# 粒状体の高速せん断流におけるせん断応力とレイノルズ応力の評価

Evaluation of shear and Reynolds stresses in rapid flow of granular media

# 岸野佑次\*・冨山真明\*\*・土倉泰\*\*\*

Yuji KISHINO, Masaaki TOMIYAMA and Toru TSUCHIKURA

\*フェロー会員 工博 東北大学名誉教授(〒983-0833 仙台市宮城野区東仙台 6-6-22-502) \*\*学生会員 前橋工科大学大学院 工学研究科建設工学専攻(〒371-0816 前橋市上佐鳥町460-1) \*\*\*正会員 工博 前橋工科大学 工学部社会環境工学科(〒371-0816 前橋市上佐鳥町460-1)

A computer simulation is performed to study the constitutive characteristics of granular shear flow. The method used is the dynamic version of GEM that one of the authors initially proposed for static problems. The result obtained supports the proportionality of the shear stress to the square of shear strain rate as many existing experimental or numerical studies. However, this proportionality is lost in the condition of high shear rate due to clustering of grains. The relationships of kinetic energy and Reynolds stress to the shear strain rate are also studied. The Reynolds stress for discrete systems is defined from a statistical consideration of energy balance.

Key Words : numerical simulation, granular flow, constitutive equation, kinetic energy, Reynolds stress

## 1. はじめに

粒状体の流れは塑性せん断変形の延長としての静的 な流れから個々の構成粒子がばらばらの運動をする高 速の流れに至るまで,多岐に亘る.このような動的挙 動から構成則を抽出するためには,適切な要素試験を 行うことが必要であり,従来よりその観点から実験や シミュレーション解析が行われてきた.

この分野の先駆的な研究は Bagnold<sup>1)</sup>によってなさ れ,密度がほぼ等しい粒子と液体を用いて重力の影響 を排除したせん断試験を行い,せん断応力がせん断ひ ずみ速度の2乗に比例し,その比例定数は粒状体の粒 子充填率の関数として与えられるという結論が見いだ されている.この結論は,その後多くの研究者による 実験<sup>2),3)</sup>やシミュレーション解析<sup>4)</sup>により確認されてい る.Campbellら<sup>4)</sup>は,さらに,乱流理論で問題となる レイノルズ応力に関してもシミュレーション解析にお いて具体的に値を求めた上で考察している.構成則を 得るという観点からは,レイノルズ応力の評価も重要 である.

上述の研究において, せん断応力がせん断ひずみ速 度の2乗に比例するという点では一致しているが, そ の比例定数が粒状体の粒子充填率によってどのように 変化するかなどについて様々な検討がなされているが, 未だ決定的な結論は得られていない.特に Bagnold の 式の適用限界についての議論は十分になされていない 現状にある.これは,実験の困難さや,実験や解析で 得られたデータの評価方法に起因していると考えられ る.要素試験としての体裁を整えるためには,試験領 域内の力学的な一様性が問題となる.静的せん断にお ける変形局所化現象から想像されるように,動的なせん断であってもこのような局所化が生じていることを 念頭におくべきであると考えられる.

以上のような背景の下,本文は精度の高いシミュレー ション解析に基づき,要素試験として適正なデータ整 理を行うことにより,より信頼度のある結論を誘導す ることを目的とした.ここでは,粒状体の動的構成則 を得るための第1歩として,動的構成則として考慮す べき基本事項について定性的な検討を加えることを目 的としている、そのため、重力はないものとし、せん 断領域内において流れが偏在しない状態を主な考察の 対象とする.動的構成則として考慮すべき基本要素の 1つとしてレイノルズ応力は重要であり,その力学的 な意味を明らかにするために離散体としての定式化を 行い,考察した.動的構成則としては粒子充填率の変 化に伴う挙動の変化が重要であるので,これを広汎に 変化させて定性的な検討を行った.無重力下での理想 的な高速流れの実験例は未だないため、比較の対象と なる実験データがない.したがって,ここで得られた 結果を定量的に検証することは不可能であるが,粒状 体の動的構成則を定式化する際の思考モデルとして利 用することは可能であると考えられる.

本研究におけるシミュレーション解析には著者の1 人が当初静的解析のために開発した粒状要素法<sup>5)</sup>を発 展させた動的粒状要素法<sup>6),7)</sup>を用いた.動的粒状要素 法は線形加速度法に基づく逐次解析法であり,個別要 素法<sup>8)</sup>の陽的アルゴリズムに含まれるような数値理論 誤差は排除されている.なお,動的粒状要素法に関す る最新の説明を次節で示す.



図-1 接触点における局所座標系

### 2. 動的粒状要素法

2.1 粒子の運動と粒子に作用する力

粒状体を構成する粒子の運動は並行移動ならびに回転から成る.いま,構成粒子が球であるとし,ある微小時間ステップ  $\Delta t$ における運動を粒子重心の座標の変化量  $\Delta x$  と微小回転ベクトル  $\Delta \omega$  で表す.基準状態  $t = t_0$  との対応は,並行移動については  $\Delta x$ の和として与えられる相対位置ベクトル  $x - x_0$ ,回転については,回転増分

$$\Delta \mathbf{R} = \Delta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \tag{1}$$

の和として与えられる回転テンソル R により表現する ことができる.各構成粒子には,並行移動に対応して 力,回転に対応してモーメントが生じる.ある粒子 A に作用する全ての力とモーメントの和を次式の列ベク トルで表す.

$$F_{\rm A} = (F_1, F_2, F_3, M_1/r, M_2/r, M_3/r)_{\rm A}^{\rm T}$$
 (2)

ここに,モーメントについては,次元を力の次元に揃えるため,粒子の半径rで除した.粒子に作用する力とモーメントは,次式のように,粒子間バネの抵抗 $F_{\rm A}^{\rm K}$ ,粒子間粘性の抵抗 $F_{\rm A}^{\rm C}$ ,粒子の慣性力と慣性モーメント $F_{\rm A}^{\rm M}$ ,物体力や境界粒子に作用する外力 $F_{\rm A}^{\rm E}$ からなる.

$$F_{\rm A} = F_{\rm A}^{\rm K} + F_{\rm A}^{\rm C} + F_{\rm A}^{\rm M} + F_{\rm A}^{\rm E} \tag{3}$$

カとモーメントの動的平衡条件は上式が零となること である.

