W_s \phi_S + n_{LL} (100 - W_s) \phi_L}{n_S W_s + n_{LL} (100 - W_s)}$$

となる。ただし A_L, A_S は大・小粒子面積、 C_{LL}, C_S は大粒子同士及び小粒子の接触点数、 n_{LL}, n_S は大粒子同士及び小粒子の配位数、 ϕ_L, ϕ_S は大・小粒子の単粒度密詰め試料での内部摩擦角である。

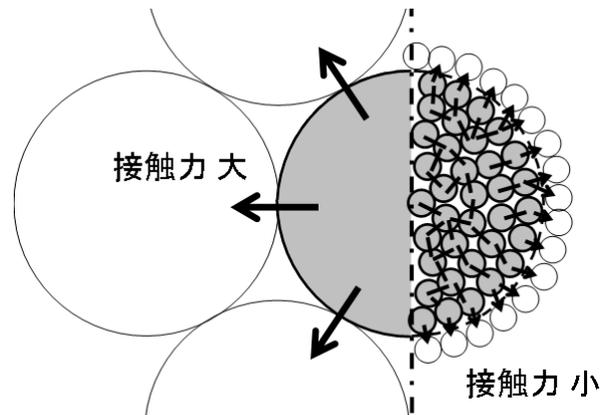


図-8 接触点数と接触力の大きさ

3. DEM シミュレーション

3.1 粒子集合体の作製

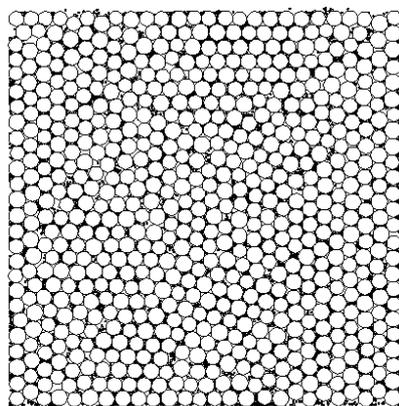
DEMシミュレーションには松島らによる2次元DEMの公開プログラム「DEMseg」⁹⁾を使用した。粒径比約 10:1 の円形要素をランダムに配列した集合体と規則的に配列した集合体を作製し、それぞれの間隙比及び配位数

を計測した。ただし、ランダム配列については粒子が規則的に配列するのを防ぐため、大・小粒子の粒径をそれぞれの平均粒径 $\pm 10\%$ に分布させた。

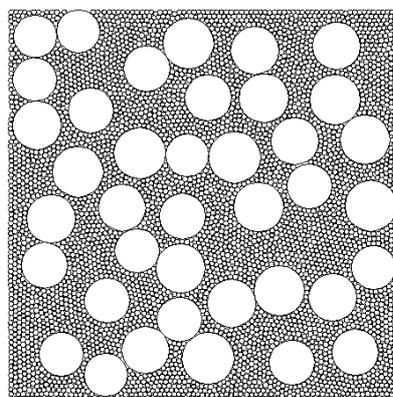
(1) ランダム配列

大・小の円形要素を、 W_S が 0%、5%、10%、15%、20%、30%、50%、100%となるように粒度配合を決定し、総粒子数が約4000個になるように大・小粒子数を計算して、

指定した領域内にランダムに発生させた。その後、全粒子の粒子間摩擦角を 0 にし、等方圧力で圧縮して図-9(a)に示すような試料を作製した。いずれの粒子集合体においても総粒子数及び大・小粒子の粒径を等しくしているため、集合体のサイズは W_S に応じて異なっている。各集合体の間隙比を Lade ら³⁾による理論線とともに図-10に、粒径分布を図-11に示す。今回のシミュレー

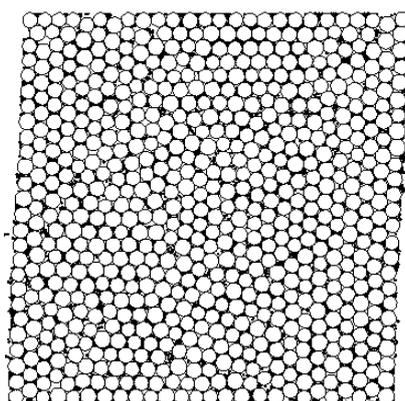


$W_S = 5\%$

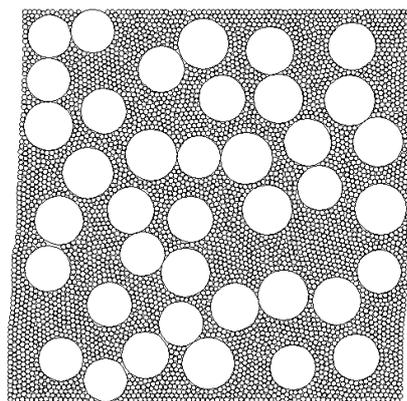


$W_S = 50\%$

(a) 初期状態 (せん断ひずみ 0%)

