

下負荷面モデルの繰返し負荷特性の改善

Improvement of Cyclic Loading Characteristic of Subloading Surface Model

・橋口公一*・尾崎利行**

Koichi Hashiguchi and Toshiyuki Ozaki

*工博・農博，第一工業大学教授，社会環境工学科
(〒899-4395 鹿児島県霧島市国分中央 1-10-2)

** 農博，九州電技開発(株)電力技術部設備保全グループ課長
(〒810-0005 福岡市中央区清川 2-13-6)

The subloading surface model possesses the high ability for the description of elastoplastic deformation behavior. In addition it is furnished with the noticeable advantage for the numerical calculation with the automatic controlling function to attract the stress to the yield surface in the plastic deformation process and thus it does not require to incorporate the convergence computer algorithm such as the return mapping in the yield state. Then, it has been widely applied to the prediction of deformation behavior of metals and soils. However, unrealistically large plastic strain is described in the reloading process after the partial unloading identically to the initial loading process since the rate of normal-yield ratio is related only to the magnitude of plastic strain rate through the material constant. It results in the prediction of excessively large strain accumulation, i.e. mechanical ratcheting phenomenon in the cyclic loading process under the positive or negative one-side stress amplitude, i.e. the pulsating loading process. In the present article, this insufficiency in the existing subloading surface model will be remedied by relating the rate of normal-yield surface to the magnitude of plastic strain rate through the material function which differs depending on the initial, reloading and the inverse loading processes.

Key Words: *constitutive equation, cyclic loading, elastoplasticity, reloading curve, subloading surface.*

1. 緒 言

Drucker¹⁾は、弾塑性モデルについて、降伏面の内部を弾性域とするものと、弾塑性域としてそこでの応力変化による塑性ひずみ速度を表現するものに分類し、それぞれ古典弾塑性モデル (conventional elastoplasticity model) および非古典弾塑性モデル (unconventional elastoplasticity model) と呼んだ。したがって、古典弾塑性モデルによっては、繰返し負荷現象や軟化現象を現実的に表現できないとともに、負荷基準においては降伏面に達したか否かの判定を必要である²⁾⁴⁾。種々の非古典弾塑性モデルの中で、下負荷面モデル⁵⁾⁹⁾は、金属⁷⁾¹⁰⁾¹²⁾および土¹³⁾²³⁾に広く用いられているモデルの一つである。下負荷面モデルにおいては、常に現応力点を通して、降伏面に相似な下負荷面が導入される。そして、塑性変形過程においては、降伏面の大きさに対する下負荷面の大きさの比 (正規降伏比 (normal-yield ratio) と称される) を導入し、この比が 1 に漸近するように、その発展則が定式化される。

さらに、この発展則を組み込むことによって下負荷面に拡張された適応条件が定式化される。この適応条件に関連流動則を代入して、塑性ひずみ速度が導かれる。したがって、常に滑らかな弾・塑性遷移³⁾が表現され、構成式に対する力学的要求条件である連続性条件 (continuity condition) および滑らか条件 (smoothness condition) が満たされる²⁾⁴⁾。なお、本モデルにおいては、適応条件に正規降伏比の発展則が組み込まれており、塑性状態において応力を常に正規降伏面に引き付ける自動制御機能が具備されている。これらは、古典塑性モデルは元より、多面モデル²⁴⁾²⁵⁾、無数面モデル²⁶⁾、2面モデル²⁷⁾²⁸⁾、単面モデル²⁹⁾、非線形移動硬化モデル³⁰⁾³²⁾などの他のモデルに見られない本モデル特有の大きな利点である。

他方、Dafalias は、彼自身が提案した 2 面モデルとは物理的にも数学的にも異なる具体的構造を持つモデルを半径補間の境界面モデル (bounding surface model with radial mapping) と呼んでいる³³⁾。彼が境界面モデルについての論文を著し始めた 1980 年の 3 年前に提案された下負荷面

モデルと類同の構造を有している。その後、Dafalias³⁴⁾ は、下負荷面モデルあるいは半径補間の境界面モデルは、強い下回り現象(strong undershooting phenomenon)を示し、除荷ー再負荷過程において、応力ーひずみ曲線は閉じず、繰返し負荷挙動を現実的に表現できないと述べるとともに、土の変形挙動の予測には適しているが、高精度の予測が求められる金属の変形現象には適していないと主張している。これらの批判は、正規降伏面と下負荷面の相似中心が固定されている初期下負荷面モデルを前提とした見解に過ぎない。

以上の下負荷面モデルは、正規降伏面と下負荷面の相似中心を塑性変形とともに移動させることにより、繰返し負荷挙動を表現し得る基本構造を有する拡張下負荷面モデルとして改善されている^{8), 9)}。これにより、上記のDafalias³⁴⁾の批判は既に基本構造面で解消されている。しかし、従来の定式化においては、正規降伏比の発展速度が塑性ひずみ速度の大きさに対して、定数で線形に関係づけられるので、正規降伏比の所定の増加の間に生じる塑性ひずみの増加は初期、除荷、再負荷等の負荷過程によらないことになり、再負荷曲線は非現実的に緩慢に初期単調負荷曲線に復帰することになる。したがって、繰返し負荷、特に応力が正規降伏面に達しない片振り応力振幅一定繰返し負荷において過大な塑性ひずみの集積が表現される不備が見られる。本論文では、この不備に対する基本改善法を示す。

2. 拡張下負荷面モデルの構成式

本節では、拡張下負荷面モデル^{15), 16)}について概説する。

まず、ひずみ速度 $\mathbf{D}$ (速度勾配 $\mathbf{L}$ の対称成分 $\mathbf{D} = (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)/2$) は、弾性ひずみ速度 $\mathbf{D}^e$ と塑性ひずみ速度 $\mathbf{D}^p$ に加算分解されると仮定する。つまり、

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p \quad (1)$$

ここに、弾性ひずみ速度 $\mathbf{D}^e$ は次の亜弾性式で与えられると仮定する。

$$\mathbf{D}^e = \mathbf{E}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2)$$

