侵食速度を用いた土粒子流亡によるパイピングの進展解析

Numerical Analysis of Piping Development Induced by Loss of Soil Particles

藤澤和謙*・村上 章**・西村伸一***

Kazunori FUJISAWA, AKira MURAKAMI and Shin-ichi NISHIMURA

*正会員 博(農) 岡山大学助教 大学院環境学研究科(〒700-8530岡山市津島中3-1-1) **正会員 農博 岡山大学教授 大学院環境学研究科(〒700-8530岡山市津島中3-1-1) ***正会員 博(農) 岡山大学准教授 大学院環境学研究科(〒700-8530岡山市津島中3-1-1)

Erosion within soil structures, such as earth dams and irrigation ponds, may lead to the piping failures of the structures. A number of studies on the piping of soils have been carried out. However, the computational method to analyze the phenomenon is currently limited. The purpose of this study is to propose a numerical method for solving the internal erosion and the transport of eroded soil particles and to verify the applicability of the method. In this paper, three equations concerning the seepage flow, the change of porosity due to erosion and the transport of the eroded soil particles are introduced and numerically solved. The equation of the seepage flow is solved with finite element method, and finite volume method is applied to the equation of the transport of the soil particles. It is shown that the numerical approach can reproduce the experimental data of the previous study and predict the development of piping as the solution of initial and boundary value problems of the above equations.

Key Words : piping, erosion, seepage, finite volume method

1. はじめに

パイピング(piping)とは浸透性を有する土構造物の 内部で浸透流の集中する水みちが形成される現象を意 味する.その原因には多様なものも考えられるが,通 常は浸透流の作用により土粒子が流亡することによっ て引き起こされる.パイピングは古くからある問題で あるが現在もなお鋭意研究がなされている¹⁾.

パイピングはフィルダムの主要な決壊原因の一つに 挙げられ,実際にFoster et al. (2000a, b) は過去のフィ ルダムの崩壊事故を調査し,そのうちの46%がパイピ ングに起因する決壊であることを示している^{2),3)}.小規 模の貯水施設であるため池でも老朽化によって生じる 堤体下流部からの漏水はパイピングが原因と考えられ る.河川堤防においても堤防内部に設けられた樋門な どの構造物の周辺では施工時に十分な締固めが難しく, 浸透流が集中することでパイピングを生じ,破堤に至 るケースもある.このようにダムやため池といった水 の浸透を受ける土構造物にとってパイピングは深刻な 問題である.

現在に至るまでにパイピングに関連した研究は数多 くなされてきており,土粒子の流亡に関係した研究内 容は大きく2つに分けることができる.一つ目は粒径 の小さな土粒子が浸透流によって土骨格から分離・移動 し,浸透水と共に構造物の外部に流出することで,土 塊の間隙の増加から水みちの形成に至る現象について の研究である^{4),5),6)}.もう一つは主に粘着力のない砂質 土に土の重量による抵抗力を上回る浸透力が作用する

ことで砂が液状化し噴出する現象(ボイリング)に関 連したものである7).前者は一つ一つの土粒子の土骨格 からの分離に起因する現象であり,土塊の内部で生じ る土粒子の侵食が研究対象となる、後者は土塊が抵抗 できない浸透力を受けることによる土骨格の崩壊であ り,崩壊を生じる動水勾配または水頭の把握が主な研 究課題となる.前者は土骨格の崩壊について言及する ものではなく,両者の違いは土骨格の崩壊の有無にあ る.このように両者の現象には確かに違いはあるもの の, Skempton & Brogan (1994) は礫と粒径の小さな砂 とを混合した材料を用いてボイリング試験を行った結 果,砂分が侵食によって流出する場合,ボイリングを 生じる限界動水勾配がかなり低下することを示してい る⁸⁾.彼らの結果からボイリング(浸透による土骨格の 崩壊)を扱う上でも土内部での土粒子の移動は重要な ファクターとなり,土の内部で生じる侵食や土粒子の 移動と土骨格の崩壊とは互いに関連した現象であるこ とを意味している.実際の土構造物で生じるパイピン グでは土粒子の侵食と移動,もしくはそれらに加えて 骨格の崩壊が起こっているものと推測する.