粒子 A の 
$$\Delta t$$
 における運動を次式の列ベクトルで表す  
 $\Delta X_{A} = (\Delta x_{1}, \Delta x_{2}, \Delta x_{3}, r\Delta\omega_{1}, r\Delta\omega_{2}, r\Delta\omega_{3})_{A}^{T}$ (4)  
ここに,回転については,次元を変位の次元に揃える  
ため, $r$ を乗じた.粒子 A は粒子 B に接触していると  
し,その接触点 C において,図-1 に示す局所座標系  
( $\mathbf{n}, \mathbf{t}_{\varphi}, \mathbf{t}_{\theta}$ )を導入する.図には粒子 A 側の基底ベクト  
ルを示した.粒子 A 上の接触点 C の変位増分は次式で  
与えられる.

$$\Delta \mathbf{u}_{\rm AC} = \Delta \mathbf{x}_{\rm A} + \Delta \omega_{\rm A} \times \mathbf{r}_{\rm AC} \tag{5}$$

ここに, **r**<sub>AC</sub> は接触点 C の粒子 A の重心からの相対位 置ベクトルである. 粒子 A 上の接触点 C の変位増分の 局所座標系における成分を次式の列ベクトルで表す.

$$\Delta U_{\rm AC} = (\Delta u_n, \, \Delta u_\varphi, \, \Delta u_\theta)_{\rm AC}^{\rm T} \tag{6}$$

この粒子 A 上の接触点 C の変位増分は  $\Delta t$  における粒 子 A の運動と次式で関係づけられる.

$$\Delta U_{\rm AC} = T_{\rm AC} \Delta X_{\rm A} \tag{7}$$

ここに,

$$\mathbf{T}_{AC} = \begin{bmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\\ \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ -\cos\varphi\cos\theta & -\cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi \end{bmatrix}_{AC} (8)$$

は座標変換係数行列である.同様に粒子 B上の接触点 Cの変位増分は  $\Delta t$ における粒子 Bの運動と次式で関係づけられる.

$$\Delta U_{\rm BC} = T_{\rm BC} \Delta X_{\rm B} \tag{9}$$

したがって,接触点 C における粒子 A, B 間の相対変 位増分は次式で与えられる.

$$\Delta D_{AB} = (\Delta d_n, \, \Delta d_\varphi, \, \Delta d_\theta)_{AB}^{T}$$
$$= T_{AC} \Delta X_A + T_{BC} \Delta X_B$$
(10)

各粒子の接触点 C における変位の法線方向成分は外向 きであるので,相対変位は圧縮が正となる.相対変位 増分により生じる接触力増分

$$\Delta P_{\rm AB} = (\Delta p_n, \, \Delta p_\theta, \, \Delta p_\varphi)_{\rm AB}^{\rm T} \tag{11}$$

を次式のように仮定する.

$$\Delta P_{\rm AB} = K \Delta D_{\rm AB} \tag{12}$$

ここに,

$$K = \begin{bmatrix} k_n & 0 & 0\\ 0 & k_t & 0\\ 0 & 0 & k_t \end{bmatrix}$$
(13)

は粒子間バネ定数からなる行列である.このとき,粒子Aに作用する全てのバネにより生じる接触力増分の 合力は次式で与えられる.

$$\Delta F_{\rm A}^{\rm K} = -\Sigma_{\rm C} T_{\rm AC}^{\rm T} \Delta P_{\rm AC} \tag{14}$$

ここに, $\Sigma_{\rm C}$ は粒子 A の全ての接触点に関する和を表 す.また,座標変換行列は式(8)で定義した座標変換 行列の転置行列である.上式に式(10)を代入すること により次式を得る.

$$\Delta F_{\rm A}^{\rm K} = -K_{\rm A} \Delta X_{\rm A} - \Sigma_{\rm B} K_{\rm AB} \Delta X_{\rm B} \qquad (15)$$

ここに,

$$K_{\rm A} = \Sigma_{\rm C} T_{\rm AC}^{\rm T} K T_{\rm AC} \tag{16}$$

$$K_{\rm AB} = T_{\rm AC}^{\rm T} K T_{\rm BC} \tag{17}$$

である.

同様にして,粒子Aに作用する全ての粘性により生じる接触力増分の合力は次式で与えられる.

$$F_{\rm A}^{\rm C} = -C_{\rm A}\dot{X}_{\rm A} - \Sigma_{\rm B}C_{\rm AB}\dot{X}_{\rm B} \tag{18}$$

ここに,

$$C_{\rm A} = \Sigma_{\rm C} T_{\rm AC}^{\rm T} C T_{\rm AC} \tag{19}$$

$$C_{\rm AB} = T_{\rm AC}^{\rm T} C T_{\rm BC} \tag{20}$$

である.また,

$$C = \begin{bmatrix} c_n & 0 & 0\\ 0 & c_t & 0\\ 0 & 0 & c_t \end{bmatrix}$$
(21)

は粒子間粘性係数からなる行列である.