$\mathbf{E}$ は 4 階の弾性係数テンソル、 $(\)^{-1}$ は逆テンソルを表し、 $\boldsymbol{\sigma}$ は Cauchy 応力、 $(\dot{\ })$ は客観性を満たす共回転速度を表す。なお、 $\mathbf{E}$ は次の Hooke 型で与えられると仮定する。

$$\left. \begin{aligned} E_{ijkl} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{E}{2(1+\nu)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ E_{ijkl}^{-1} &= -\frac{1+\nu}{E} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{\nu}{2E} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここに、 E および ν はそれぞれヤング率およびポアソン比である。また、 δ_{ij} は Kronecker のデルタつまり $i = j: \delta_{ij} = 1, i \neq j: \delta_{ij} = 0$ である。

まず、降伏面 (以降、正規降伏面と称する) を次式で与える。

$$f(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\beta}) = F(H) \quad (4)$$

ここに、

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha} \quad (5)$$

スカラー H は等方硬軟化変数、2 階テンソル $\boldsymbol{\alpha}$ は降伏面 (以後、正規降伏面と呼ぶ) の移動を表す移動硬化変数 (背応力)、2 階テンソル $\boldsymbol{\beta}$ は土などの摩擦性材料の降伏面の回転を表す無次元の回転硬化変数である。なお、金属においては $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ 、土においては、 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ である。

さらに、常に現応力点を通り降伏面に相似な形状・配置を有する次式の下負荷面を導入する (図-1)。

$$f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\beta}) = \bar{R} F(H) \quad (6)$$

ここに、

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\alpha}}, \quad \bar{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{s} - \bar{R}(\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}) \quad (7)$$

$\bar{R}$ ($0 \leq \bar{R} \leq 1$) は正規降伏面に対する下負荷面の大きさの比で、正規降伏状態への接近の度合を表し、正規降伏比と呼ばれる。2 階テンソル $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ は $\boldsymbol{\alpha}$ の下負荷面における共役点である。また、2 階テンソル $\mathbf{s}$ は正規降伏面と下負荷面の相似中心である。

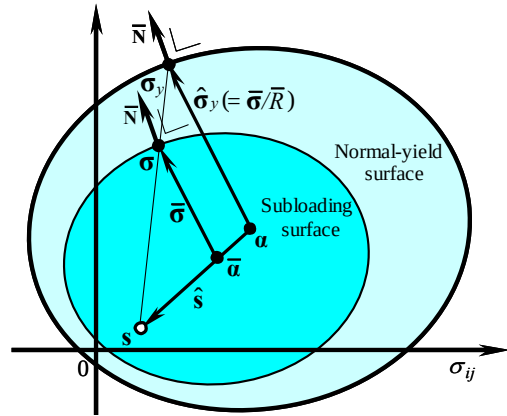


図-1 拡張下負荷面モデルにおける正規降伏面および下負荷面

正規降伏比 $\bar{R}$ の発展則は次式で与えられる。

$$\dot{\bar{R}} = U \|\mathbf{D}^p\| \text{ for } \mathbf{D}^p \neq \mathbf{0} \quad (8)$$

ここに、 $(\dot{\ })$ は物質時間微分、 $\|\ \|$ は大きさを表す。スカラー U は、次の条件を満たす $\bar{R}$ の単調減少関数である (図-2)。

$$U = \begin{cases} \rightarrow +\infty & \text{for } 0 \leq \bar{R} \leq R_e \text{ (quasi-elastic state)} \\ > 0 & \text{for } R_e < \bar{R} < 1 \text{ (sub-yield state)} \\ = 0 & \text{for } \bar{R} = 1 \text{ (normal-yield state)} \\ < 0 & \text{for } \bar{R} > 1 \text{ (over-yield state)} \end{cases} \quad (9)$$

R_e は弾性限界における $\bar{R}$ 値を表す材料定数である。

関数 U の具体例として次式が挙げられる。

$$U = u \cot\left(\frac{\pi}{2} \frac{\bar{R} - R_e}{1 - R_e}\right) \quad (10)$$

ここに、 u は材料パラメータである。 $\langle \rangle$ は McCauley の

括弧, つまり, 任意のスカラー s に対して, $\langle s \rangle = (s + |s|)/2$,
あるいは, $s \geq 0$ のとき $\langle s \rangle = s$, $s < 0$ のとき $\langle s \rangle = 0$ を意
味する. 式(10)に対して式(8)は次のように解析的に積分し
得る.

$$\bar{R} = \frac{2}{\pi} (1 - R_e) \cos^{-1} \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{\bar{R}_0 - R_e}{1 - R_e} \right) \right. \\ \left. \exp \left(-\frac{\pi u}{2} \frac{\varepsilon^p - \varepsilon_0^p}{1 - R_e} \right) \right\} + R_e \quad (11)$$

ここに, $\varepsilon^p \equiv \int \|\mathbf{D}^p\| dt$ (t : time) であり, 初期条件を
 $\varepsilon^p = \varepsilon_0^p$: $\bar{R} = \bar{R}_0$ としている. なお, 従来, 用いられてき
た次式においては解析的積分式は得られない.

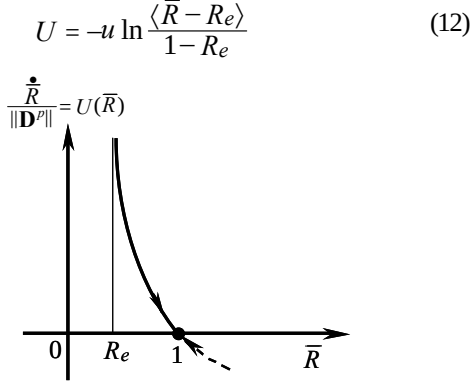


図-2 正規降伏比の発展則における
材料パラメータ u

相似中心が正規降伏面を飛び出さないことに基づいて,
 $\mathbf{s}$ の移動則は次式で与えられる^{8),9)}.

$$\dot{\mathbf{s}} = c \|\mathbf{D}^p\| \frac{\tilde{\mathbf{\sigma}}}{\bar{R}} + \dot{\mathbf{a}} + \left\{ \frac{F'}{F} \dot{\mathbf{H}} - \frac{1}{F} \text{tr} \left(\frac{\partial f(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{\beta}})}{\partial \hat{\mathbf{\beta}}} \dot{\hat{\mathbf{\beta}}} \right) \right\} \hat{\mathbf{s}} \quad (13)$$

ここに,

$$\tilde{\mathbf{\sigma}} \equiv \mathbf{\sigma} - \mathbf{s}, \quad \hat{\mathbf{s}} \equiv \mathbf{s} - \mathbf{a} \quad (14)$$

$F' \equiv dF/dH$, c は材料定数, $\text{tr}(\cdot)$ は対角和を表す.