現在のパイピングに関する研究では, Richards & Reddy (2007) が指摘しているようにその数値解析手法の発展が遅れており⁹⁾,特にパイピングの時間発展を予測することは難しいとされている¹⁾.本研究の目的はパイピングの数値解析手法の発展に寄与すべく,土粒子の侵食と移動を考慮して,パイピングの時間発展を解析可能な手法を提案することにある.本論文ではまず,土粒子間を流れる浸透流,侵食による間隙率の

増加,侵食された土粒子の移動の3項目を定式化して, それらの方程式を数値的に解く方法について説明する. 本論文で提案される手法の特徴は土の侵食速度(単位 時間の間に単位表面積あたりから侵食される土粒子の 体積)の概念を用いることで土粒子の侵食や移動を表 現し,パイピングの時間発展を解析可能なものするこ とにある.その後,提案した解析手法を用いて既往の 土粒子侵食に関する実験結果を再現することで手法の 妥当性を検証する.最後に,本手法によって可能とな るパイピングの進展解析についての解析例を紹介する. なお本論文では侵食の観点から土粒子の移動を取り扱 い,骨格の破壊については言及しないことをあらかじ めお断りしておく.

2. 侵食速度と支配方程式

土の侵食は土中を移動可能な土粒子が浸透流の作用 によって土骨格から離脱し,間隙を移動することで生 じる.侵食は流体が土粒子の表面に作用する力によっ て引き起こされるが,その機構を直接解析するのは難 しい.そこで,本研究では侵食速度の概念を用いて土 中の侵食を表現する.侵食速度とは単位時間の間に侵 食対象となる単位表面積をあたりから侵食される土粒 子の体積を意味し,速度の次元を持つ.土の侵食速度 は土粒子表面に作用するせん断応力τ(摩擦力)の関数 として経験的に以下の式で与えられることが知られて いる^{4),5)}.

$$E = \alpha(\tau - \tau_c), \quad \tau > \tau_c \tag{1}$$

ここに α は材料定数, τ_c は限界せん断応力である.限 界せん断応力 τ_c は侵食が起こる最小のせん断応力を意 味し,土粒子に加わるせん断応力 τ が限界せん断応力 τ_c に達しなければ侵食は生じない.

図-1には土中の土粒子移動を考慮する際の土の模式 図を示す.土は土粒子,水,空気から構成されるが,土 内部での侵食を考える場合は土骨格を形成している土 粒子と間隙を流れる流体に取り込まれた土粒子とは区 別する必要がある.同図に示す V_t , V_f , V_{ss} , V_{sf} はそ れぞれ土塊の体積,間隙流体の体積,土骨格を形成す る土粒子の体積を表している.間隙を流れる水は侵食 によって土粒子を取り込むため,本論文では間隙流体 は侵食によって土骨格から離脱した土粒子を含む間隙 水として定義する.この定義に応じて,土の体積含水 率 θ 及び間隙率nを以下のように定める(図-1参照).

$$\theta = \frac{V_f}{V_t} , \ n = 1 - \frac{V_{ss}}{V_t}$$
(2)

また,流体に取り込まれた土粒子の濃度 C を

$$C = \frac{V_{sf}}{V_f} \tag{3}$$

と定義する.



図-1 侵食を考慮した土の構成

以上の定義のもとで,浸透流,土の侵食と移動に関 する以下の3つの方程式をたてる(*i*についてアイン シュタインの総和規約を適用する).

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = E A_e \tag{4}$$

$$\frac{\partial(1-n)}{\partial t} = -EA_e \tag{5}$$

$$\frac{\partial C\theta}{\partial t} + \frac{\partial Cv_i}{\partial x_i} = EA_e \tag{6}$$

ここに t は時間, x_i は直交座標, v_i は間隙流体のダル シー流速であり, A_e は単位体積の土塊中に存在する侵 食対象となる土粒子の表面積を意味し,長さの逆数の 次元を持つ.式(4)は間隙流体の保存則を示している. 間隙流体は対象となる領域から流入出するだけでなく、 侵食によって土粒子を取り込むことでその体積を増加 させる.そのため右辺には EA_e(単位体積の土塊中か ら単位時間あたりに侵食される土粒子の体積)がソー ス項として追加される.式(5)は単位体積の土塊に存 在する土粒子の体積 (=1-n) が侵食によって単位時 間あたり EA, だけ減少することを表している.式(6) は間隙流体中に含まれる土粒子の保存則を示しており, 式 (4) と同様の理由からソース項に EA_e (単位体積の 土塊中から単位時間あたりに侵食される土粒子の体積) が必要となる.式(6)を導くにあたっては侵食され輸 送される土粒子は十分小さく間隙流体の流れに追従す るもとの仮定している.式(4)~(6)の導出では侵食さ れた土粒子の堆積は考慮されていないが,これには次 の2つの理由がある.まず一つに土塊の内部で輸送さ れる土粒子の堆積に関する定量的な評価法がないため, もう一つは堆積を考慮することで発生する侵食を過小 評価する可能性があるためである.