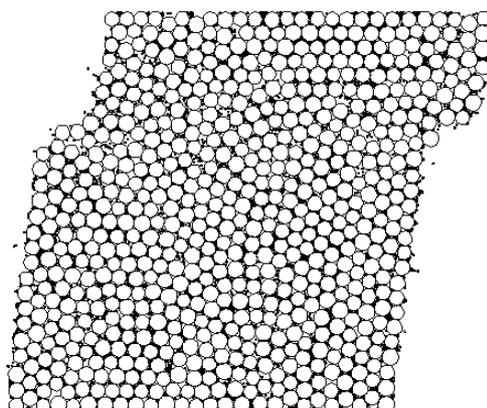


$W_S = 5\%$

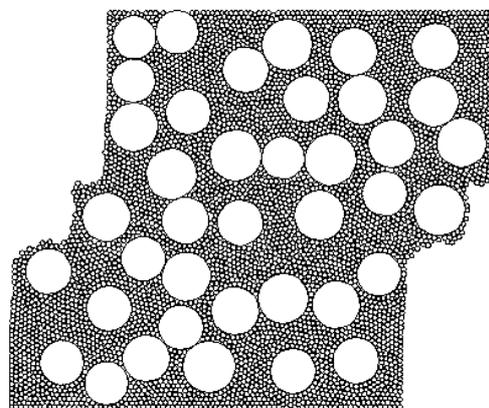


$W_S = 50\%$

(b) ピーク強度付近 (せん断ひずみ 3.75%)



$W_S = 5\%$



$W_S = 50\%$

(c) せん断終了時 (せん断ひずみ 25%)

図-9 ランダム配列の粒子集合体(右方向せん断)

ションでは、粒径比が 10:1 で小粒子の大きさが大粒子と比べて無視できるほど小さくないため、間隙比は理論値よりも大きくなった。

(2) 規則配列

大・小の円形要素を規則的に配列した。具体的には W_S が小さい集合体 ($W_S < W_S^b$) では大粒子を最密で詰めた後に小粒子を大粒子の隙間に配置した。 W_S が大きい集合体 ($W_S > W_S^b$) では小粒子を最密で詰めた後に、大粒子を等間隔に配置し、大粒子と位置が重なった小粒子を除去することにより大粒子を小粒子内に埋め込んだ。 W_S は 0%, 2.9%, 5.7%, 30.7%, 53.5%, 100% となった (図-12)。その後、全粒子の粒子間摩擦角を 0 にし、等方圧縮して図-13 に示すようなモデル試料を作製した。集合体のサイズを全て等しくしたため、粒子数は集合体ごとに異なっている。各集合体の間隙比を Lade らによる理論線とともに図-14 に示す。 W_S が小さいケースは Lade らの理論線と一致したが、 W_S が大きいケースでは、理論線と一致しなかった。 W_S が大きい集合体では初期配置は規則的であるが、大粒子を埋め込む過程で大粒子の周りに空隙が生じ (図-5(a))、その後、等方圧縮することで大粒子周辺の小粒子の配列が乱れること (図-5(b)) 及び、ランダム配列と同様に粒径比が小さいことが原因である。

3.2 粒子集合体のせん断

せん断に当たって、粒子の初期配置がせん断強度に及ぼす影響を考慮して、同じ初期配置の集合体に対して、せん断方向を上下左右の 4 方向に変えた 4 ケースのせん断を行うことにした。具体的に、左・右方向のせん断では、ランダム配列により作製した粒子集合体の上・下端の 200~500 粒子を結合粒子として、下端を固定し、上端に鉛直方向の一定圧力を加えながら左又は右方向に定速で移動させてせん断した。また、上・下方向にせん断するケースでは、左・右端を結合粒子として、左端を固定し、右端を上・下方向に定速で移動させた。右方向せん断の一例を図-15 に示している。