塑性ひずみ速度 $\mathbf{D}^p$ は関連流動則に基づいて, 次式で与
えられる.

$$\mathbf{D}^p = \bar{\lambda} \bar{\mathbf{N}} = \frac{\text{tr}(\bar{\mathbf{N}} \dot{\mathbf{\sigma}})}{\bar{M}^p} \bar{\mathbf{N}} \quad (15)$$

$$\bar{\mathbf{N}} \equiv \frac{\partial f(\bar{\mathbf{\sigma}}, \mathbf{H})}{\partial \bar{\mathbf{\sigma}}} / \left\| \frac{\partial f(\bar{\mathbf{\sigma}}, \mathbf{H})}{\partial \bar{\mathbf{\sigma}}} \right\| \quad (\|\bar{\mathbf{N}}\| = 1) \quad (16)$$

ここに, $\bar{\lambda}$ は正值の比例係数である. $\bar{\mathbf{N}}$ は下荷面の正
規化された外向き法線テンソルである. 塑性係数 $\bar{M}^p$ は
次式で与えられる.

$$\bar{M}^p \equiv \text{tr} \left[\bar{\mathbf{N}} \left\{ \frac{F'}{F} h(\mathbf{\sigma}, H_i; \bar{\mathbf{N}}) \hat{\mathbf{\sigma}} + \mathbf{a}(\mathbf{\sigma}, H_i) \right. \right. \\ \left. \left. + \left\{ \frac{U(\bar{R})}{\bar{R}} + c \left(\frac{1}{\bar{R}} - 1 \right) \right\} \tilde{\mathbf{\sigma}} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\|\bar{\mathbf{N}}'\|}{\bar{R}F} \left(\text{tr} \left(\frac{\partial f(\bar{\mathbf{\sigma}}, \hat{\mathbf{\beta}})}{\partial \hat{\mathbf{\beta}}} \mathbf{b}(\mathbf{\sigma}, H_i) \right) \bar{\mathbf{\sigma}} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \bar{R}(1 - \bar{R}) \text{tr} \left(\frac{\partial f(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{\beta}})}{\partial \hat{\mathbf{\beta}}} \mathbf{b}(\mathbf{\sigma}, H_i) \right) \hat{\mathbf{s}} \right) \right\} \right] \quad (17)$$

h , $\mathbf{a}$ および $\mathbf{b}$ は, 非時間依存性により $\bar{\lambda}$ を 1 次で含み,
これらは, $\dot{\mathbf{H}}$, $\dot{\hat{\mathbf{\beta}}}$ および $\dot{\hat{\mathbf{a}}}$ に対して次式で関連づけられ
る.

$$h \equiv \frac{\dot{\mathbf{H}}}{\bar{\lambda}}, \quad \mathbf{a} \equiv \frac{\dot{\hat{\mathbf{a}}}}{\bar{\lambda}}, \quad \mathbf{b} \equiv \frac{\dot{\hat{\mathbf{\beta}}}}{\bar{\lambda}} \quad (18)$$

式(1), (2)および(15)より, ひずみ速度 $\mathbf{D}$ は次式で与え
られる.

$$\mathbf{D} = \mathbf{E}^{-1} \dot{\mathbf{\sigma}} + \frac{\text{tr}(\bar{\mathbf{N}} \dot{\mathbf{\sigma}})}{\bar{M}^p} \bar{\mathbf{N}} \quad (19)$$

応力速度 $\dot{\mathbf{\sigma}}$ をひずみ速度で表す逆関係は次式で与えら
れる.

$$\dot{\mathbf{\sigma}} = \mathbf{E} \mathbf{D} - \frac{\text{tr}(\bar{\mathbf{N}} \mathbf{E} \mathbf{D})}{\bar{M}^p + \text{tr}(\bar{\mathbf{N}} \mathbf{E} \bar{\mathbf{N}})} \mathbf{E} \bar{\mathbf{N}} \quad (20)$$

負荷基準は次式で与えられる^{4), 35), 36)}.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D}^p \neq \mathbf{0}: & \text{tr}(\bar{\mathbf{N}} \mathbf{E} \mathbf{D}) > 0, \\ \mathbf{D}^p = \mathbf{0}: & \text{otherwise} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

3. 再負荷曲線について

ある負荷状態から除荷する場合, 除荷開始時の状態(降
伏状態にどれだけ近い)や除荷の程度によらずに, 負
荷反転時の応力-塑性ひずみ曲線の勾配がその度に無限
大になるとは考え難い. もし, 降伏状態からの無限小の
除荷後の再負荷でも勾配が無限大になるとすれば, 再負
荷曲線はオーバーシュートし, 負荷の微小変動時には,
応力が大きく変動するという不安定かつ不自然な結果と
なる. したがって, このような場合には, 部分除荷-再
負荷曲線は開いた形状になると判断される.

下負荷面モデルにより, 上述の現象が表現され, また,
拡張下負荷面モデルによれば, 相似中心まで除荷してから
再負荷すると, 再負荷の瞬間の上記勾配は無限大になり,
部分除荷-再負荷曲線は閉じた形になると考えられる(図
-3参照). なお, 相似中心を通過後まで除荷してから再
負荷する場合には, 部分除荷-再負荷曲線は閉じたループ
を示すことになる.

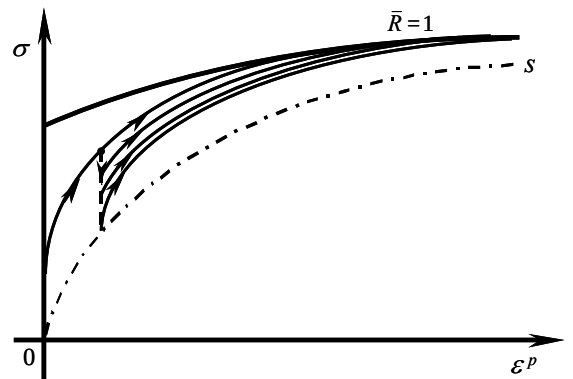


図-3 下負荷面モデルにより予測される塑性負荷状態から
の微小除荷後の再負荷曲線.

