応用力学論文集 Vol.12, pp.299-310　（2009 年 8 月）　土木学会

ハイブリッド複合材料のはく離を考慮した有限要素の開発

Development of a finite element of hybrid composite materials with debonding effect

片野俊一*・斉木功**・小山茂***・岩熊哲夫****
Shunichi KATANO, Isao SAIKI, Shigeru KOYAMA and Tetsuo IWAKUMA

*正会員 修士（工学） JFE エンジニアリング（株）鋼構造本部橋梁事業部（〒 230-8611 横浜市鶴見区末広町 2-1）
**正会員 博士（工学） 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻（〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06）
***正会員 博士（工学） 信州大学工学部社会開発工学科（〒 380-8553 長野市若里 4-17-1）
****正会員 PhD 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻

Composite materials are known as a functional material with various advantages. On the other hand, interfacial debonding between the inclusion and the matrix becomes a serious problem in their initial stage of fracture as well as their ultimate strength. We propose a finite element which can model a microscopic system and include an approximate model of interfacial debonding, in order to use such an element for design of composite materials. In addition, the progressive debonding phenomenon is simulated by fluctuation of the debonding stress. Several numerical examples and comparisons with experimental results show the characteristics and feasibility of this model.

Key Words : *composites, hybrid, interfacial debonding, Mori-Tanaka theory*

1. まえがき

土木分野で用いられている複合材料でも，母材に 2 種類以上の繊維を配合するハイブリッド化が進められている．この複合材料の力学特性は内部のミクロ構造に大きく影響されるため，材料開発段階で，内部のミクロ構造を考慮してマクロ挙動を計算する平均化手法が用いられることがある．例えば有限要素法と特異摂動法を組み合わせた均質化手法[1]があるが，実際のミクロ構造はそのままメッシュにするにはかなり複雑な場合もあるし，さらにミクロ・マクロの連成解析は効率的ではない場合も多いとも言われている．ただ材料開発の段階では，配合のおおまかな範囲あるいは上下界がわかればいい場合もあり，その場合は計算機の負荷が小さく比較的精度がいい解析的な手法も有用である．

その解析的な方法の一つとして著者ら[2),3)]は，架空の母材を用いた 3 相材料に対する森・田中予測で極限として母材を無くすことにより，2 相材料のマクロ弾塑性挙動をより精度良く予測できる平均化手法を提案した．この手法では，存在しない母材（以後「仮想母材」と呼ぶ）の剛性の選択によって既存の各種予測と一致する結果が得られるが，著者らはエネルギ的に最適な仮想母材の選択法を提案している．本研究では，この手法に Hill の self-consistent 法[4)]を応用する手法を提案する．

一方，複合材料中では界面剥離や積層材層間剥離という問題点もある．解析的な手法の範囲で界面剥離問題を研究した例はいくつかあるが，その中に Zhao and Weng による介在物の応力伝達能力に着目した研究[5)]がある．このモデルでは等方性介在物が剥離後に，完全付着したまま界面剥離方向に応力を伝達しない直交異方性を持った仮想的な介在物（以後「仮想介在物」と呼ぶ）に置き換わるとしている．著者ら[6)]も，前述の手法に比べて若干精度の劣る平均化手法を用いた有限要素の中に Weng の仮想介在物で剥離をモデル化し，界面剥離の発生条件を最大引張主応力が限界値（剥離応力）に達したときとし，実験との比較等を行ってきた．

そこで本研究では，この手法にさらに，その剥離応力が Weibull 分布の確率密度関数に従って変動すると考え，実際の介在物形状の不整や析出物等によるばらつきを表現する．また同時に，平均化の精度を上げるために，前述した仮想母材を用いた平均化手法[3)]に改善する．これによって，介在物の形状や分布，剥離規準の違い等による複合材料のマクロ挙動を追跡できる新しい有限要素を開発する．それを用いていくつかの実験と比較し，剥離の影響が定性的・定量的に扱えることを示し，本手法の有用性を示す．

2. 界面剥離モデルと剥離規準

2.1 剥離規準と界面剥離現象の表現方法

複合材料の界面剥離発生規準については，円柱形ファイバーの長軸直角方向の界面強度に注目した実験的研究[7)]がある．その研究では，最終的に円断面の法線方向応力が界面剥離に対して最も重要な要因であると結論付けている．この結論は直感的にも理解しやすいので本研究でも同様の界面剥離規準を設定する．幸い本手法では，母材も介在物も平均応力のみを算定していて各相内は一定値をとる．そこで，ある介在物の最大引張り主応