式(5)を変形して

$$\frac{\partial n}{\partial t} = E A_e \tag{7}$$

とし, 飽和土を対象とすると $\theta = n$ の関係が成り立つ ことから, この関係と式 (7)を用いて式 (4) は以下のよ うに変形される.

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \tag{8}$$

式(6)についても同様に

$$\frac{\partial nC}{\partial t} + \frac{\partial Cv_i}{\partial x_i} = EA_e \tag{9}$$

となる.式(8)は間隙水だけではなく侵食された土粒 子を含む間隙流体の保存則であることに注意する必要 がある.間隙流体の流れにダルシー則

$$v_i = k_s \frac{\partial h}{\partial x_i}$$
, $h = z + \frac{u_f}{\rho g}$ (10)

を適用すると式(8)は

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_s \frac{\partial}{\partial x_i} (z + \frac{u_f}{\rho g}) \right) = 0 \tag{11}$$

となる.ここに k_s, h, u_f, ρ, g は透水係数, 全水頭, 間隙流体の圧力と密度,重力加速度を意味している.通 常,土粒子の侵食は十分に間隙流体の流速のある飽和 土中で生じる.本論文では解析対象を飽和土とし,解 くべき方程式として(7),式(9),(11)の3つを考える.

式(1)に示されるように侵食量を推定するには土粒 子表面に作用するせん断応力 r を見積もる必要がある. 土骨格を構成する土粒子に作用するせん断応力は土中 の間隙流体の流れを流管の束と考えることで平均的に 以下の式で与えることができる⁵⁾.

$$\tau = \rho g I \sqrt{2K/n} \tag{12}$$

ここに *I*, *K* はそれぞれ動水勾配,固有透水係数であ り,固有透水係数 *K* は間隙流体の粘性係数 *μ* を用いて

$$K = \frac{k_s \mu}{\rho g} \tag{13}$$

と与えられる.

3. 数值解析方法

ここでは支配方程式である式(7),(9),(11)を間隙流体の圧力 u_f ,間隙率n,間隙流体中に含まれる土粒子の濃度Cについて数値的に解く方法について説明する.本論文では奥行き方向には変数が変化しない2次元問題を取り扱うが,以下の説明では3次元問題も考慮に入れて解説する.図-2に数値解析のフローチャートを示す.まず,間隙流体の流れに関した式(11)を有限要素法によって解き,間隙流体の圧力と流速の分布を求める(有限要素には2次元4節点アイソパラメトリック要素を用い,領域積分には4つの積分点を用いた).今,時間ステップm回目の計算がなされたとして,時間ステップm回目の要素lを構成する節点jにおいて算出された全水頭値 $h_j^{l,m}$ に補間関数を乗ずることによって要素l内部の全水頭 $h^{l,m}$ を以下のように近似する.

$$h^{l,m} = h^m_i N^l_i \tag{14}$$

ここに, N¹ はそれぞれ要素 1 の節点 *j* に対応する形状 関数である.本節では要素及び時間ステップに関する



図-2 数値解析フロー

インデックスを一貫して上付き文字で表す.式(14)で は要素 / を構成する節点 j(下付き文字で表記)につい て総和規約を適用している.以下でも下付きの文字に ついて総和規約を適用するが,上付きの文字について は総和規約を適用しない.得られた各節点の全水頭か ら任意の要素 / 内部における動水勾配 /¹の分布は

$$I^{l} = \sqrt{\left(h_{j}^{m}\frac{\partial N_{j}^{l}}{\partial x_{1}}\right)^{2} + \left(h_{j}^{m}\frac{\partial N_{j}^{l}}{\partial x_{2}}\right)^{2}}$$
(15)

と計算される.式(15)によって動水勾配が与えられる と,式(12),(1)から要素 *l*内の侵食速度 *E^l*が求めら れ,式(7)に従って間隙率 *n*の時間変化を差分法により

$$n^{l,m+1} = n^{l,m} + \Delta t E^l A_e^l \tag{16}$$

と求める(実際の数値計算では要素のガウス積分点に て値を計算する).ここに Δ*t* は時間ステップ間の時間 増分である.間隙率 *n* の時間変化を算出後,式 (9) を 解くことで間隙流体に含まれる土粒子の濃度 C を求め る.式(9)は移流型の方程式のため,有限体積法を用い る.有限要素法では要素を構成する節点において未知 数を計算するが,有限体積法では1つの有限体積セル に対してセル内部を代表する未知数(ここでは土粒子 の濃度)の値を1つ計算する.本計算では有限体積セ ルとして式(11)を離散化した時と同じ有限要素を用い る.そのため有限要素法から計算された流速分布など を以下の操作で体積セルに割り当てる.