しかし、正規降伏比の発展式(8)において、関数 U が $\bar{R}$ のみの関数である場合、 $\int \|\mathbf{D}^p\| dt = f^{-1}(\bar{R} - \bar{R}_0)$ と表されるので、これより、 $\bar{R} - \bar{R}_0 = f(\int \|\mathbf{D}^p\| dt)$ ($\bar{R}_0$: $\bar{R}$ の初期値)が成り立つ。したがって、図-4に示すように、 $\bar{R}$ の所定の変化の間に生じる塑性ひずみの大きさは、単調負荷、再負荷、除荷、逆負荷などの負荷状態によらず同じであることを意味している。これは、特に再負荷曲線の先行初期負荷曲線への復帰が非現実的に緩慢で過度に開いたヒステリシスループをもたらす、また、降伏面近傍での応力一定繰返し負荷においては、著しく過大な塑性ひずみの集積つまり力学的ラチェット現象の予測につながる(図-5参照)。

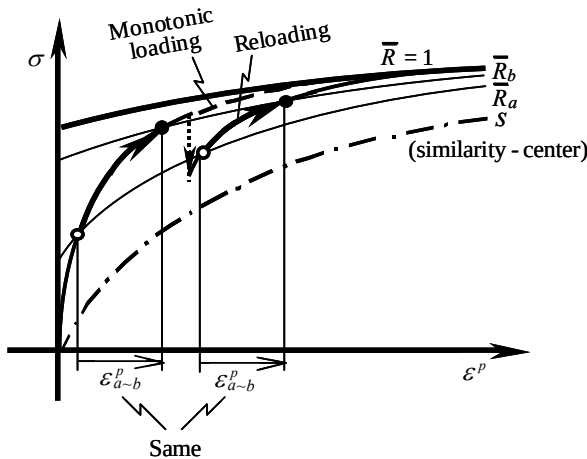


図-4 従来の下負荷面モデルの欠点：単調負荷曲線への非現実的に緩慢な復帰。

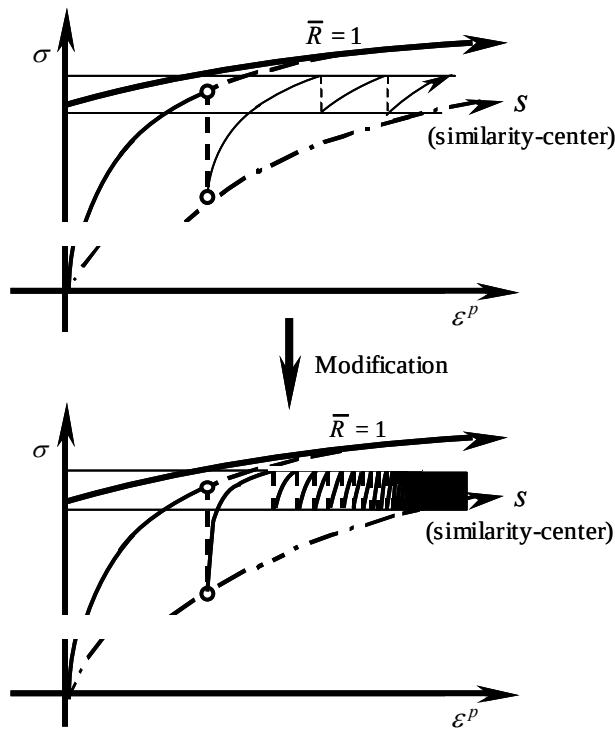


図-5 降伏状態近傍における微小繰返し負荷挙動の予測

4. 再負荷曲線の改善

以上に述べたように、従来の下負荷面モデルの定式化のままでは、再負荷過程や繰返し負荷過程における塑性変形を適切に表現できない。以下に、この不備の改善法について考察しよう。

初期等方性材料においては、初期負荷曲線の曲率に比して、除荷・逆負荷曲線の曲率は小さく、一方、除荷再負荷曲線の曲率は大きくあることが認められている(Masing 則³⁷⁾)。この現象を表現するため、次の変数を導入しよう。

i) 相似中心 $\mathbf{S}$ が正規降伏面に近いほど、接線係数は、初期等方状態における値と異なる。そこで、正規降伏面への相似中心 $\mathbf{S}$ の接近の度合を表すため、 $\mathbf{S}$ を通して、正規降伏面に相似な面を相似中心面と呼び、正規降伏面に対する相似中心面の大きさの比を表す相似中心降伏比 $\mathcal{H}_s$ ($0 \leq \mathcal{H}_s \leq 1$)を導入しよう。相似中心面は正規降伏面式(4)において、 $\boldsymbol{\sigma} \rightarrow \mathbf{S}$, $\boldsymbol{\alpha} \rightarrow \boldsymbol{\alpha}$, $\bar{R} \rightarrow \mathcal{H}_s$ と置き換えて、 $f(\hat{\mathbf{S}}, \boldsymbol{\beta}) = \mathcal{H}_s F(H)$ で表される。したがって、相似中心降伏比は、既知量 $\mathbf{S}$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, F により次式で表される。

$$\mathcal{H}_s = \frac{f(\hat{\mathbf{S}}, \boldsymbol{\beta})}{F(H)} \quad (0 \leq \mathcal{H}_s \leq 1) \quad (22)$$

ii) 再負荷状態においては、相似中心比 $\mathcal{H}_s$ が小さく、また、偏差応力が相似中心面の外側に存在する。一方、逆負荷状態においては、相似中心比はやはり小さくであるが、偏差応力は相似中心面の内側に存在する。偏差応力が相似中心面の外側、内側のどちらにあるかは次の変数で判定し得る。

$$S_\sigma \equiv \text{tr}(\hat{\mathbf{n}}_s \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'}{\|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'\|}) \quad (-1 \leq S_\sigma \leq 1) \quad (23)$$

ここに、

$$\hat{\mathbf{n}}_s \equiv \frac{\partial f(\hat{\mathbf{S}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \mathbf{S}} / \left\| \frac{\partial f(\hat{\mathbf{S}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \mathbf{S}} \right\| \quad (24)$$