力方向が x_1 軸方向だった場合，剥離規準を

$$\sigma_{11} = \sigma^d \tag{1}$$

で与えられるものとする．ただし $\sigma^d > 0$ で，圧縮では剥離しないものとする．実際の剥離は非常に複雑で，介在物が楕円形でないことや，界面に析出物が存在すること等の局所的な不整の問題があるが，ここでは発生規準だけを上式のような物理モデルに改善し，それ以外は後述の確率的な分布で近似する．

さて Zhao and Weng[5] は，界面剥離が生じた介在物の応力伝達能力に着目して界面剥離を表現している．つまり，x_1 軸方向を法線とする界面に剥離が生じた場合，介在物はその方向には応力を伝達しないので $\sigma_{11} = \sigma_{31} = \sigma_{12} = 0$ という状態になる．そこで，剥離した介在物はこの応力状態になるような弾性材料に置き換わるとする．つまりこの仮想介在物の応力ひずみ関係は Voigt 表記で次のようになる．

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \boldsymbol{C}_i^d \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad \boldsymbol{C}_i^d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{22}^d & C_{23}^d & C_{24}^d & 0 & 0 \\ 0 & C_{23}^d & C_{33}^d & C_{34}^d & 0 & 0 \\ 0 & C_{24}^d & C_{34}^d & C_{44}^d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

2.2　剥離応力の設定

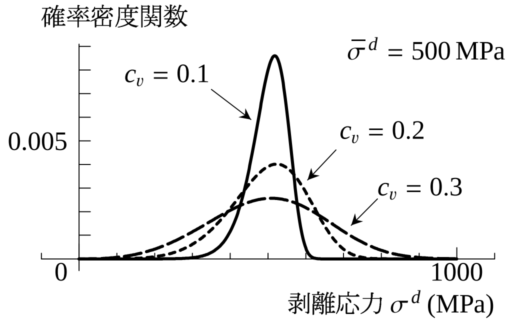
実際の材料の剥離は種々の局所的な特性等によって，見かけ上確率的に発生すると考えられるため，最近の研究[8),9)]では剥離の発生確率が Weibull 分布に従うとし，損傷理論と同じように剥離・付着状態の介在物の体積比率を変化させていくことによって，複合材料の進行性剥離シミュレーションを行っている．しかし，このような手法では連続的な応力状態しか予測できず，実現象で確認されているような急激な応力低下が再現できない．そこで本研究ではもっと単純に考え，各介在物ごとに剥離応力が Weibull 分布に従ってランダムに与えられているとすることにした．つまり，$0 \le x \le 1$ の乱数 x を用いて式 (1) の剥離応力が

$$\sigma^d = \frac{\bar{\sigma}^d \sqrt[m]{-\log(1-x)}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)} \tag{3}$$

で与えられるものとする．ここに $\bar{\sigma}^d$ は平均剥離応力であり，m は Weibull 分布の変動係数 c_v と

$$c_v = \frac{\sqrt{\Gamma\left(1+\frac{2}{m}\right) - \left\{\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)\right\}^2}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)} \tag{4}$$

という関係にある．ここに $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数である．**図–1** に一例を示した．



図–1　Weibull 分布に従うランダムな剥離応力

3.　マクロ弾塑性挙動と有限要素

3.1　弾塑性複合材料に対する増分型森・田中平均化

この定式化については既に文献[3)]に示しているので，必要最小限の式を，無限体母材中に $N-1$ 種類の回転楕円体形状の介在物がランダムに分布している N 相複合材料について列挙する．$\dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \boldsymbol{C}$ をそれぞれ応力増分テンソル・全ひずみ増分テンソル・弾性係数テンソルとする．次節で導入する仮想母材は弾性なので，この節の母材も弾性とし，直角座標系 (x_1, x_2, x_3) において母材中の増分応力ひずみ関係は

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{M}} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{M}}, \tag{5}$$

と書けるものとする．ここに下添え字の M は母材部分の諸量であることを示す．また，介在物における増分応力ひずみ関係は

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_i = \boldsymbol{C}_i(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^p), \quad i = 1, 2, \cdots N-1 \tag{6}$$