粒状体の変形により粒状体内部では粒子間の接続状態が変化したり,滑りが発生するので,以上の関係式は時々刻々変化するものとして解析を行う必要がある.逐次解析の過程で,接触粒子の接触が失われた場合には,その接触点における接触力を強制的に零とする.また,相対変位増分により生じる接触力については,摩擦則に応じて滑りが発生するものとする.すなわち,摩擦角を $\phi$ として,接平面成分 $\mathbf{p}_t$ と法線方向成分 $p_n$ が,不等式

$$|\mathbf{p}_t| > p_n \tan \phi \tag{22}$$

を満たしたときは,接触力の接平面成分について,向 きを保ったまま大きさを右辺の値に修正する.具体的 な逐次解析のアルゴリズムについては次節に示す.

慣性力と慣性モーメントは,粒子の加速度ならびに 回転角速度からなる列ベクトルにより,次式で与えられる.

$$F_{\rm A}^{\rm M} = -M_{\rm A} \ddot{X}_{\rm A} \tag{23}$$

ここに, $M_A$ は質量ならびに慣性モーメントを与える 行列であり,対角成分のみよりなる.粒子材料の密度 を $\rho$ とすると,質量に関する成分は

$$M_{\rm A11} = M_{\rm A22} = M_{\rm A33} = 4\pi\rho r_{\rm A}^3/3 \qquad (24)$$

である.一方,慣性モーメントに対応する成分は半径の2乗で除する必要があり,

$$M_{\rm A44} = M_{\rm A55} = M_{\rm A66} = 8\pi\rho r_{\rm A}^3/15 \qquad (25)$$

である.

#### 2.2 解析アルゴリズム

個別要素法(DEM)は,粒子の動的平衡条件を満た す慣性力より定めた加速度の差分表示式に基づいて,陽 的に解析を進める方法である.したがって,ある解析ス テップで誤差として生じた力の不釣り合い量は次の解 析ステップの慣性力として評価されることになる.こ こでは,構造解析で一般に用いられる線形加速度法を 参考とし,より精度の高い解法の定式化を行う. いま,解析時間ステップ △t において加速度および回 転角速度が線形に変化すると仮定し,解析時間ステッ プの終りにおける粒子 A の加速度ベクトルを次式のよ うにおく.

$$\ddot{X}_{\rm A} = \ddot{X}^0_{\rm A} + \Gamma_{\rm A}\Delta t \tag{26}$$

ここに, $\ddot{X}^{0}_{A}$ は解析時間ステップの初めにおける加速 度ベクトル, $\Gamma_{A}$ は単位時間当たりの加速度変化を表す ベクトルである.このとき,解析時間ステップ $\Delta t$ の終 りにおける粒子 A の速度ベクトルおよび変位増分ベク トルは,それぞれ,次式のように表される.

$$\dot{X}_{\rm A} = \dot{X}_{\rm A}^0 + \ddot{X}_{\rm A}^0 \Delta t + \Gamma_{\rm A} \frac{\Delta t^2}{2} \tag{27}$$

$$\Delta X_{\rm A} = \dot{X}^0_{\rm A} \Delta t + \ddot{X}^0_{\rm A} \frac{\Delta t^2}{2} + \Gamma_{\rm A} \frac{\Delta t^3}{6} \qquad (28)$$

ここに, $\dot{X}^0_A$ は解析時間ステップの初めにおける速度 ベクトルである.式 (28) を $\Gamma_A$ について解けば,次式 を得る.

$$\Gamma_{\rm A} = \frac{6}{\Delta t^3} \Delta X_{\rm A} - \frac{6}{\Delta t^2} \dot{X}^0_{\rm A} - \frac{3}{\Delta t} \ddot{X}^0_{\rm A} \qquad (29)$$

したがって,速度ベクトルおよび加速度ベクトルは 変位増分ベクトルを用いて,それぞれ,次のように表 すことができる.

$$\dot{X}_{\rm A} = \frac{3}{\Delta t} \Delta X_{\rm A} - 2\dot{X}_{\rm A}^0 - \frac{\Delta t}{2} \ddot{X}_{\rm A}^0 \tag{30}$$

$$\ddot{X}_{A} = \frac{6}{\Delta t^2} \Delta X_{A} - \frac{6}{\Delta t} \dot{X}^{0}_{A} - 2 \ddot{X}^{0}_{A} \qquad (31)$$

逐次解析過程においては変位増分ベクトルが時々刻々 改訂される.第k番目の変位増分ベクトル改訂量を $U_A^k$ とおけば,変位増分ベクトルの第n近似は次式のよう に表される.

$$\Delta X_{\rm A}^n = \sum_{k=1}^n U_{\rm A}^k \tag{32}$$

この変位増分ベクトルの第 n 近似を用いて,解析時間ステップの終りにおける A に作用する各合力の第 n 近似は次式で与えられる.

$$F_{\rm A}^{\rm Mn} = -M_{\rm A} \left( \frac{6}{\Delta t^2} \Delta X_{\rm A}^n - \frac{6}{\Delta t} \dot{X}_{\rm A}^0 - 2 \ddot{X}_{\rm A}^0 \right) \quad (33)$$

$$F_{\rm A}^{\rm Cn} = -C_{\rm A}^n \left(\frac{3}{\Delta t} \Delta X_{\rm A}^n - 2\dot{X}_{\rm A}^0 - \frac{\Delta t}{2} \ddot{X}_{\rm A}^0\right)$$
$$-\Sigma_{\rm B} C_{\rm AB}^n \left(\frac{3}{\Delta t} \Delta X_{\rm B}^n - 2\dot{X}_{\rm B}^0 - \frac{\Delta t}{2} \ddot{X}_{\rm B}^0\right) (34)$$

$$F_{\rm A}^{\rm Kn} = F_{\rm A}^{\rm K0} - K_{\rm A}^n \Delta X_{\rm A}^n - \Sigma_{\rm B} K_{\rm AB}^n \Delta X_{\rm B}^n \tag{35}$$

粒子に作用する全ての力およびモーメントの合力は 零となる必要があるが,逐次解析の過程においては次 式で与えられる合力は誤差を表す.