せん断するに当たり、大・小粒子の粒子間摩擦角を表-3 に示す 4 通りに設定し、粒子間摩擦角が粒子集合体のせん断特性に及ぼす影響を調べるとともに、配位数についても検討した。なお、小粒子と大粒子の接触計算において粒子間摩擦角が異なる場合には、小粒子の摩擦角を用いた。また、せん断する際、せん断方向の境界は周期境界としている。

3.3 せん断結果

W_S の異なる初期状態に対して右方向にせん断変形した例のうち、ピーク強度付近 (せん断ひずみ 3.75%)

の様子を図-9(b)に、せん断終了時の様子 (せん断ひずみ 25%) を図-9(c)に示している。各ひずみ段階における粒子の変位状況には、大・小粒子の差は見られなかった。内部摩擦角で表したせん断強度と体積ひずみをせん断ひずみに対してプロットした一例 ($W_S = 10%$) を図-16 に示す。せん断ひずみ (ν) と体積ひずみ (ε_v) は、それぞれ「式(17)」及び「式(18)」のように求めた。ただし、 h 、 Δh 及び Δd は図-15 に定義した長さに対応する。

$$\nu = \frac{\Delta d}{h} \quad (17)$$

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta h}{h} \quad (18)$$

せん断強度はせん断初期にピークとなりその後残留状態に至っている。また、正のダイレイタンスが生じており、いずれも密詰め試料の特性が表現できている。

大・小粒子の粒子間摩擦角が等しい場合 (1a45sm45, 1a27sm27) のピーク時の内部摩擦角と W_S の関係を図-17 に示す。上下左右の異なる方向にせん断した 4 通りのシミュレーションの平均をプロットしており、標準偏差をエラーバーで表している。この図より粒子間摩擦角が大きくなるとせん断強度も増加することが分かる。図-10 に示したように、 W_S により密度が大きく変化し、 W_S が 20% の場合は単粒度と比べて間隙比が半分程度となるにもかかわらず、せん断強度はほぼ一定となっていることが注目される。

図-18 は、大・小粒子で粒子間摩擦角を変えた場合の結果を併せてプロットしている。 W_S が 30% 以上の場合には、大粒子の粒子間摩擦角に関係なく、小粒子の粒子間摩擦角が大きい場合 (1a45sm45, 1a27sm45) に粒子集合体のせん断強度が大きくなっており、小粒子の粒子物性が支配的であることが分かる。一方、 W_S が 10% 未満の場合には、大粒子の粒子間摩擦角が大きい場合 (1a45sm45, 1a45sm27) に粒子集合体のせん断強度が大きくなっている。これより、 $W_S = 10 \sim 30%$ を境に W_S が小さい場合は大粒子の物性、大きい場合には小粒子の物性と、集合体のせん断強度を支配する粒子が異なっていると見てよい。しかし、小粒子の粒子間摩擦角が大きい場合 (1a27sm45) にもせん断強度はある程度大きくなっており、さらに詳細な検討が必要である。大粒子同士の配位数 (n_{LL}) 及び小粒子の配位数 (n_S) と W_S の関係を図-19 に示す。 W_S が大きくなるほど n_S は増加し、 n_{LL} は減少している。 W_S が 10~30% のとき、 n_{LL} と n_S の大小関係は急激に反転しており、粒子間摩擦角を変えた場合のせん断強度への影響 (図-18) と整合性のある結果となっている。このことより、粒子の配位数とせん断強度に正の相関関係があると推測したモデルの考え方は妥当であると見てよい。

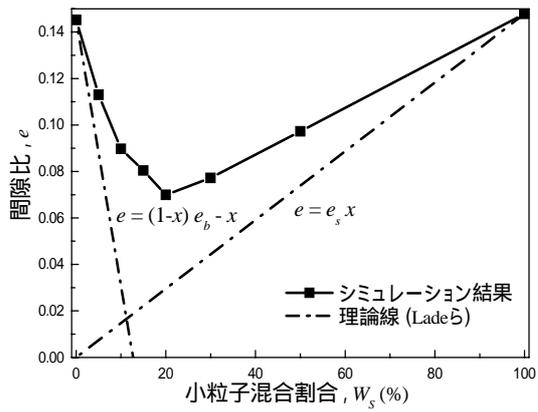


図-10 間隙比 (ランダム配列)