と書ける．ここに下添え字の i に関しては介在物 i の諸量であることを示し，$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^p$ は介在物 i の塑性ひずみ増分テンソルを示す．

これに対して森・田中平均化の枠組みでは，全領域平均の $\langle\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\rangle_{\mathrm{D}}$ が母材内に平均値として生じているものと仮定し，母材中の平均的な増分応力ひずみ関係を

$$\langle\dot{\boldsymbol{\sigma}}\rangle_{\mathrm{M}} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} \langle\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\rangle_{\mathrm{D}} \tag{7}$$

と仮定した．ここに $\langle\cdot\rangle$ は下添え字で示した領域での平均量を表す．一方，介在物内の平均的な増分応力ひずみ関係は単純に

$$\langle\dot{\boldsymbol{\sigma}}\rangle_i = \boldsymbol{C}_i \left\{\langle\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\rangle_i - \langle\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\rangle_i\right\} \tag{8}$$

と表せる．介在物部分のひずみ増分は，母材と介在物の相互作用による乱れ成分 $\dot{\boldsymbol{\gamma}}_i$ が加わるので

$$\langle\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\rangle_i = \langle\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\rangle_{\mathrm{D}} + \dot{\boldsymbol{\gamma}}_i \tag{9}$$

となる．またこれを式 (8) に代入すれば

$$\langle\dot{\boldsymbol{\sigma}}\rangle_i = \boldsymbol{C}_i \left\{\langle\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\rangle_{\mathrm{D}} + \dot{\boldsymbol{\gamma}}_i - \langle\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\rangle_i\right\} \tag{10}$$

と書き直すことができる．

この応力状態は，介在物中に eigen ひずみ増分 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^*$ を分布させ，等価介在物法[10])を用いると

$$\langle\dot{\boldsymbol{\sigma}}\rangle_i = \boldsymbol{C}_{\mathrm{M}}\left[\langle\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\rangle_{\mathrm{D}} + \dot{\boldsymbol{\gamma}}_i - \{\langle\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\rangle_i + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^*\}\right] \tag{11}$$

と表すことができる．したがって，乱れ成分 $\dot{\boldsymbol{\gamma}}_i$ は一様材料の問題として解くことができ

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}_i = \boldsymbol{S}_i\{\langle\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\rangle_i + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^*\} \tag{12}$$

と求められる．ここに $\boldsymbol{S}_i$ は Eshelby のテンソルと呼ばれ，特に等方弾性体の母材中に等方弾性回転楕円体介在物が存在する場合，介在物形状の半径比と母材のポアソン比のみで決まる定数テンソルになる．

最後に，弾塑性 N 相材料からなる複合材料全体のマクロ応力増分 $\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}$ およびマクロひずみ増分 $\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ は母材と介在物の諸量の重み平均で

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \equiv \left(1 - \sum_{k=1}^{N-1} f_k\right)\langle\dot{\boldsymbol{\sigma}}\rangle_{\mathrm{M}} + \sum_{k=1}^{N-1} f_k\langle\dot{\boldsymbol{\sigma}}\rangle_k \tag{13a}$$

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \equiv \left(1 - \sum_{k=1}^{N-1} f_k\right)\langle\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\rangle_{\mathrm{D}} + \sum_{k=1}^{N-1} f_k\langle\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\rangle_k \tag{13b}$$

と定義する．ここに f_i は複合材料全体積中に占める介在物 i の体積比率を表し，複合材料の全体積を V, 介在物 i の体積を V_i とすると次式で定義される．

$$f_i \equiv \frac{V_i}{V} \tag{14}$$

そこで，式 (7), (10), (11), (12) より

$$\langle\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\rangle_i + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^* = \boldsymbol{L}_i(\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{C}_i)\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}}^{-1}\langle\dot{\boldsymbol{\sigma}}\rangle_{\mathrm{M}} + \boldsymbol{L}_i\boldsymbol{C}_i\langle\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\rangle_i \tag{15}$$

となる．ただし

$$\boldsymbol{L}_i = \{\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} - (\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{C}_i)\boldsymbol{S}_i\}^{-1}$$

とする．この式と式 (12) を式 (11) に代入すると

$$\begin{aligned}\langle\dot{\boldsymbol{\sigma}}\rangle_i &= \left[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{C}_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{S}_i - \boldsymbol{I})\boldsymbol{L}_i(\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{C}_i)\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}}^{-1}\right]\langle\dot{\boldsymbol{\sigma}}\rangle_{\mathrm{M}} \\ &\quad + \boldsymbol{C}_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{S}_i - \boldsymbol{I})\boldsymbol{L}_i\boldsymbol{C}_i\langle\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\rangle_i\end{aligned} \tag{16}$$