$$F_{\rm A}^n = F_{\rm A}^{\rm Mn} + F_{\rm A}^{\rm Cn} + F_{\rm A}^{\rm Kn} + F_{\rm A}^{\rm E} \tag{36}$$

上式中,物体力および力の境界条件が与えられた境界 粒子に作用する外力 *F*<sup>E</sup><sub>A</sub>は一定とする.このとき,第*n*  近似と第 n+1 近似の誤差の差は,次式で与えられる.

$$F_{\rm A}^{n+1} - F_{\rm A}^{n} = -\left(\frac{6}{\Delta t^{2}}M_{\rm A} + \frac{3}{\Delta t}C_{\rm A}^{n} + K_{\rm A}^{n}\right)U_{\rm A}^{n+1} -\Sigma_{\rm B}\left(\frac{3}{\Delta t}C_{\rm AB}^{n} + K_{\rm AB}^{n}\right)U_{\rm B}^{n+1}$$
(37)

第n+1近似の解を求める際には, $F_A^{n+1} = 0$ として解けばよい.さらに, $\Delta t$ が十分小さいとすれば, $U_A^{n+1}$ は次式のように求めることができる.

$$U_{\rm A}^{n+1} = \frac{1}{6} M_{\rm A}^{-1} F_{\rm A}^n \Delta t^2 \tag{38}$$

求まった移動量を与えた結果,バネによる接触力の 法線方向成分が負になった場合は零に修正し,摩擦則 に応じてバネによる接触力接平面成分を修正する.こ の逐次解析の過程は式(36)で算定される誤差が所定の 値以下になるまで繰り返す.

ここに示したように,粒状要素法においては,ある 時点における動的平衡条件をその時点における粒子の 位置,速度,加速度に対応した力に対して成立させる ように逐次解析を行う.これに対して,DEMにおいて は,逐次解析を伴わない前進差分法を用い,一解析時 間ステップ前の慣性力に対応した加速度に基づいて粒 子移動量を決定する.また,接触力非負の条件や滑り の条件は粒子移動後に接触力の修正を行うのみで,新 たに生じた不釣り合い力に応じた粒子移動の修正は行 わない.したがって,DEMにおいては,各時点におけ る動的平衡条件は厳密には満たされないことになる.

#### 3. 粒状体のせん断流における平均力学量

ここでは,図-2に示すような粒状体の体積変化を伴わない2次元の単純せん断流れを対象とする.後に示すシミュレーションにおいては,上下の境界にはせん断を与えるための境界粒子を配置し,左右の境界は周期境界としている.

内部粒子の平均的速度場は平均的せん断場とそれか らの偏差として次式のように表すことができる.

$$\begin{cases} v_1 = \dot{\gamma} \, x_2 + \Delta v_1 \\ v_2 = \Delta v_2 \end{cases} \tag{39}$$

ここに, $\dot{\gamma}$ は境界に与えるせん断ひずみ速度, $\Delta$ は平均量からの偏差を表す.流れの場は単純せん断であるので, $x_2$ 方向は偏差部分のみから成る.

式 (39) に示したせん断を受ける粒状体の単位体積当 たりの運動エネルギーは,偏差部分の総和が零とすれ ば,並進運動部分について次式のように算定される.

$$e_{V} = \frac{1}{2V} \Sigma_{I} m v_{i} v_{i}$$

$$= \frac{m}{2V} \Sigma_{I} (\dot{\gamma}^{2} x_{2}^{2} + 2\dot{\gamma} x_{2} \Delta v_{1} + \Delta v_{i} \Delta v_{i})$$

$$\simeq \frac{m}{2V} \Sigma_{I} (\dot{\gamma}^{2} x_{2}^{2} + \Delta v_{i} \Delta v_{i}) \qquad (40)$$



図-2 動的単純せん断試験

ここに,mは粒子の質量, $\Sigma_{\rm I}$ は内部粒子に関する総和 を表す.また,繰り返し現れる同一指標は総和規約を 適用する.

物体力が零の場合,連続体の動的なエネルギー保存 条件は次式で与えられる.

$$p^{\sigma} = p^t + p^{\alpha} \tag{41}$$

ここに,

$$p^{\sigma} = \frac{1}{V} \int_{V} \sigma_{ij} v_{i,j} dV \tag{42}$$

は内部応力 $\sigma_{ij}$ のする仕事率,

$$p^{t} = \frac{1}{V} \int_{S} t_{i} v_{i} dS \tag{43}$$

は境界におけるトラクション t<sub>i</sub>のする仕事率,

$$p^{\alpha} = -\frac{1}{V} \int_{V} \rho \alpha_{i} v_{i} dV \tag{44}$$

は流体の密度  $\rho$  と加速度  $\alpha_i$  の積で与えられる慣性力の する仕事率である.

なお,各仕事率は,領域の体積Vで除し,単位体積 当たりの量とした.ここで,図-2に示した粒状体の単 純せん断流れ場について, $p^t \ge p^{\alpha}$ を離散的演算式で 表現する.

トラクションのする仕事率 p<sup>t</sup> は, 左右の境界が周期 境界の場合,上下の境界に配置された境界粒子のする 仕事率であり,次式で与えられる.

$$p^{t} = \frac{1}{V} \left( \Sigma_{\mathrm{B}_{\mathrm{U}}} F_{1} \frac{h}{2} \dot{\gamma} - \Sigma_{\mathrm{B}_{\mathrm{L}}} F_{1} \frac{h}{2} \dot{\gamma} \right) \tag{45}$$

ここに, $\Sigma_{B_U}$ , $\Sigma_{B_L}$ は上下の境界におかれた境界粒子についての和, $F_1$ は境界粒子に接触している内部粒子との間の接触力の合力の $x_1$ 方向成分である.