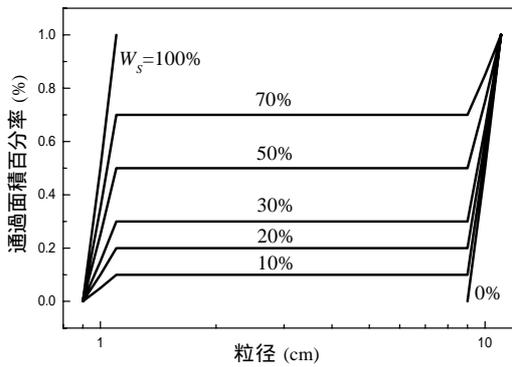


図-11 粒径分布 (ランダム配列)

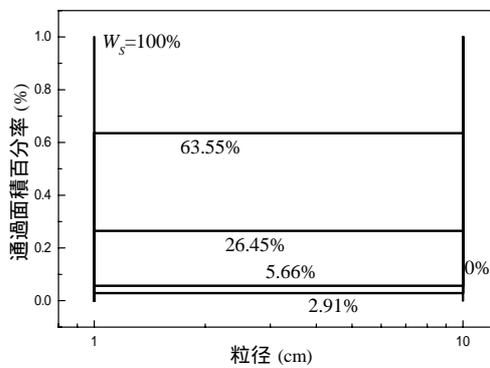


図-12 粒径分布 (規則配列)

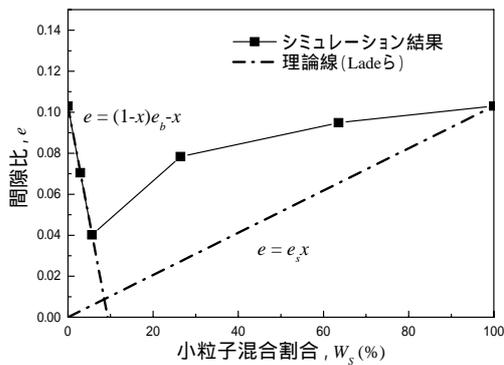
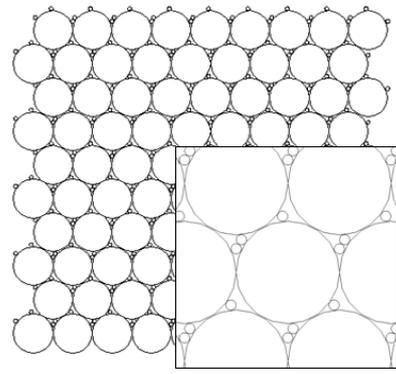
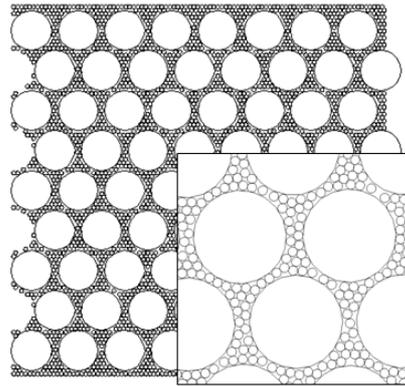


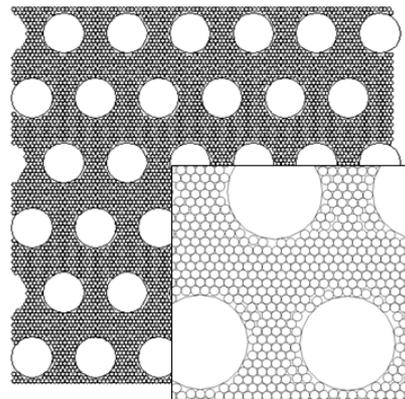
図-14 間隙比 (規則配列)



$W_s = 2.9\%$



$W_s = 30.7\%$



$W_s = 53.5\%$

図-13 規則配列の粒子集合体 (右下は拡大図)