S_σ は、相似中心面の外向き法線 $\hat{\mathbf{n}}_s$ への偏差応力 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}' (\equiv \boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{S}')$ の方向テンソル $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}' / \|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'\|$ の正射影を表す。(')は偏差部分を示す。ここで、偏差応力の方向テンソルを用いているのは、i) 相似中心から応力への距離自身ではなく、応力が相似中心面の内側、外側のいずれに存在するかで問題で、また、ii) 応力そのものの方向テンソルによれば、 $\mathcal{H}_s$ 値が等方応力成分に依存することになり、金属においては不合理である。

以上の変数 $\mathcal{H}_s$ および S_σ を導入して、次の拡張を検討しよう。

1) 材料パラメータ u の拡張

材料定数 u を次のように材料関数とする。

$$u = u_0 \exp(u_s \mathcal{H}_s S_\sigma)$$

$$= \begin{cases} u_0 \exp(u_s) & \text{for } \mathcal{H}_s = 1 \text{ and } S_\sigma = 1 \\ u_0 & \text{for } \mathcal{H}_s = 0 \text{ or } S_\sigma = 0 \\ u_0 \exp(-u_s) & \text{for } \mathcal{H}_s = 1 \text{ and } S_\sigma = -1 \end{cases} \quad (25)$$

ここに、 u_0 および u_s は材料定数であるが、前者は u の平均値を示す。これにより、 u は負荷方向に増大し、逆負荷方向に減少する。この拡張により、部分除荷後の再負荷において、応力が単調負荷曲線に速やかに復帰する現象が現実的に表現し得る (図-6 参照)。また、これにより、図-5 のように、降伏面近傍の繰返し負荷における塑性ひずみの集積が抑制される。

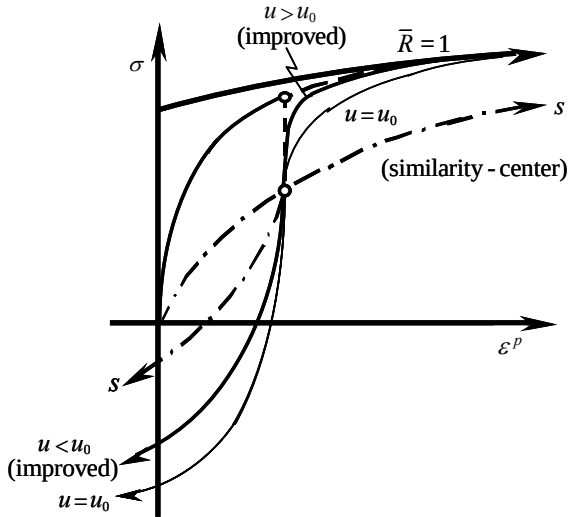


図-6 式(24)の材料関数 u の導入により予測される応力-塑性ひずみ曲線：再負荷、逆負荷における正規降伏比の発展速度の相違の導入による単調負荷曲線への速やかな復帰の表現。

2) 材料パラメータ R_e の拡張

材料定数 R_e を次のように材料関数とする。

$$R_e = R_{e0} \exp(r_s \mathcal{H}_s S_\sigma)$$

$$= \begin{cases} R_{e0} \exp(r_s) & \text{for } \mathcal{H}_s = 1 \text{ and } S_\sigma = 1 \\ R_{e0} & \text{for } \mathcal{H}_s = 0 \text{ or } S_\sigma = 0 \\ R_{e0} \exp(-r_s) & \text{for } \mathcal{H}_s = 1 \text{ and } S_\sigma = -1 \end{cases} \quad (26)$$

ここに、 R_{e0} および r_s は材料定数であるが、前者は R_e の平均値を示す。

これにより、 R_e は負荷方向に増大し、逆負荷方向に減少する。この拡張により、部分除荷後の再負荷において、応力が単調負荷曲線に速やかに復帰する現象が現実的に表現し得ると期待される (図-7 参照)。また、これにより、図-5 のように、降伏面近傍の繰返し負荷における塑性ひずみの集積が抑制されると期待される。

しかし、 R_e を式(26)で与えることは、塑性変形が進行して、相似中心が正規降伏面に近づくにつれて、弾性域がその方向に広がることになる。そこで、繰返し負荷を行うと、正規降伏面の近傍でありながら、塑性変形が生じず、

ひずみが進行しない不合理な結果となる。なお、土などにおいては、純粋弾性域は極めて小さい場合が見られ、このような材料においては、 R_e の導入そのものが妥当性を欠くといえる。

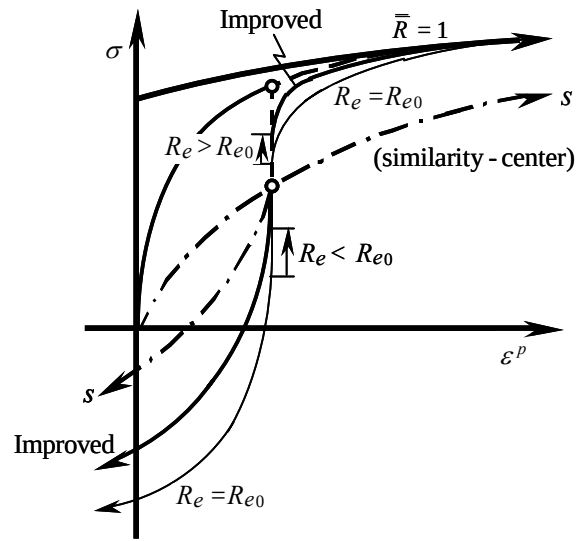


図-7 式(25)の材料関数 R_e により予測される応力-塑性ひずみ曲線：再負荷、逆負荷における弾性域の相違の導入による単調負荷曲線への速やかな復帰の表現。

3) 材料パラメータ c の拡張

相似中心の発展則における材料定数を次のように拡張する。

$$c = c_0 \exp(c_s \mathcal{H}_s S_\sigma)$$

$$= \begin{cases} c_0 \exp(c_s) & \text{for } \mathcal{H}_s = 1 \text{ and } S_\sigma = 1 \\ c_0 & \text{for } \mathcal{H}_s = 0 \text{ or } S_\sigma = 0 \\ c_0 \exp(-c_s) & \text{for } \mathcal{H}_s = 1 \text{ and } S_\sigma = -1 \end{cases} \quad (27)$$