慣性力のする仕事率  $p^{\alpha}$  は,式 (39) で与えられる粒 子の運動に対して,以下のように算定される.

$$p^{\alpha} = -\frac{1}{V} \Sigma_{\mathrm{I}} m \alpha_{i} v_{i} = -\frac{1}{2V} \Sigma_{\mathrm{I}} m (v_{i} v_{i} \dot{j})$$

$$= -\frac{m}{2V} \Sigma_{\mathrm{I}} \{ (\dot{\gamma} x_{2} + \Delta v_{1}) (\dot{\gamma} x_{2} + \Delta v_{1}) + \Delta v_{2} \Delta v_{2} \dot{j} \}$$

$$= -\frac{m}{2V} \Sigma_{\mathrm{I}} \{ \dot{\gamma}^{2} x_{2}^{2} + 2\dot{\gamma} x_{2} \Delta v_{1} + \Delta v_{i} \Delta v_{i} \dot{j} \}$$

$$= -\frac{m}{2V} \Sigma_{\mathrm{I}} \{ 2\dot{\gamma}^{2} x_{2} \Delta v_{2} + 2\dot{\gamma} \Delta v_{2} \Delta v_{1} + (\Delta v_{i} \Delta v_{i} \dot{j}) \}$$

$$+ 2\dot{\gamma} x_{2} \Delta \dot{v}_{1} + (\Delta v_{i} \Delta v_{i} \dot{j}) \}$$

$$\simeq -\frac{m\dot{\gamma}}{V} \Sigma_{\mathrm{I}} \Delta v_{2} \Delta v_{1} \qquad (46)$$

ここに,  $\Sigma_{I}$  は内部粒子に関する総和を表す.また,式の展開に当たっては,速度ベクトルの偏差部分の総和は零であること,および,偏差部分の大きさの定常性 $(\Delta v_{i}\Delta v_{i}) = 0$ を仮定した.同様に,運動エネルギーの中の回転慣性に関する部分の大きさの時間変化率も零と仮定する.

以上より, 内部応力のする仕事率 p<sup>σ</sup> を以下のように 表すことができる.

$$p^{\sigma} = (\tau + \tau^R)\dot{\gamma} \tag{47}$$

ここに ,

$$\tau = \frac{h}{2V} (\Sigma_{\mathrm{B}_{\mathrm{U}}} F_1 - \Sigma_{\mathrm{B}_{\mathrm{L}}} F_1) \tag{48}$$

は上下の境界に作用するせん断応力であり,

$$\tau^R = -\frac{m}{V} \Sigma_{\mathrm{I}} \Delta v_2 \Delta v_1 \tag{49}$$

はレイノルズ応力である.なお,ここでは近似的に粒 子はすべて等粒径と考えて式を誘導した.

せん断場が座標軸方向と異なる場合のレイノルズ応 力は同様な演算で次のテンソルで与えられる.

$$T_{ij} = -\frac{m}{V} \Sigma_{\rm I} \Delta v_i \Delta v_j \tag{50}$$

レイノルズ応力は,この定義式よりわかるように,運動 エネルギー密度と同種の力学量であるといえる.図-2 のようなせん断場においては,このテンソル成分の内 T<sub>12</sub>以外は仕事をしないため,解析例においてはT<sub>12</sub>の みを解析対象とする.なお,単純せん断場に対するレ イノルズ応力は式(49)において偏差速度を速度に代え て算定することも可能である.すなわち,次式となる.

$$\tau^R = -\frac{m}{V} \Sigma_{\rm I} v_2 v_1 \tag{51}$$

なお、上式の誘導過程においては、前述のように、粒 子速度の偏差部分に関する定常性を仮定した・粒子速 度の偏差部分は時々刻々変化するので、このような定 常性は時間平均的な意味でしか成立しない.すなわち、 上式右辺は実際には時間平均をとったものと解釈する 必要がある.実際、本文における解析で得られたデータ からレイノルズ応力を求める際には各瞬間毎に得られ る上式の値を時間方向に平均して求めた.上式の時間 平均をとった式に対応する連続体における積分表示は 流体力学におけるレイノルズ応力の定義に一致してい る、連続体とみなされる流体もミクロ的には流体を構 成する分子の集合であるので、ここに示した誘導はそ のまま通常の流体の場合にも適合することになる、し たがって、ここではレイノルズ応力の微視力学的な解 釈を与えたと考えることができる.

変形が継続して生じる運動の場においては,内部応 力のする仕事率は粒状体内部における単位時間当たり の散逸エネルギーとみなすことができる.この散逸エ ネルギーの供給源は,上に示したように,式(48)で定 義されるせん断応力および式(49)で定義されるレイノ ルズ応力のする仕事である.個々の粒子が活発に運動



図—3 モデルA



図-4 モデルB

することが可能であるほどレイノルズ応力に起因した 散逸が大きくなる.

4. 動的単純せん断試験のシミュレーション

#### 4.1 試験方法

ここでは、先に説明した動的粒状要素法を用いて、動 的単純せん断試験の2次元解析を、円粒子の集合体を 対象として行う.図-3と図-4に示すように、上下に 配置した境界粒子を水平方向逆向きに一定速度で動か すことによって、内部粒子の単純せん断流れをつくる. このとき、上下の境界粒子の間隔は一定とする.なお、 境界に与えるせん断を内部へ確実に伝えるため、内部 粒子には上下方向に初期速度を与える.その値は図-3 あるいは図-4のy座標に比例させ、境界粒子の速度に 比べて十分小さな値に設定する.