$$v_i^{l,m} = k_s h_j^m \frac{\partial N_j^l}{\partial x_i} \tag{17}$$

$$\bar{v}_i^{l,m} = \frac{1}{V^l} \int_{\Omega^l} v_i^{l,m} d\Omega \tag{18}$$

$$\bar{n}_i^{l,m} = \frac{1}{V^l} \int_{\Omega^l} n_i^{l,m} d\Omega \tag{19}$$

ここに $v_i^{l,m}$ は時間ステップm回目の要素l内部の浸透 流速ベクトル, $\bar{v}_i^{l,m}$, $\bar{n}_i^{l,m}$ はそれぞれ有限要素と同一の 体積セルlを代表する時間ステップm回目の浸透流速 ベクトルと間隙率を表す. Ω は解析領域を示し, Ω^l , V^l はそれぞれ要素(=体積セル)の領域,セルの体積(2 次元では面積)を意味している.有限体積法を適用す るため式(9)を体積セル Ω^l 上で積分する.

$$\int_{\Omega^{l}} \frac{\partial nC}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega^{l}} \frac{\partial Cv_{i}}{\partial x_{i}} d\Omega = \int_{\Omega^{l}} EA_{e} d\Omega \qquad (20)$$

グリーンの公式を適用すると

$$\int_{\Omega^l} \frac{\partial nC}{\partial t} \, d\Omega + \int_{s^l} C v_i t_i^l \, ds = \int_{\Omega^l} E A_e \, d\Omega \tag{21}$$

となる.ここに *s* は要素(=セル)の境界, *s^l*, *t^l*, はセ ル *l* の境界と境界における外向き単位法線ベクトルを 意味している.式(16)を用いて式(21)をセル *l* の内部 で一定の値を持つ間隙流体中の土粒子濃度 *C* を考えて 離散化すると

$$V^{l} \frac{\bar{n}^{l,m+1} C^{l,m+1} - \bar{n}^{l,m} C^{l,m}}{\Delta t} + q^{l}_{j} \Delta s^{l}_{j} = V^{l} \frac{\bar{n}^{l,m+1} - \bar{n}^{l,m}}{\Delta t}$$
(22)

となる.ここに $\Delta s_j^l \geq q_j^l$ はセル lの境界を形成する j番目の境界面の面積(2次元問題では線文の長さ)とその j番目の境界面における土粒子輸送フラックスを示している.この土粒子輸送フラックス q_j^l は FVS (Flux Vector Splitting)スキームを用いて以下のように与えられる¹⁰⁾.

$$q_j^l = C^{l,m} v_+^{l,m} + C^{r,m} v_-^{r,m}$$
(23)

$$v_{+}^{l,m} = \frac{1}{2} (\bar{v}_{i}^{l,m} t_{ij}^{l} + |\bar{v}_{i}^{l,m} t_{ij}^{l}|)$$
(24)

$$v_{-}^{r,m} = \frac{1}{2} (\bar{v}_{i}^{r,m} t_{ij}^{l} - |\bar{v}_{i}^{r,m} t_{ij}^{l}|)$$
(25)

ここに t^l_{ij} は j 番目の境界面の外向き単位法線ベクトル, r は境界面 j を介して隣接するセルのセル番号を意味す る(図–3参照).式(22)を C^{l,m+1} について解いた

$$C^{l,m+1} = \frac{\bar{n}^{l,m+1} - \bar{n}^{l,m} + \bar{n}^{l,m}C^{l,m}}{\bar{n}^{l,m+1}} - \frac{q_j^l \Delta s_j^l \Delta t}{V^l}$$
(26)



図-3 体積セル

によって任意のセルにおける土粒子濃度 C が逐次的に 計算できる.以上のように間隙流体圧(間隙流体の流 速),間隙率の変化,間隙流体に含まれる土粒子の濃度 が求められると以下の式によって間隙流体の密度と粘 性係数を更新し,次の時間ステップの計算に移行する.

$$\rho = C\rho_s + (1 - C)\rho_w \tag{27}$$

$$\mu = \eta (1 + 2.5C) \tag{28}$$

ここに, ρ_s , ρ_w , η は土粒子密度,水の密度,水の粘性 係数である.