となり，$\boldsymbol{I}$ は 4 階の単位テンソルを表す．また，式 (16) をマクロ応力増分の式 (13a) に代入すると

$$\begin{aligned}\langle\dot{\boldsymbol{\sigma}}\rangle_{\mathrm{M}} &= \left[\boldsymbol{I} + \sum_{k=1}^{N-1} f_k\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{S}_k - \boldsymbol{I})\boldsymbol{L}_i(\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{C}_k)\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}}^{-1}\right]^{-1} \\ &\quad \left[\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} - \sum_{k=1}^{N-1} f_k\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{S}_k - \boldsymbol{I})\boldsymbol{L}_i\boldsymbol{C}_k\langle\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\rangle_k\right]\end{aligned} \tag{17}$$

となる．一方，式 (9), (12), (15) を式 (13b) に代入すると，マクロひずみ増分は次のようになる．

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} &= \left[\boldsymbol{I} + \sum_{k=1}^{N-1} f_k\boldsymbol{S}_k\boldsymbol{L}_i(\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{C}_k)\right]\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}}^{-1}\langle\dot{\boldsymbol{\sigma}}\rangle_{\mathrm{M}} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{N-1} f_k\boldsymbol{S}_k\boldsymbol{L}_i\boldsymbol{C}_k\langle\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\rangle_k\end{aligned} \tag{18}$$

以上より，式 (17) を式 (18) に代入し整理することにより，複合材料全体の平均増分応力ひずみ関係が次のように導かれる．

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \bar{\boldsymbol{C}}\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \sum_{k=1}^{N-1}\boldsymbol{A}_k\langle\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\rangle_k \tag{19}$$

また，式 (17), (18) を整理すれば，母材部分，介在物部分の増分応力ひずみ関係が次のように表現できる．

$$\langle\dot{\boldsymbol{\sigma}}\rangle_{\mathrm{M}} = \boldsymbol{B}_{\mathrm{M}}\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \sum_{k=1}^{N-1}\boldsymbol{E}_k\langle\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\rangle_k \tag{20a}$$

$$\langle\dot{\boldsymbol{\sigma}}\rangle_i = \boldsymbol{B}_i\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \boldsymbol{F}_i\langle\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\rangle_i - \boldsymbol{G}_i\sum_{k=1}^{N-1}\boldsymbol{E}_k\langle\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\rangle_k \tag{20b}$$

ここで，$\bar{\boldsymbol{C}}, \boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{B}_{\mathrm{M}}, \boldsymbol{B}_i, \boldsymbol{E}_i, \boldsymbol{F}_i, \boldsymbol{G}_i$ はすべて 4 階のテンソルであり，次のような形を持つ．

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{C}} &= \boldsymbol{C}_{\mathrm{M}}\left[\boldsymbol{I} + \sum_{k=1}^{N-1} f_k(\boldsymbol{S}_k - \boldsymbol{I})\boldsymbol{L}_i(\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{C}_k)\right] \\ &\quad \left[\boldsymbol{I} + \sum_{k=1}^{N-1} f_k\boldsymbol{S}_k\boldsymbol{L}_i(\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{C}_k)\right]^{-1}\end{aligned} \tag{21a}$$

$$\boldsymbol{A}_i = f_i\left\{\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} - \left(\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} - \bar{\boldsymbol{C}}\right)\boldsymbol{S}_i\right\}\boldsymbol{L}_i\boldsymbol{C}_i \tag{21b}$$

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{M}} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{M}}\left[\boldsymbol{I} + \sum_{k=1}^{N-1} f_k\boldsymbol{S}_k\boldsymbol{L}_i(\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{C}_k)\right]^{-1} \tag{21c}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}_i &= \boldsymbol{C}_{\mathrm{M}}\left[\boldsymbol{I} + (\boldsymbol{S}_i - \boldsymbol{I})\boldsymbol{L}_i(\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{C}_i)\right] \\ &\quad \left[\boldsymbol{I} + \sum_{k=1}^{N-1} f_k\boldsymbol{S}_k\boldsymbol{L}_i(\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{C}_k)\right]^{-1}\end{aligned} \tag{21d}$$

$$\boldsymbol{E}_i = f_i\boldsymbol{B}_{\mathrm{M}}\boldsymbol{S}_i\boldsymbol{L}_i\boldsymbol{C}_i \tag{21e}$$