ここに、 c_0 および c_s は材料定数であるが、前者は c の平均値を示す。

しかし、これによれば、再負荷時に相似中心が正規降伏面により速く近づくだけで、正規降伏比 $\bar{R}$ の所定の変化の間に生じる塑性ひずみ増分の集積値は負荷状態によらず同等で、再負荷曲線が先行初期負荷曲線に速やかに復帰するような改善は全くなされない。なお、これによれば、相似中心が繰返し負荷ごとに正規降伏面に近づく。しかし、相似中心が正規降伏状態に一致すると下負荷面は不定となり、塑性係数場の特異点を生じ、また、弾性域の核である相似中心が最も塑性的な正規降伏状態に一致することは物理的にも受け入れ得ない。なお、単調負荷においても塑性負荷が継続すると、相似中心が正規降伏面に漸近するが、相似中心がある限度以上、正規降伏面に近づかないような相似中心の移動則が定式化されている⁹⁾。

以上に、3種の再負荷曲線の改善方法について検討したが、後2者は、物理的に不合理性を欠くものに対して、1) の材料パラメータ u の拡張は物理的矛盾は見られない。

そこで、等方・移動硬化の von Mises 材料を対象に実測値との比較により、1) の u を式(25)の材料関数とする手法について、実測値との比較および数値実験により、その妥当性を検討してみよう。

降伏面およびその発展則を次式により与える。

$$f(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\hat{\boldsymbol{\sigma}}'\| \quad (28)$$

$$F(\varepsilon^{pe}) = F_0 [1 + h_1 \{1 - \exp(-h_2 \varepsilon^{pe})\}]$$

$$(F' = F_0 h_1 h_2 \exp(-h_2 \varepsilon^{pe})) \quad (29)$$

$$\hat{\boldsymbol{a}} = \sqrt{\frac{2}{3}} a_\alpha (r_\alpha F \bar{\mathbf{N}} - \boldsymbol{\alpha}) \|\mathbf{D}^p\| \quad (\bar{\mathbf{a}} \equiv \sqrt{\frac{2}{3}} a_\alpha (r_\alpha F \bar{\mathbf{N}} - \boldsymbol{\alpha})) \quad (30)$$

ここに、 h_1 , h_2 ; α_a , r_a は材料定数、 F_0 は F の初期値である。

1070 鋼の片振り(軸応力 σ_a : 0~830MPa)繰返し単負軸負荷試験結果³⁸⁾のシミュレーションを図-8に示す。数値計算に当たって、材料パラメータを次のように選んでいる。

弾性係数: $E = 170000\text{MPa}$, $\nu = 0.3$

硬化 $\left\{ \begin{array}{l} \text{等方: } h_1 = 0.4, h_2 = 170 \\ \text{異方: } a_\alpha = 100, r_\alpha = 0.3 \end{array} \right.$

正規降伏比発展速度: $R_e = 0.1$; $u_0 = 500$, $u_s = 2$

相似中心発展: $c = 200$

硬化関数: $F_0 = 580\text{MPa}$,

背応力: $\boldsymbol{\alpha}_0 = \mathbf{0}\text{MkPa}$,

相似中心: $\mathbf{s}_0 = \mathbf{0}\text{MPa}$,

応力: $\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{0}\text{MPa}$

図-8に示すように、 u の拡張により、実測値を十分良い精度で近似している。なお、本数値計算は、いかなる応力引き戻しアルゴリズムも用いない Euler 法による増分計算に行っているにもかかわらず、同図下部に、 $\bar{R}$ の推移を示しているように、塑性負荷状態において、応力が正規降伏面に沿ってほぼ厳密に変化するように自動的に制御されることが分かる。

他方、以上において、 $c = 0$ つまり初期下負荷面モデルに帰着させた場合および u を定数とした場合の計算結果を図-9に示しているが、過度にひずみが集積されることがわかる。

以上から、 u を式(25)の材料関数とすることにより、繰返し負荷過程において、ひずみの進行が大幅に抑制されることがわかる。

さらに、以上の改善による降伏面近傍の繰返し負荷によるひずみ進行の抑制機能を調べるため、数値実験を行った。図-8におけると同じ材料を対象に、600~800MPa 間の応力振幅一定繰返し負荷に関する計算結果を、 u を式(25)の材料関数とする場合および定数つまり $u = u_0$ とする場合につい