4. 既往の侵食実験への適用

ここでは前節で提案した解析手法を Reddi et al. (2000)5)の実験結果に適用しその再現性を検証する.彼 らはオタワ砂とカオリナイトを質量比がそれぞれ7対3 になるように調整した材料を用いて土内部で生じる侵食 実験を行った. 詳しい実験の説明は Reddi et al. (2000) の論文に譲るが,彼らは直径101.6mm,厚さ50mmの 締固め供試体を作成し,蒸留水で飽和した供試体の厚 さ方向に通水を行うことで供試体内部で粒径の小さな カオリナイトの侵食を生じさせた.供試体の外部へ放 出された水とカオリナイトの混合物は比濁計により流 体中に含まれるカオリナイトの濃度に変換された後,単 位時間当たりに供試体から侵食を受けて放出されたカ オリナイトの質量が求められた.実験は供試体を通過 する流量を制御して行われ,0から900秒の間に0~ 200ml/min と流量を直線的に変化させ,900 秒経過後は 流量は 200ml/min に保たれた.実験中の動水勾配及び透 水係数の変化も計測された.図-4に Reddi et al. (2000) によって計測されたカオリナイトの単位時間当たりの 土粒子の放出量と経過時間の関係を示す.時間が経過 し,流量が大きくなると侵食が始まり単位時間に供試 体の外部に放出されるカオリナイトの量が増加してい



図-4 カオリナイトの放出速度と経過時間の関係



図-5 有限要素メッシュと境界条件



図-6 解析に用いた透水係数の時間変化 (Reddi et al. (2000)の 実験結果から作成)

く(0秒から600秒)が,その後侵食量は減少し,0へ と漸近していく様子が計測されている.侵食量が減少 するのは侵食可能な状態にあるカオリナイトが減少す るためだと考えられる.

図-5 には Reddi at al. (2000)の結果を解析するのに 用いた有限要素メッシュ(14要素 30節点)と境界条件 を示す.本解析は1次元の問題であるため,要素の幅 については任意であるが簡単のため2mとした.要素の



図-7 侵食速度の違いによるカオリナイトの放出速度の変化

厚さについては間隙流体が供試体外部へ流出する直前 の間隙流体に含まれる土粒子の濃度を把握するために 供試体の端部では厚さの小さな要素を配置した.図-5 に示したメッシュの上面を流体の流入部とし,流入境 界として Reddi et al. (2000)の実験で制御された流量と 同じになるように与えた.メッシュの下面は間隙流体 圧が0kPa(=大気圧)の圧力境界とした.土塊内部に 作用するせん断応力を推定するのに必要な透水係数の 値は彼らの計測結果を用いた.与えた透水係数の時間 変化を図-6に示す.

単位体積あたりに存在する侵食領域の表面積 A, は, まず単位時間当たりのカオリナイトの流出量を時間で積 分することで侵食されたカオリナイトの全質量(=1.1 × 10⁻³kg)を求め,それにカオリナイトの比表面積(=20 × 10³ m²/kg)を乗じ,供試体の体積(4.05 × 10⁻⁴ m³) で割ることで算出できる.解析では時間経過とともに 侵食速度に応じてカオリナイトが流体に取り込まれる. 取り込まれたカオリナイト量に対応する表面積を減少 させることで侵食を受ける粘土の表面積 を更新した. その他のパラメータとして,重力加速度(=9.8 m/s²), 水の密度(=1000 kg/m³), 土粒子密度(=2600 kg/m³), 水の粘性係数 (=1.005 × 10⁻³ kg/m·s) を与え,初期間 隙比(=0.27)と限界せん断応力(=1.1 Pa)は Reddi et al (2000)の実験結果を基にして与えた.侵食速度係数 α については直接計測することはできない.図-7に侵 食速度係数 lpha の変化がカオリナイトの放出速度に与え る影響を示す.侵食速度係数が大きくなると同図に示 されるようにピークに短時間に到達し,そのピーク値 は大きくなる.また侵食速度係数が小さくなればピー クに到達する時間が遅れ、ピーク値は小さくなる傾向 がみてとれる、カオリナイトの放出速度がピークに至 るまでは供試体全体で侵食された土粒子が供試体下端 の出口に運ばれるために放出速度は増加するが,次第 に侵食される粒子が減少することで放出速度はピーク をむかえた後に減少へと転じる.侵食速度係数をα=5.5 × 10⁻⁸ m³/kN[·]s とすると図-4 に示すように実験結果と 良好な一致を得る.侵食速度係数については Khilar et al. (1985)⁴⁾や Reddi et al. (2000)⁵⁾が指摘しているよう