主な試験条件を表-1 に示す.モデルの x 方向は周期 境界とする.また,上下の境界の間隔を変えることに よって,内部粒子の詰まり具合を調整する.ここでは,

表-1 試験条件

	(A)	(B)
境界粒子直径(m)	<i>ϕ</i> 0.01(上9個,下9個)	¢0.01(上14個,下14個)
内部粒子直径(m)	φ0.01(15個) φ0.014(11個) φ0.006(8個)	<ul> <li></li></ul>
全内部粒子数	34個	207個
粒子充填率 p	0.3~0.7 (0.05刻み9ケース)	0.3~0.7 (0.05刻み9ケース)
せん断ひずみ速度 <del>,</del> (S <sup>-1</sup> )	0.1, 0.5, 1, 5, 10 (5ケース)	1~10 (1刻み10ケース) 10~40 (3刻み11ケース) 40~100 (10刻み7ケース)

領域内に存在する粒子の面積をモデルの領域面積で割った値を,粒子充填率 $\rho$ と定義する.

粒子の直径は 6mm から 14mm, 粒子密度は  $\rho_s = 1000 \text{kg/m}^3$ , せん断領域に含まれる内部粒子の個数は モデルAで 34 個,モデルBで 207 個である. 粒径につ いては,等粒径とすると粒子充填率の高い場合に規則 的配列構造ができやすく,流れの一様性を阻害する可 能性があるので,ここでは表に示すように 3~4 種類の 大きさの粒子を混合することとした.なお,本解析に おいては重力がないため粒度偏析の問題は生じないと 考えられる.粒子間のバネ定数は  $k_n = 5 \times 10^4 \text{ N/m}$ ,  $k_t = 3.5 \times 10^4 \text{ N/m}$ ,粘性係数は  $c_n = 0.5 \text{ N/ms}^{-1}$ ,  $c_t = 0.35 \text{ N/ms}^{-1}$ ,摩擦角は  $\phi = 15^\circ$ である.解析時 間ステップは  $\Delta t = 10^{-5}$ s とする.

ところで、ここに用いた力学パラメーターの値は、検 証の参考となる実験がなかったため、特定の材料を想 定して選択されたものではない.バネ定数については、 その値が小さいと粒子間に異常な重なりが生じてしま うので、そのような状況にならない程度に大きな値を 選んだ.ただし、粒子充填率が高い場合、条件によっ てはバネ定数を大きくとっても異常な重なりが生じる ことが懸念される.そこで、解析結果の動画を用いて、 極くまれな場合を除き、大きな重なりが生じていない ことを確認している.また、粘性係数については、構 造解析におけるレイリー減衰の考え方を踏襲し、2つ のバネ定数に一定の比例定数を乗じることにより定め た.粒子間摩擦角は砂粒子集合体の代表的な摩擦角を 超えない値とした.

表-1の下方に示す通り,モデルの粒子充填率および せん断ひずみ速度を種々に設定して,試験を繰り返す.

# 4.2 せん断応力・レイノルズ応力の評価(1) 応力の変化

境界粒子に作用する接触力をもとに応力を算定した. 図-5に示すのは,モデルAおよびBを使って粒子充填



図-5 応力の変化 ( $\rho$ =0.5, $\dot{\gamma}$ =10s<sup>-1</sup>)

率  $\rho=0.5$ , せん断ひずみ速度  $\dot{\gamma}=10s^{-1}$  としたケースで 得られた垂直応力 とせん断応力 であり, 横軸はせ ん断ひずみ である.ただし, 同図は変動の大きな初 期の部分は省略して示す.また,応力は内部粒子が境 界粒子に衝突する際の接触力をもとに算定されるので, 定常状態に至っても,時間的変動が大きい.そこで同 図では応力の値は一定の時間間隔ごとに平均をとって 示した.

図-5 は粒子数の異なる2つのモデルについての結果 であるが,定常部分の平均値はほぼ等しい.同様の結 果は,後述する限界のせん断ひずみ速度以下において, 他のケースでも得られている.

一方,式(51)に基づいて算定されるレイノルズ応力 もせん断応力と同様の変動を示す量であり,せん断応 力と同様に平均化処理を行うこととした.

本論文では, せん断ひずみ速度および粒子充填率を 変えたときのせん断応力とレイノルズ応力について詳 しく調べる.両応力の値には,構成則に用いる最終的 応力として,図-5のような図より定常状態に至ったこ とを確認した上で, 定常部分の平均値を採用した.

(2) モデルAの結果

図-6 にモデルAを使って粒子充填率 ρ を 0.4 と 0.6 に設定したときに得られたせん断応力を示す.横軸は 与えたせん断ひずみ速度である.どちらの粒子充填率 においても,せん断応力はせん断ひずみ速度が大きく なるにつれて大きくなっており,その関係は粘性流体 における直線関係とは異なり,放物線状となっている. なお,他の粒子充填率でも同様の結果が得られた.

そこで,次式で与えられる Bagnold の理論式でフィッティングした.

$$\tau = a\dot{\gamma}^2 \tag{52}$$

フィッティングにより求められた *a* と粒子充填率との関係を図-7に示す.粒子充填率が大きくなると, Bagnoldの理論式における係数 *a* は大きくなる.*a* は粒子充填



図-6 せん断ひずみ速度によるせん断応力の変化(モデルA)



図-7 粒子充填率と係数 a の関係 (モデルA)

率の単調増加関数で,その変化の割合も増加する.

次に,各ケースでレイノルズ応力を求め,レイノル ズ応力とせん断応力との比を調べた.その結果を図-8 に示す.粒子充填率と2つの応力の比との関係はせん 断ひずみ速度に依存しない.また,せん断応力の大き さと比べたときのレイノルズ応力は,粒子充填率が小 さいほど大きく,特に粒子充填率の低い領域ではせん 断応力に比して無視できないオーダーの物理量である ことは明らかである.

また,図-8より,レイノルズ応力もせん断応力と同様に,せん断ひずみ速度の2乗に比例して発生しているといえる.このことから,流体力学においてレイノルズ応力を評価する際に粘性係数を割増すことが行われていることと同様に,粒状体の高速流れについては, Bagnoldの式(52)における係数*a*を粒子充填率に応じて割増せばよいということができよう.