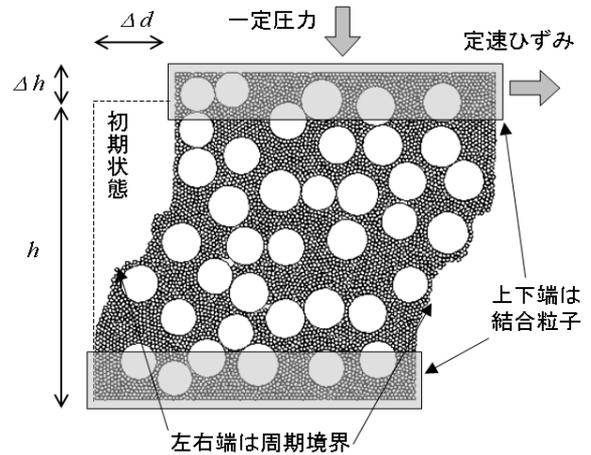


図-15 せん断の方法と各種ひずみの定義

表-3 粒子間摩擦角の組合せ

	粒子間摩擦角(度)	
	大粒子	小粒子
la45sm45	45	45
la45sm27	45	27
la27sm45	27	45
la27sm27	27	27

4. 予測モデルの評価

4.1 配位数予測モデルの評価

モデルによる配位数の予測とランダム配列及び規則配列のシミュレーションでの初期配位数を併せて図-20(a)~(g)に示す。ただし、 $W_S S$ -model と $W_S L$ -model の間の遷移領域(図-7)は線形補間して点線で示している。

大粒子同士の配位数 n_{LL} (図-20(d))は、規則配列はモデルで正確に予測できている。一方、ランダム配列では W_S が大きくなるに従って n_{LL} が徐々に減っている。これは粒子の配列が一意的に決まっているのではなくばらつきがあることを示しており、このばらつきをモデルに組み込むことができれば、予測精度を更に改善することができると思われる。

大粒子の配位数 n_L 及び大-小粒子の配位数 n_{LS} (図-20(b), (e))では、規則配列はよく予測できているが、ランダム配列では、シミュレーション結果より大きな間隙比を予測している。この原因は、 W_S が大きい場合に、モデルでは n_{LL} が0になるのに対して、ランダム配列のシミュレーションでは n_{LL} が0にはならず徐々に減っているため、大粒子に対して小粒子が接触できる範囲がモデルよりも限定されることが考えられる。

全体の配位数 n 及び小-大粒子の配位数 n_{SL} (図-20(a), (f))では、規則配列はモデルで高い精度で予測できている。一方、ランダム配列では $W_S = 5 \sim 20\%$ の領域で殆ど上昇が見られず、予測式や規則配列の配位数が大きく上昇するのは異なっている。モデルでは遷移領域を線形補間しているが、ランダム配列のシミュレーション結果を見る限り、線形補間よりも正確な方法でモデルを改良する必要があると考えられる。

小粒子の配位数 n_s 及び小粒子同士の配位数 n_{SS} (図-20(c), (g))では、 W_S が小さい領域での規則配列をモデルは正確に予測している。ランダム配列と W_S が大きい領域の規則配列はモデルよりも小さくなっているが、 W_S が大きくなるに従って配位数が増えていくという傾向は同じである。モデルでは単粒度の小粒子が最密である