に土の内部(間隙)で生じる侵食は土の表面で生じる それに比べて非常に遅く,侵食速度係数 α は土の表面 侵食で観測される $10^{-4} \sim 10^{-3}$ m³/kN·s のオーダーより もかなり小さいことが示唆されている.ここで得られ た侵食速度係数 α (=5.5 × 10^{-8} m³/kN·s)の値は彼ら の指摘と一致している.この結果は本解析手法が侵食 に関する材料定数を決定することで土塊内部の土粒子 の侵食及び移動を適切に表現できることを示すもので ある.

5. パイピング進展解析

前節の結果から第2~3節で提案した方程式及び数値 解析手法によって土の内部で生じる侵食と土粒子の輸 送を解析することが可能である.現在に至るまでパイ ピングの時間発展を解析するのは困難であるが,本解 析手法は侵食速度の概念を用いることで土内部で生じ る土粒子侵食の時間経過の過程を追うことが可能であ る.そこで本節では土の内部で集中的に侵食が起こる ことで発生するパイピング進展の様子を解析し,パイ ピングの時間発展解析に取り組む.

土粒子の侵食を評価するには単位体積あたりに存在 する侵食の対象となる土粒子の表面積 A_e を決定する 必要がある.前節では侵食されたカオリナイトの質量 から侵食粒子の表面積を求めたが,実際にはどれだけ の土粒子が侵食を受けるかは未知となる.そこで本節 では粒径分布から侵食対象の土粒子を推定する簡便な 方法を提案し,それを用いてパイピングの進展解析を 行う.

5.1 侵食領域と透水係数の推定

図-8 に示す粒径加積曲線が与えられたとすると,粒径 $D_{i-1} \sim D_i$ の大きさの土粒子は $P_i - P_{i-1}$ の割合で含まれている.単位体積あたりには質量 $\rho_s(1-n)$ の土粒子が含まれているため,粒径が $D_{i-1} \sim D_i$ の土粒子は質量にして $\rho_s(1-n)(P_i - P_{i-1})$ だけ含まれている.土粒子の粒径(直径) $D_{i-1} \sim D_i$ を中間の値

$$D_i' = \frac{D_{i-1} + D_i}{2} \tag{29}$$

で代表することで粒径が $D_{i-1} \sim D_i$ の土粒子が持つ表面 $積 A_e^i$ は単位体積あたり

$$A_{e}^{i} = \rho_{s}(1-n)(P_{i}-P_{i-1})\frac{A_{2}(D_{i}')^{2}}{\rho_{s}A_{3}(D_{i}')^{3}}$$
(30)

となる.ここに A_2 , A_3 はそれぞれ表面積,体積を算出 するための形状係数である.間隙流体の流れの作用に よって侵食を受け,土中を移動する土粒子は間隙の大 きさよりも小さな土粒子と考えられる(図-8 下図の灰 色の割合を占める土粒子).土塊の代表的な間隙の大き さ \hat{D} (以下代表間隙径と呼ぶ)は固有透水係数 K と間



図-8 粒径分布と代表間隙径

隙率を用いて.

$$\hat{D} = 4\sqrt{\frac{2K}{n}} \tag{31}$$

と推定できるため $^{5)}$,侵食対象となる土粒子の表面積 A_e は

$$A_e = \sum_{D_i < \hat{D}} A_e^i = \sum_{D_i < \hat{D}} \frac{A_2(1-n)(P_i - P_{i-1})}{A_3 D_i'}$$
(32)

と評価できる.

土粒子の流亡に従って透水係数も変化するため

$$k_{s} = D_{r}^{2} \frac{\rho g}{\mu} \frac{C_{T} e^{3}}{1+e}$$
(33)

と更新を行う^{11),12)}.ここに D_r , e, C_T は代表粒径,間 隙率,材料定数である.材料定数 C_T は初期状態におけ る透水係数 k_{s0} ,間隙比 e_0 ,粘性係数 μ_0 ,流体の密度 ρ_0 ,代表粒径 D_{r0} が分かれば

$$C_T = \frac{k_{s0}\mu_0(1+e_0)}{D_{r0}^2\rho_0 e_0^3 g}$$
(34)

と与えられる.以下の解析では代表粒径として粒径加 積曲線で重量通過百分率が 50%にあたる粒径 D₅₀ を与 えた¹²⁾.