3. で述べたように,レイノルズ応力はエネルギー保 存則において慣性力のする仕事率をせん断ひずみ速度 を用いて表すことにより誘導された量である.一方,せ



図-8 粒子充填率と  $\tau^R/\tau$  の関係 (モデルA)

ん断応力は粒子接触により生じる接触力の面積平均と 考えることができる.すなわち,レイノルズ応力は粒 子の絶対移動に,せん断応力は粒子間の相対移動に対 応して発生する力学量であるといえる.

図-8 はせん断応力とレイノルズ応力の比であるが, 分母分子にそれぞれせん断ひずみ速度を乗ずることに より,それぞれの仕事率の比であるとみなせることか ら,この図から粒状体内部のエネルギー散逸の特性を 考察することができる.まず,散逸の主要部分は粒子 間の相対速度によってもたらされるということができ る.粒子充填率が大きくなると,殆どがせん断応力に よるエネルギー散逸であり,そのメカニズムは粒子間 相対すべりすなわち,摩擦および粘性による散逸であ る.逆に粒子充填率が小さくなると,粒子運動の自由 度が増加し,粒子の絶対速度が関わるエネルギー散逸 が増加する.図-8 で注目されるのは,粒子充填率と散 逸エネルギー比の関係がほぼ直線関係にある点である.

(3) モデルBの結果

図-3からも明らかなように,モデルAは粒子数が少ないので,粒子数の比較的多いモデルBでモデルAと同様の試験を行った.

モデルBで, せん断ひずみ速度が $\dot{\gamma}=10s^{-1}$ より小さ い場合に得られたデータを使い, 図-7 と図-8 に対応 するグラフを描いたのが図-9 と図-10 である.両図よ り,モデルAの場合とほぼ同等の結果が得られている のがわかる.しかしながら,図-10 において,粒子充 填率 $\rho$ を0.3 に設定した際の応力比の中で,せん断ひ ずみ速度を $10s^{-1}$ とした場合のプロットが他のプロッ トからずれている.

そこで, せん断ひずみ速度を 10s<sup>-1</sup> よりも大きくし たケースまで含めて, 図-6 に対応するプロットを行っ たのが図-11 である. 図-6 でとらえられた放物線状の 関係が得られるのは, せん断ひずみ速度が比較的小さ い範囲であり, せん断ひずみ速度が大きくなると2次



図-9 粒子充填率と係数 a の関係 (モデルB)



図-10 粒子充填率と  $\tau^R/\tau$  の関係 (モデルB)

曲線で近似できる関係が成り立たなくなっている.これは,Bagnoldの理論式が成立しないことに対応する.

また,理論が成り立たなくなるせん断ひずみ速度の 限界値は粒子充填率によって異なっている.図-11の 中に,Bagnoldの理論式があてはまる範囲とあてはま らない範囲との境界を大まかに仮定し,理論の適用限 界として破線で示した.

せん断ひずみ速度が大きくなったときに理論が成り 立たなくなるメカニズムを考察するために,得られた 結果から粒子運動の動画を作成して粒子の動きを観察 した.その結果,Bagnold 理論が成り立たない場合に は,内部粒子が領域中央部で密に詰まる状態となって いるのがわかった.この状態をクラスタリング(結晶 化)と称することとする.理論が成り立たない範囲で は,図-12の右図で示されるように,クラスタリング 状態の領域と,境界付近に形成される粒子充填率の低 い領域が観察され,粒子が大きく動いているのは後者 の領域に限定されている.なお、クラスタリングが一 旦生じると,クラスタリング状態の領域はほぼ同じ範



図-11 せん断ひずみ速度によるせん断応力の変化(モデルB)



図-12 Bagnold 理論が成立する場合としない場合のせん断 流の比較 (ŷの大きい右図でクラスタリングがみら れる)

囲に定常的に存在するようになる.

このような粒子運動の不均一性が生じることによって, せん断ひずみ速度とせん断応力との間の関係が Bagnold 理論で説明づけられなくなると考えられる.図-10の プロットのずれは,せん断ひずみ速度が理論の成り立 つ限界値を上まわったために生じたものと解釈できる. すなわち,クラスタリングにより粒子運動が境界付近 に集中することになるが,このとき境界付近では粒子 充填率が小さくなるので,これに応じて $\tau^R/\tau$ が大き くなったと考えることができる.

本解析においては,粒状体に与えるせん断を上下2 つの境界の相対移動により与えているが,境界に接触 している内部粒子に与えられる運動エネルギーの伝達 範囲がどこまで及ぶかということがクラスタリングの 大きさに関与していると考えられる.図-12のような クラスタリングが一旦発生すると,その範囲内の粒子 は集団としての大きなマスをもつことになる.そこに 境界と行き来をしているばらばらの粒子が衝突しても,



図-13 高せん断ひずみ速度領域におけるせん断応力 (モデ ルB)

個々の運動エネルギーはクラスタリングを解消するような大きさのものではなく,逆に跳ね返えさせられる. したがって,境界層にある粒子はその中での運動を続けることになる.固体の静的変形において,破壊時にはせん断ひずみの局所化が生じるが,せん断流においてもせん断速度を上げると,動的せん断の局所化が発生するということができよう.局所化は境界付近に生じ,この部分で充填率が小さくなるので,粒子衝突は一様な充填構造をもった粒状体に比べて減少し,接触力の空間時間的平均として算定されるせん断応力は小さくなると考えられる.