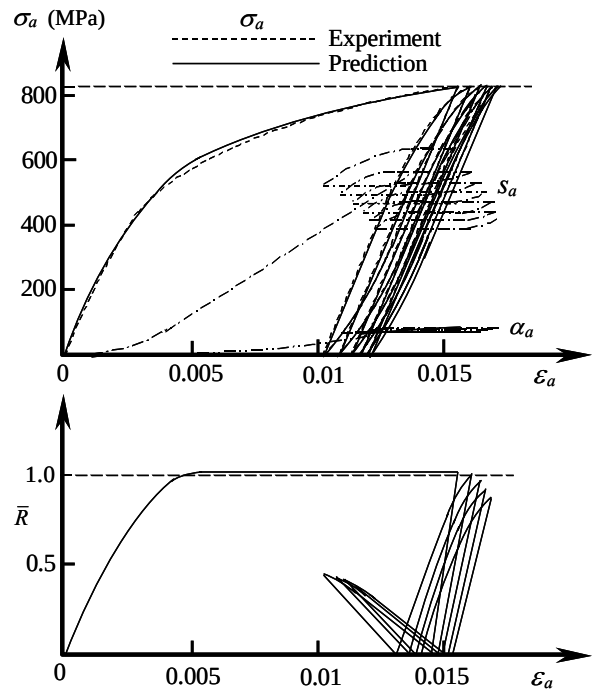


図-8 u を式(24)の関数とする場合の1070鋼の単軸片振り試験結果³⁸⁾のシミュレーション

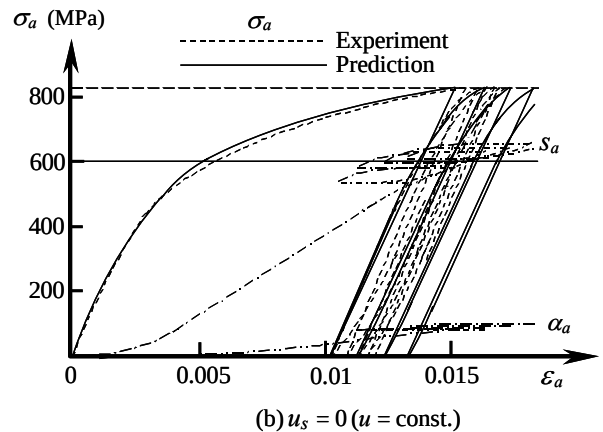
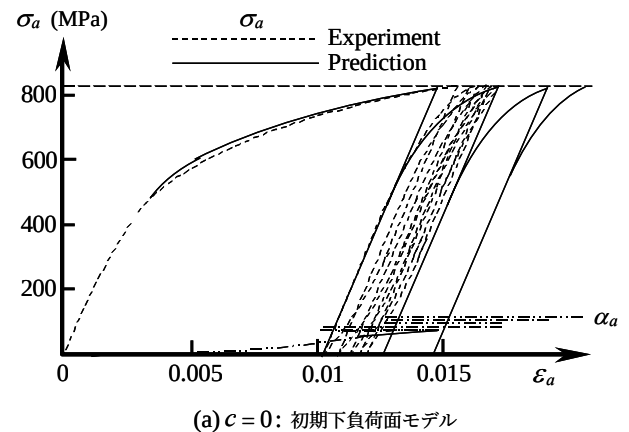


図-9 1070鋼の単軸片振り試験結果³⁸⁾のシミュレーション：初期下負荷面および従来の拡張下負荷面モデル

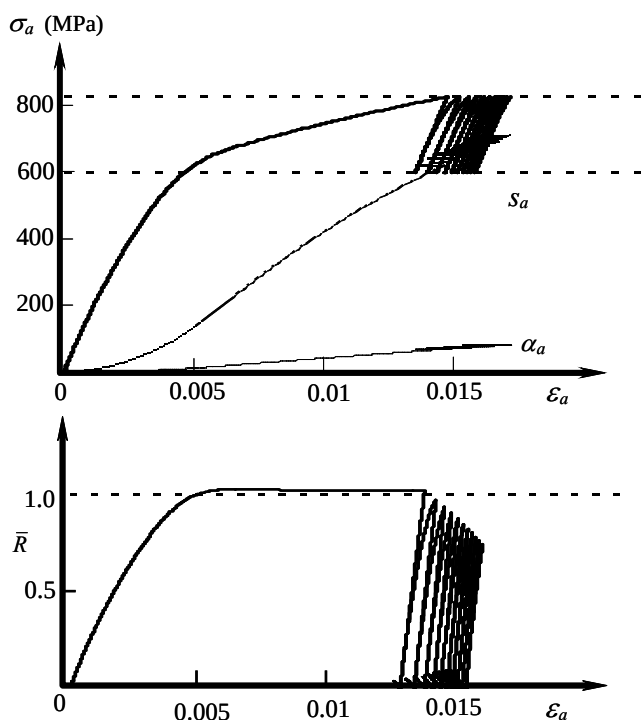


図-10 u を式(24)の関数とする場合の1070鋼の単軸応力振幅一定繰返し変形の数値実験

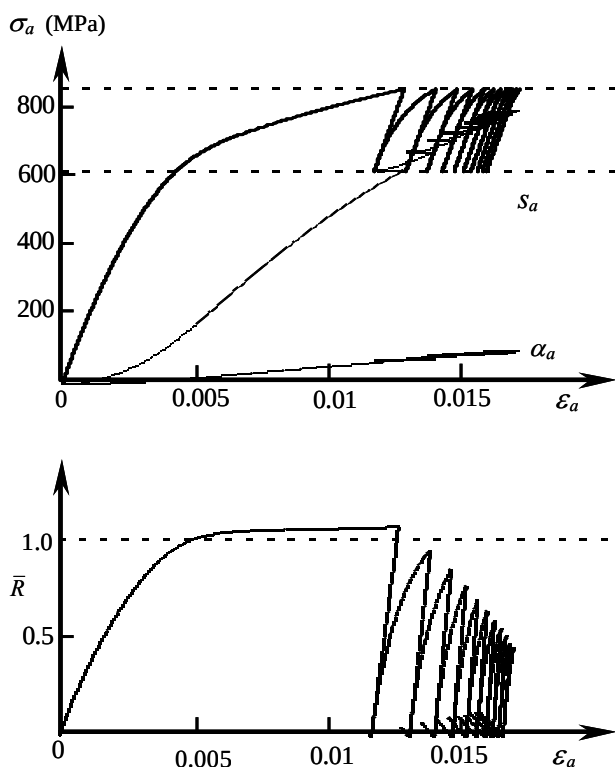


図-11 u を定数とする場合の1070鋼の単軸応力振幅一定繰返し変形の数値実験

て、それぞれ図-10 および 11 に示している。材料パラメータは、図-8に対して示した通りである。これより、 u を式(25)の材料関数とすることにより、再負荷過程におけるひずみの進行が抑制されることがわかる。

5. 結 言

以上、本論文では、下負荷面モデルにおいて永年未解決な状態で残されていた繰返し負荷表現における不備に対する考察を行った。その結果、正規降伏比の発展側における材料パラメータ u を相似中心降伏比および応力が相似中心面の内、外のいずれに存在するかの関数に拡張することにより、その基本的解決法が見出された。今後、本定式化に基づいて、動的解析を含む種々の繰返し負荷を伴う境界値問題の解析を展開する予定である。