5.2 二次元水平土塊におけるパイピング

図-9には解析対象となる水平に設置されたおよそ長



図-10 初期及び最終粒径分布

方形の土塊のメッシュ(4800要素,4941節点)と境界 条件を示す.土塊左端に9.8kPaの水圧を加え,右端の 水圧は大気圧(=0kPa)とし,上下面は非排水条件と して左から右へと流れる浸透流によって侵食を生じさ せるものである.本解析ではSellmeijer(2008)¹³⁾の実験 を参考にし,土塊の右端では浸透流の集中を促すため にくぼみを形成した.材料の初期間隙率を 0.36,初期 透水係数を 1.0 × 10⁻⁶ m/s とし, 図-10 に示す初期粒 径分布を与え,土粒子の形状は球形と仮定した.その 他のパラメータには重力加速度(=9.8 m/s²), 水の密 度(=1000 kg/m³), 土粒子密度(=2600 kg/m³), 水 の粘性係数 (=1.002 × 10⁻³ kg/m·s), 限界せん断応力 (=0.021 Pa), 侵食速度係数(=2.1 × 10⁻⁷ m³/kN·s)を 与えた.限界せん断応力は土塊右端のくぼみ部分で侵 食が発生するように設定した.これはパイピングの発 生しやすい箇所でパイピングが生じるように設定する 実験条件に対応するものである.侵食速度係数の値は 上述したように 10⁻⁴~10⁻³ m³/kN·s のオーダーよりも かなり小さいことが示唆さてれいるため,10⁻⁷ m³/kN·s オーダーの十分に小さな値を採用した.

図-11 に計算結果である土塊内部の間隙率分布の経時変化を示す.同図では上から侵食開始2000,6000,



図-11 間隙率分布の時間変化



図-12 パイピング実験装置の概要





8000,20000分後の結果を示している.土塊内部の侵 食は比較的浸透流速の速い土塊右端の中央部から始ま り(2000分後),浸透流の流れとは反対方向へと直線的 に発展する(2000~8000分後).その後,侵食が土塊の 左端まで到達すると侵食領域がやや広がり,最後には土 塊を貫通するように細粒分が流亡し間隙率の増加した 領域が現れる.間隙率の増加した領域では細粒分が流亡 することで間隙率は0.416まで増加し,図-10中の最終 粒径分布で表される粒径加積曲線へと変化した.以上の 数値実験結果のような侵食が浸透流の方向とは逆方向 へと進行しパイピングに至る様子は,Sellmeijer(2008) の示す典型的な後退侵食(Backward erosion)を定性的 に表現するものである.



5.3 重力下の浸透流によるパイピング

既往のパイピングに関係した実験的研究では,図-12 に示すような装置を用いてしばしば実験が行われ てきた.同図の左に示す水槽の水頭を上昇させること で土槽中に左から右方向への浸透流を生じさせて土槽 に発生するパイピングを観察するものである.ここで は,図-12に示した実験を模擬した数値解析を実行す る.図-13 に本解析に用いた有限要素メッシュ(3200 要素, 3321 節点)と境界条件を示す. 土槽の大きさは 長さ 80cm, 深さ 40cm であり, その底面, 右面及び上 面の右側 60cm は不透水,上面の左側 20cm には水圧 として大気圧(=0kPa)を与えた.土槽の左側には土 槽上面から 100cm (土槽底面からは 140cm)の貯水を 行ったものと仮定して,この条件に対応する静水圧分布 を境界条件として間隙流体圧の値に与えた、材料の初 期間隙率を 0.38, 初期透水係数を 1.0 × 10⁻⁶ m/s とし, 図-14 に示す初期粒径分布を与え,土粒子の形状は球形 と仮定した.その他のパラメータは重力加速度(=9.8 m/s²), 水の密度(=1000 kg/m³), 土粒子密度(=2600

kg/m³),水の粘性係数(= 1.002×10^{-3} kg/m^s),限界 せん断応力(=0.036 Pa),侵食速度係数(= 8.1×10^{-7} m³/kN^s)とした.限界せん断応力の値は最も浸透流速 (動水勾配)が大きくなる土槽上面にある不透水ゾーン の右端で侵食が生じる値に設定し,これはパイピング の起こりやすい箇所で土粒子の移動が起こるように調 節する実験条件に対応している.侵食速度係数につい ては上の解析例と同様に 10^{-7} m³/kN^s のオーダーの十 分小さな値とした.