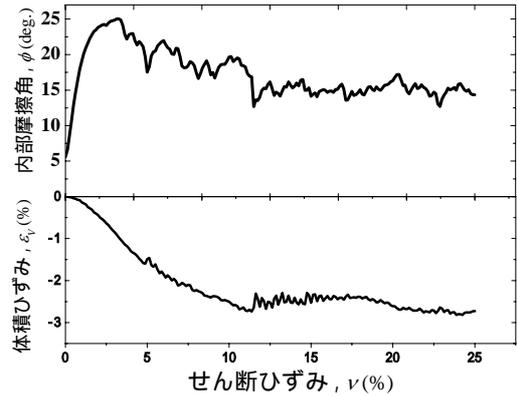


図-16 せん断強度とダイレイタンス

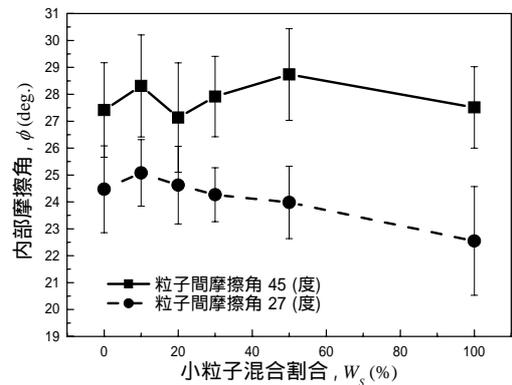


図-17 粒子間摩擦角と内部摩擦角

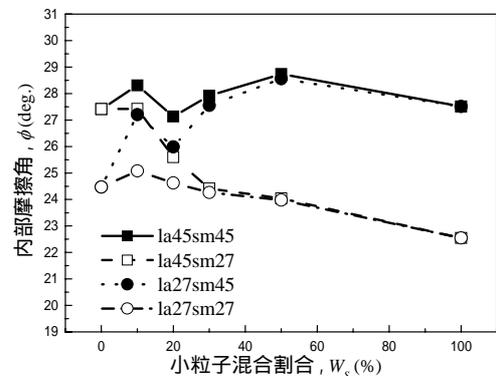


図-18 W_S による内部摩擦角の変移

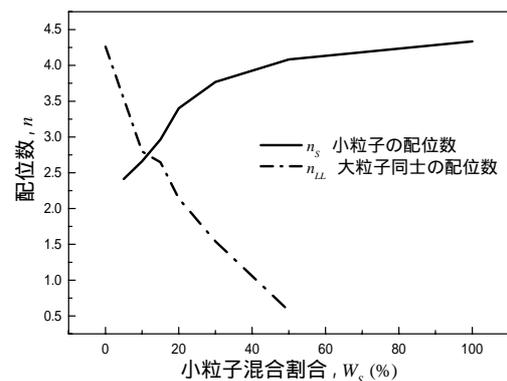
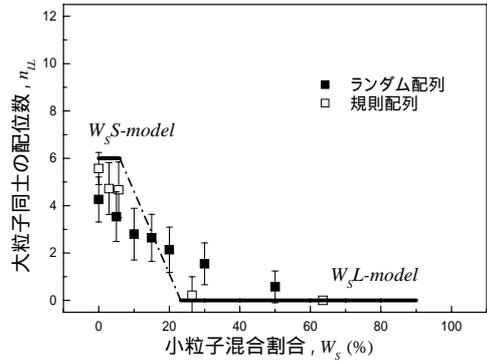


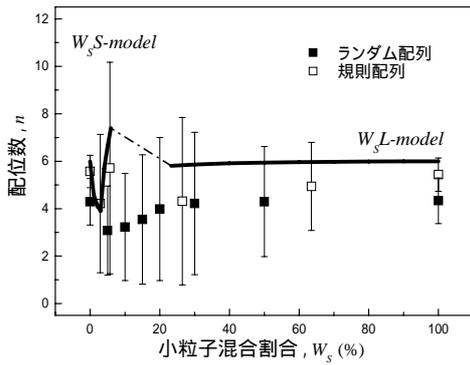
図-19 W_S による配位数の変移

として配位数を 6 としているのに対して, ランダム配列も規則配列も W_S が大きい領域では小粒子の配列に乱れが生じ, 配位数が 6 よりも小さくなるのが原因である.

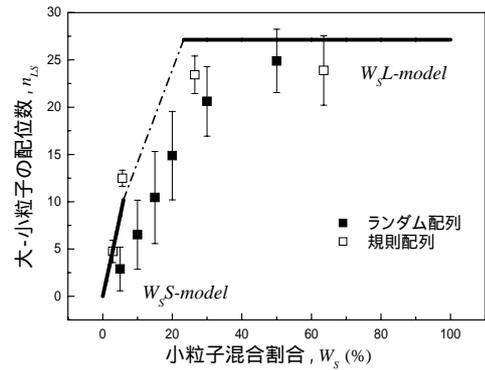
予測モデルは配位数のばらつきは考慮できていないものの, 限られた情報から配位数を予測するモデルとしては十分に高い精度で予測できていると判断し, 予測した配位数を元に集合体のせん断強度を求めた.