なお,図-13に示すように,せん断ひずみ速度をより 大きくした場合には,せん断ひずみ速度とせん断応力と の関係が放物線状になる.この部分では再び Bagnold の理論式の適用が可能である.しかし,この範囲では 上述のようにクラスタリングが生じており,得られた せん断ひずみ速度とせん断応力との関係は,クラスタ リング領域を除いた境界付近を対象とした特性であり, 粒状体全体の特性を表わす関係とみなすことはできな い.

モデルBの結果で得られた上述の適用限界は粒子数 の少ないモデルAでは見られなかった.この他さらに 粒子数を増やした例でも解析を試みているが,適用限 界はモデルBとも異なったところに現れる.上述のよ うに,適用限界はクラスタリングが生じることにより 発生する.したがって,その発生は流れの中に不均一 性を生じさせるため,本論文の主目的である動的構成 則の考察の対象からは外れた境界値問題として取り扱 うのが適当と考えられる.

境界値問題においては境界の形状により異なる結果 が求まることになるが,粒子数によって,クラスタリ ング領域の形状が変化するので,適用限界も粒子充填 率とせん断速度のみによって定まるものではないと解 釈することができる.

このように,粒子数は適用限界に影響を与えることになるが,適用限界以内であれば,図-8と図-10から 判断できるように,ほぼ同等の結果が得られる.すな わち,動的構成則については,クラスタリングが生じ ない範囲では,比較的粒子数の少ない粒状体で得られ た特性であっても,ある程度信頼できるものであると 考えることができよう.材料試験において,ヤング率 は試験片の大きさや形状に依存しない特性であるのに 対し,強度は大きさや形状に依存するということに類 似したことであると考えられる.

#### 5. おわりに

本論文においては,動的粒状要素法を用いた粒状体 の単純せん断流れのシミュレーション解析を行い,粒 状体の動的構成則について考察した.また,動的構成 則においては,特に粒子充填率の低い場合にレイノル ズ応力を無視できないと考えられるので,その微視力 学的な意味を明らかにするために,離散粒子集合体に おけるエネルギー散逸機構の理論的考察を加えた.

解析結果より得られた主要な結論を以下に記す. 1) せん断ひずみ速度とせん断応力の関係については, 粒子充填率によって異なるせん断ひずみ速度の限界値 以下で Bagnold の理論式が適用でき,せん断応力はせん断ひすみ速度の2乗に比例する.

2) Bagnold の理論式が適用可能な範囲では,理論式 における比例定数 *a* は粒子充填率の増加とともに大き くなる.また,その変化の割合も大きくなる.

3) 同様に,レイノルズ応力もせん断ひずみ速度の2 乗に比例する.

4)レイノルズ応力とせん断応力の比は,粒子充填率 により定まり,せん断ひずみ速度に依存しない.粒子 充填率が大きくなるとその比は小さくなり,レイノル ズ応力を無視することが可能となる.

5) せん断ひずみ速度が限界値を越えると, Bagnold の理論式が適用できなくなるが, これは領域内にクラ スタリングが生じ, 流れが不均一になるためである. 6) 高せん断ひずみ速度領域においても, みかけ上, Bagnold の理論式と合致する関係がみられるが, これ はクラスタリング領域を除いた境界層内の特性と考え るべきである.

7) Bagnold の理論式の適用限界内では. 粒子充填率 に応じて決まる理論式の比例定数の値は,領域内の粒 子数に依らずほぼ一定である.

8) 一方, Bagnold の理論式の適用限界は領域内部の 粒子数によって大きく変化する.これはクラスタリン グの発生によりせん断場の一様性が失われ,境界値問 題としての取り扱いを必要とすることによる. 今後,力学パラメーターや幾何学的条件を変化させ たパラメトリックな解析を行い,より定量的な考察を 進めたい.特にせん断流れの一様性は粒子数が少ない 場合にのみ保証されるという特性が観察されたので, Bagnoldの理論式の適用方法についての考察を進めた い.また,重力場における実験であっても参考になる データを利用し,本研究結果の検証を行いたい.

## 謝辞 本研究は前橋工科大学学生であった若林亮君,樺 澤辰吾君の協力を得て実施した.ここに謝意を表する.

#### 参考文献

- Bagnold, R. A.: Experiments on a gravity-free dispersion of large solid spheres in a Newtonian fluid under shear, *Proc. Royal Soc. Lond.*, Ser.A 225, pp.49-63, 1954.
- Hanes, D. M. & Inman, D. L.: Observations of rapidly flowing granular materials, J. Fluid Mech., Vol.150, pp.357-380, 1985.
- Ichiba, K., Iwashita, K. and Oda, M.: Experimental study on stress ratio in rapid granular shear flow, *Powder and Grains 2005* (Eds. R. Garcia-Rojo, H.

J. Herrmann and S. McNamara), Taylor & Francis Group, pp.751-755, 2005.

- Campbell, C. S. and Gong, A.: The stress tensor in a two-dimensional granular shear flow, J. Fluid Mech., Vol.164, pp.107-125, 1986.
- 5) 岸野佑次:新しいシミュレーション法を用いた粒状体 の準静的挙動の解析,土木学会論文集第406号/III-11, 97-106,1989.
- 6) Kishino, Y.: Granular flow simulation by granular element method, *Slow Dynamics in Complex Systems* (Eds. M. Tokuyama & I. Oppenheim), American Institute of Physics, pp.466-467, 2004.
- 7) 山本雄介,岸野佑次,石井建樹,京谷孝史:粒状体のせん 断流動における遷移現象の解析,応用力学論文集,土木 学会, Vol.8, pp.583-590, 2005.
- Cundall, P. A. and Strack, O. D. L.: A discrete numerical model for granular assemblies, *Géotechnique*, Vol.29, pp.47-65, 1979.
- 9) Tsai, J.-C. and Gollub, J. P.: Slowly sheared dense granular flows: Crystallization and nonunique final states, *Phys. Rev. E* 70(1), 031303, 2004.

(2009年4月9日受付)