参考文献

- 1) Drucker, D.C.: Conventional and unconventional plastic response and representation, *Appl. Meek. Rev.* (ASME), **41**, 151-167, 1988.
- 2) Hashiguchi, K.: Fundamental requirements and formulation of elastoplastic constitutive equations with tangential plasticity, *Int. J. Plasticity*, **9**, 525-549, 1993.
- 3) Hashiguchi, K.: Mechanical requirements and structures of cyclic plasticity models, *Int. J. Plasticity*, **9**, pp. 721-748, 1993.
- 4) Hashiguchi, K.: Fundamentals in constitutive equation: continuity and smoothness conditions and loading criterion, *Soils and Foundations*, **40**(4), 155-161, 2000.
- 5) Hashiguchi, K. and Ueno, M.: Elastoplastic constitutive laws of granular materials, *Constitutive Equations of Soils (Proc. 9th Int. conf. Soil Mech. Found. Eng., Spec. Session 9, Tokyo)*, JSSMFE, pp.73-82, 1977.
- 6) Hashiguchi, K.: Plastic constitutive equations of granular materials, *Proc. US-Japan Seminar Continuum Mech. Stast. Appr. Granular Materials*, Sendai, pp. 321-329, 1978.
- 7) Hashiguchi, K.: Constitutive equations of elastoplastic materials with elastic-plastic transition, *J. Appl. Mech.* (ASME), **47**, pp. 266-272, 1980.
- 8) Hashiguchi, K.: Elastoplastic constitutive model with a subloading surface, *Proc. Int. Conf. Comput. Mech.*, pp. IV65-70, 1986.
- 9) Hashiguchi, K.: Subloading surface model in unconventional plasticity, *Int. J. Solids Strut.*, **25**, pp. 917-945, 1989.
- 10) Hashiguchi, K. and Yoshimaru, T.: A generalized formulation of the concept of nonhardening region, *Int. J. Plasticity*, **11**, 347-365, 1995.
- 11) Hashiguchi, K. and Protasov, A.: Localized necking analysis by the subloading surface model with tangential-strain rate and anisotropy, *Int. J. Plasticity*, **20**, 1909-1930, 2004.
- 12) Hashiguchi, K., Okayasu, T. and Saitoh, K.: Rate-dependent inelastic constitutive equation: The extension of elastoplasticity, *Int. J. Plasticity*, **21**, 463-491, 2005.
- 13) Topolnicki, M.: An elasto-plastic subloading surface model for clay with isotropic and kinematic mixed hardening parameters, *Soils and Foundations*, **30**(2), 103-113, 1990.
- 14) Kohgo, Y., Nakano, M. and Miyazaki, T.: Verification of

- the generalized elastoplastic model for unsaturated soils, *Soil and Foundations*, **33**(4), 64-73, 1993.
- 15) Asaoka, A., Nakano, M. and Noda, T.: Soil-water coupled behaviour of heavily overconsolidated clay near/at critical state, *Soils and Foundations*, **37**(1), pp.13-28, 1997.
 - 16) Hashiguchi, K. and Chen, Z.-P: Elastoplastic constitutive equations of soils with the subloading surface and the rotational hardening, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, **22**, 197-227, 1998.
 - 17) Chowdhury, E.Q., Nakai, T., Tawada, M. and Yamada, S.: A model for clay using modified stress under various loading conditions with the application of subloading concept, *Soils and Found.*, **39**(6), 103-116, 1999.
 - 18) Hashiguchi, K., Saitoh, K., Okayasu, T. and Tsutsumi, S.: Evaluation of typical conventional and unconventional plasticity models for prediction of softening behavior of soils, *Geotechnique*, **52**, 561-573, 2002.
 - 19) Hira, M., Hashiguchi, K., Okayasu, T. and Miwa, K. : Deformation behavior of “Shirasu” and its prediction by the subloading surface model, *Soils and Foundations*, **42** (5), pp. 37-46, 2002.
 - 20) Khojastehpour, M. and Hashiguchi, K.: The plane strain bifurcation analysis of soils by the tangential-subloading surface model, *Int. J. Solids Struct.*, **41**, 5541-5563, 2004.
 - 21) Khojastehpour, M. and Hashiguchi, K. (2004b) : Axisymmetric bifurcation analysis in soils by the tangential-subloading surface model, *J. Mech. Physics Solids*, **52**, 2235-2262.
 - 22) Khojastehpour, M., Murakami, Y. and Hashiguchi, K. (2006): Antisymmetric bifurcation in a circular cylinder with tangential plasticity, *Mech. Materials*, **38**, 1061-1071.
 - 23) Wongsaroj, J., Soga, K., Mair, R.J. (2007) : Modeling of long-term ground response to tunneling under St James’ Park, London, *Geotechnique*, **57**, 75-90, 2007.
 - 24) Mroz, Z.: On the description of anisotropic work hardening, *J. Mech. Phys. Solids*, **15**, pp. 163-175, 1967.
 - 25) Iwan, W.D.: On a class of models for the yielding behavior of continuous and composite systems, *J. Appl. Mech. (ASME)*, **34**, pp. 612-617, 1967.
 - 26) Mroz, Z., Norris, V.A. and Zienkiewicz, O.C.: An anisotropic, critical state model for soils subject to cyclic loading, *Geotechnique*, **31**, 451-469, 1981.
 - 27) Dafalias, Y.F. and Popov, E.P.: A model of nonlinearly hardening materials for complex loading, *Acta Mechanica*, Vol. **21**, pp. 173-192, 1975.
 - 28) Krieg, R.D.: A practical two surface plasticity theory, *J. Appl. Mech. (ASME)*, **42**, pp. 641-646, 1975.
 - 29) Dafalias, Y.F. and Popov, E.P.: Cyclic loading for materials with a vanishing elastic region, *Nucl. Eng. Design*, **41**, 293-302, 1977.
 - 30) Chaboche, J.L., Dang-Van, K. and Cordier, G.: Modelization of the strain memory effect on the cyclic hardening of 316 stainless steel, *Trans. 5th Int. Conf. SMIRT*, Berlin, Division L., Paper No. L. 11/3, 1979.
 - 31) Chaboche, J.L.: Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity, *Int. J. Plasticity*, **5**, 247-302., 1989.
 - 32) Chaboche, J.L.: A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories, *Int. J. Plasticity*, **24**, 1642-1693, 2008.
 - 33) Dafalias, Y.F. and Herrmann, L.R.: A bounding surface soil plasticity model, *Proc. Int. Symp. Soils under Cyclic Trans. Load.*, Swansea, pp. 335-345, 1980.
 - 34) Dafalias, Y.F.: Bounding surface plasticity. I: Mathematical foundation and hypoplasticity, *J. Eng. Mech. (ASCE)*, **112**, 966-987, 1986.
 - 35) Hill, R.: On the classical constitutive relations for elastic/plastic solids, *Recent Progress in Appl. Mech.*, pp. 241-249, 1967.
 - 36) Hill, R: On the intrinsic eigenstates in plasticity with generalized variables, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **93**, 177-189, 1983.
 - 37) Masing, G.: Eigenspannungen und Verfestigung beim Messing, *Proc. 2nd Int. Congr. Appl. Mech.*, Zurich, pp. 332-335, 1926.
 - 38) Jiang, Y. and Zhang, J.: Benchmark experiments and characteristic cyclic plasticity deformation, *Int. J. Plasticity*, **24**, 1481-1515, 2008.

(2009年4月9日 受付)