図-15に計算から得られた間隙率分布の時間変化を示 す.同図からわかるように侵食は浸透流速が大きくな る土槽上端にある不透水面の右端付近から始まる(600 分後).その後,不透水面の直下をゆっくりと線状に 上流側へと侵食が進んでいく結果となった(600分~ 1400分後).侵食によって細粒分が流出し,間隙率が 増加した部分(図-15中の黒い要素)では式(33)に従っ て透水係数が増加し流速の上昇と浸透流の集中が観察 された.Wit et al.(1981)¹⁴⁾やSchmertmann(2000)¹⁵⁾によ るパイピング実験でも本解析結果と同様の不透水面直 下で生じる粒子流亡とパイピング経路が観察されてお り,本解析はその現象を定性的に表現している.

6. 結論

本論文ではパイピングの時間発展を解析する手法の 開発を目的として,土塊内部での土粒子侵食を解析す るため土の侵食速度を導入し,間隙流体の流れ,土粒 子の侵食と移動に関係する3つの方程式を導出した. 間隙流体の流れについてはその保存側を有限要素法に よって解き,算出された流速場から差分法によって侵 食による間隙率の変化を計算した.侵食された土粒子 の移動に関してはその保存側を有限体積法を用いるこ とで簡単なアルゴリズムで計算負荷の少ない計算が可 能であった.

提案した解析手法は Reddi et al.(2000)の土の内部侵 食についての実験結果を再現するのもであり,侵食特 性を決定することで土塊内部での土粒子侵食を表現で きることが示された.さらに本手法を用いたパイピン グの数値実験からは後退侵食(Backward erosion)に代 表されるパイピングの時間発展とその経路を上に述べ た方程式の初期値・境界値問題を解くことで予測できることが示唆された.本論文で提案された解析手法は 精度ある侵食モデルを発展させることで,信頼性のあるパイピング予測に貢献できるものと考える.

参考文献

- 小林範之,吉武美孝,安藤 光:セルオートマトンによる堤体パイピングシミュレーション,農業土木学会論文集, No.243, pp.47-55, 2006.
- Foster, M., Fell, R. and Spannagle, M. : The statistics of embankment dam failures and accidents, *Can. Geotech. J.*, Vol.37, pp.1000-1024, 2000a.
- Foster, M., Fell, R. and Spannagle, M. : A method for assessing the relative likelihood of failure of embankment dams by piping, *Can. Geotech. J.*, Vol.37, pp.1025-1061, 2000b.
- Khilar, K. C., Fogler, H. S. and Gray, D. H. : Model for piping-plugging in earthen structures, *Journal of Geotech*nical Engineering, ASCE, Vol.111, No.7, pp.833-846, 1985.
- Reddi, L. N., Lee, In-M and Bonala, M. V. S. : Comparison of internal and surface erosion using flow pump test on a sand-kaolinite mixture, *Geotechnical Testing Journal*, Vol.23, NO.1, pp.116-122, 2000.
- Wan, C. F. and Fell, R. : Investigation of rate of erosion of soils in embankment dams, *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, Vol.130, No.4, pp.373-380, 2004.
- Ojha, C. S. P., Sigh, V. P. and Adrian, D. D. : Determination of critical head in soil piping, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.129, No.7, pp.511-518, 2003.
- Skempton, A. W. and Brogan, J. M.: Experiments on piping in sandy gravels, *Geotechnique*, Vol.44, No.3, pp.449-460, 1994.
- Richards, K. S. and Reddy, K. R.: Critical appraisal of piping phenomenon in earth dams, *Bull. Eng. Geol. Environ.*, Vol.66, pp.381-402, 2007.
- 10) Toro, E. F.: Riemann Solvers and Numerical Method for Fluid Dynamics, 2nd edition, Springer, 1999.
- 11) Lambe, T. W. and Whitman, R. V.: Soil Mechanics, SI version, John Wiley & Sons, p.283, 1979.
- 12) Budhu, M.: Soil Mechanics and Foundation, 2nd Edition, John Wiley & Sons, p.83, 2007.
- Sellmeijer, H.: *Mechanism of piping*, Document for Delft Geoacademy Course of Understanding Dike Safety, M1, 2008.
- 14) Wit, J.M. de, Sellmeijer, J.B. and Penning, A. : Laboratory testing on piping, *Proc. 10th Int. Conf. on Soil Mech. and Foundation Engineering*, Stockholm, pp.517-520, 1981.
- 15) Schmertmann, J.H. : The no-filter factor of safety against piping through sands, *Judgment and innovation the her-itage and future of the geotechnical engineering profession*, ASCE, pp. 65-132, 2000.

(2009年4月9日受付)