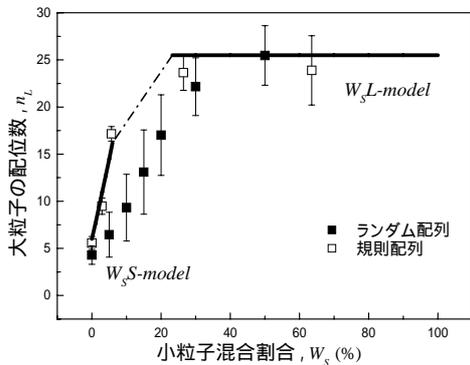
(d) 大粒子同士の配位数 (n_{LL})



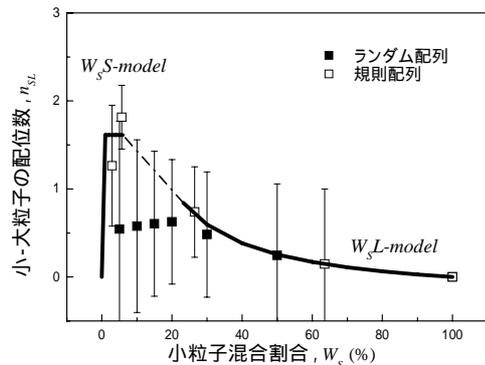
(a) 全体の配位数 (n)



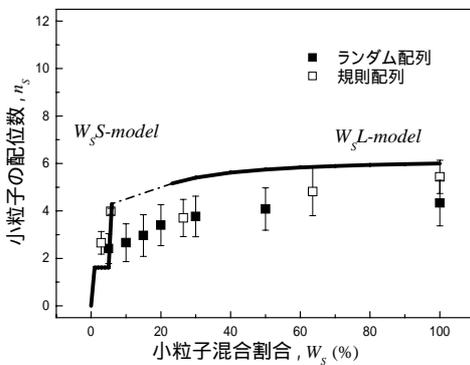
(e) 大-小粒子の配位数 (n_{LS})



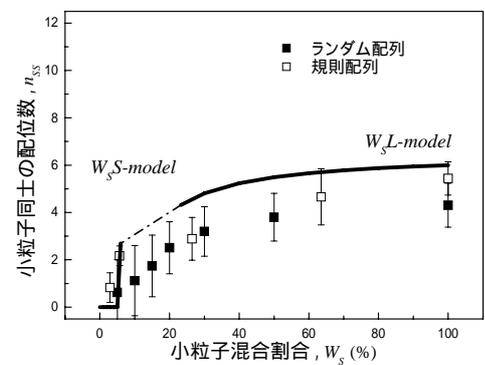
(b) 大粒子の配位数 (n_L)



(f) 小-大粒子の配位数 (n_{SL})



(c) 小粒子の配位数 (n_S)

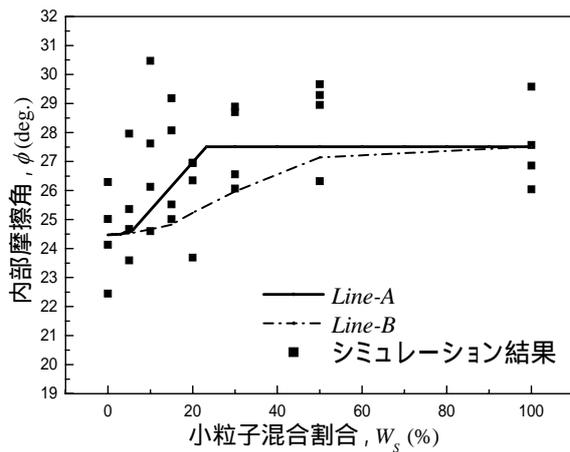


(g) 小粒子同士の配位数 (n_{SS})

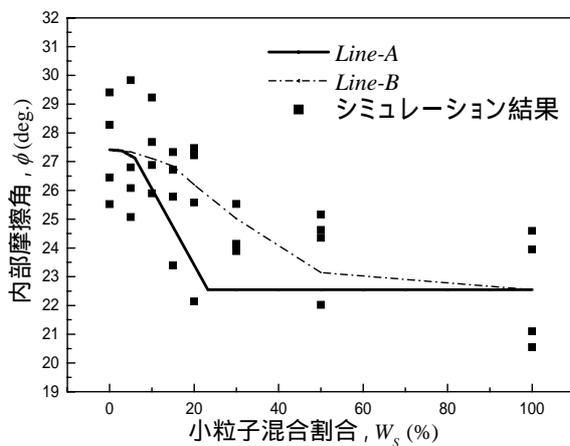
図-20 配位数のシミュレーション結果と予測線

4.2 せん断強度予測モデルの評価

予測モデルをランダム配列の集合体のせん断強度と併せて図-21(a), (b)に示す。せん断強度予測モデルには配位数の情報が必要であるが、配位数予測モデルにより予測した配位数を用いたものを実線 (Line-A) で、シミュレーションで観測した配位数を用いたものを破線 (Line-B) でそれぞれ表している。いずれのモデルでも、 W_s が小さい領域では大粒子の粒子物性が支配的であり、 W_s が大きい領域では小粒子の粒子物性が支配的となっている。実際の配位数によるモデル (Line-B) は、 W_s が大きくなるに従って粒子物性の支配的な粒子が大粒子から小粒子に徐々に変化していく様子を表現できている。一方、予測配位数によるモデル (Line-A) でも、大・小粒子が支配的な領域は明確に表せており、基本的な粒子物性 (大・小粒子の粒径比 (α), 小粒子の混合割合 (W_s)) と大・小粒子の単粒度でのせん断強度 (ϕ_L, ϕ_S) から粒子集合体のせん断強度 (ϕ) をある程度正確に予測することができた。



(a) la27sm45



(b) la45sm27

図-21 内部摩擦角のシミュレーション結果と予測線

5. まとめ

様々な配合の大・小粒子集合体の配位数及びせん断強度を予測する、以下のようなモデルを構築した。

- 1) 粒子物性 (大・小粒子の粒径比 (α), 小粒子の混合割合 (W_s)) から各種の配位数 ($n, n_L, n_S, n_{LL}, n_{LS}, n_{SL}, n_{SS}$) を予測するモデル
- 2) 大粒子同士及び小粒子の配位数 (n_{LL}, n_S), 大・小粒子単粒度でのせん断強度 (ϕ_L, ϕ_S) から混合体のせん断強度 (ϕ) を予測するモデル
また、2次元DEMを用いて粒径比約10:1の大・小粒子密詰め集合体を作製し、単純せん断シミュレーションを行って、以下の知見を得た。
- 3) 粒子間摩擦角を大きくするとせん断強度が増大するが、小粒子混合割合を変化させてもせん断強度はあまり変化しなかった。
- 4) 小粒子混合割合30%以上の時は小粒子の粒子物性が支配的であり、10%以下の時は大粒子の粒子物性が支配的であった。

上記モデルにより予測した配位数及びせん断強度をDEMシミュレーション結果と比較した。その結果、

- 5) せん断強度予測モデルと配位数予測モデルを組み合わせることにより、限られた情報から、 W_s に応じたせん断強度を予測することができた。

本研究で構築したモデルは、最密に詰められた大・小粒子集合体に限定して適用することができる。従って、より一般的な粒状体に本研究成果を適用するためには、(1)どんな詰まり方の粒状体にも対応できるようにモデルを拡張すること、及び(2)滑らかな粒径分布の粒状体を本モデルに適用する手法を確立すること、が必要であり、今後の課題として検討している。

参考文献

- 1) ロックフィル材料の試験と設計強度編集委員会: ロックフィル材料の試験と設計強度, 社団法人土質工学会, 1982
- 2) 社団法人地盤工学会: 礫質土の力学特性に関するシンポジウム, 2001
- 3) Lade, P. V., Liggio, C. D., Jr., and Yamamuro, J. A.: Effects of Non-Plastic Fines on Minimum and Maximum Void Ratios of Sand, Geotechnical Testing Journal, GTJODJ, Vol. 21, No. 4, pp. 336-347, 1998
- 4) Smith, W. O., Foote, P. D. and Busang, P. F.: Packing of homogeneous spheres, Phys. Rev., Vol. 34, pp.1271-1274, 1929
- 5) Chang, C.S., Misra, A.: Application of uniform strain

- theory to heterogeneous granular solids, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 116, No. 10, pp.2310-2328
- 6) Cundall, P. A.: A computer model for simulating progressive, large-scale movements in blocky rock systems, Symp. ISRM, Nancy, France. Proc. 2, pp129-136, 1971
- 7) J.デュラン (中西秀・奥村剛 共訳):粉状体の物理学, 吉岡書店, 2002
- 8) 平林大輝, 福間雅俊, 前田健一: 粒子構造に着目した粒状体の斜面上の流れ挙動, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.11,2008
- 9) Matsushima, T. and Saomoto, H.: Discrete Element Modeling for Irregularly-shaped Sand Grains, Proc. NUMGE2002, Numerical Methods in Geotechnical Engineering, Mestat(ed), pp.239-246, 2002
(2009年4月9日 受付)