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{C}_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{S}_i - \boldsymbol{I})\boldsymbol{L}_i\boldsymbol{C}_i \tag{21f}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}_i &= \boldsymbol{I} + \boldsymbol{C}_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{S}_i - \boldsymbol{I})\boldsymbol{L}_i(\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{C}_i)\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}}^{-1} \\ \boldsymbol{L}_i &= \{\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} - (\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{C}_i)\boldsymbol{S}_i\}^{-1}\end{aligned} \tag{21g}$$

$\bar{\boldsymbol{C}}$ は複合材料全体の平均弾性係数テンソルを表す．

3.2 介在物内部の流れ則

介在物 i は以下のような von Mises の降伏条件に従うものとする．

$$F_i \equiv \sqrt{(J_2)_i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\sigma_i^y + K_i\left(\varepsilon_i^{eq}\right)\right\} \tag{22}$$

ただし，硬化関数は代表的な文献[11])で用いられている power-law に従うと仮定し，降伏関数を $K_i\left(\varepsilon_i^{eq}\right) \equiv h_i\left(\varepsilon_i^{eq}\right)^{n_i}$ とする．ここに，σ_i^y は介在物 i の単純引張降伏応力であり，h_i, n_i は硬化パラメータである．また，各介在物の相当応力 $\sqrt{(J_2)_i}$ および相当塑性ひずみ ε_i^{eq} は以下のように定義する．

$$\sqrt{(J_2)_i} \equiv \sqrt{\frac{1}{2}\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle_i' : \langle\boldsymbol{\sigma}\rangle_i'} \tag{23a}$$

$$\varepsilon_i^{eq} \equiv \int_{\text{履歴}}\sqrt{\frac{2}{3}\langle\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\rangle_i : \langle\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\rangle_i}\,\mathrm{d}t \tag{23b}$$

ここに $\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle_i'$, $\langle\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\rangle_i$ はそれぞれ介在物内部の偏差応力と塑性ひずみ増分で，‘:’ は 2 階のテンソルの内積を表す．

本論文では，各増分ステップでの介在物の塑性ひずみを求めるために，Simo and Hughes[12)]の radial return mapping algorithm を用いる．また，流れ則に Prandtl-Reuss の関連流れ則を用いることで，介在物内部の塑性ひずみ増分は以下のように表される．

$$\langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \rangle_i = \boldsymbol{T}_i \langle \dot{\boldsymbol{\sigma}} \rangle_i \tag{24}$$

ここに

$$\boldsymbol{T}_i \equiv \frac{1}{H_i} \frac{\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_i' \otimes \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_i'}{4(J_2)_i} \tag{25}$$

であり，'⊗' はテンソル積を表す．また硬化係数は以下のように定義される．

$$H_i \equiv \frac{h_i n_i}{3} \left(\varepsilon_i^{eq} \right)^{n_i - 1} \tag{26}$$

3.3　多相複合材料の平均弾塑性構成関係

前節までに導出した式を用いることによって，複合材料全体の平均弾塑性応力ひずみ関係を求めることができる．まず，式 (20b) に式 (24) を代入して整理すると

$$\sum_{j=1}^{N-1} \boldsymbol{M}_{ij} \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \rangle_j = \boldsymbol{T}_i \boldsymbol{B}_i \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \tag{27}$$

となる．ここに

$$\boldsymbol{M}_{ij} \equiv \delta_{ij} (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{T}_i \boldsymbol{F}_i) + \boldsymbol{T}_i \boldsymbol{G}_i \boldsymbol{E}_j \tag{28}$$

と定義し，δ_{ij} はクロネッカーのデルタである．この式の左辺の $\boldsymbol{M}_{ij}$ に関する逆行列を $(\boldsymbol{M}^{-1})_{ij}$ と定義すると，介在物の塑性ひずみ増分とマクロひずみ増分の関係が次のように表される．

$$\langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \rangle_i = \boldsymbol{Y}_i \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \tag{29}$$

ここに

$$\boldsymbol{Y}_i \equiv \sum_{j=1}^{N-1} (\boldsymbol{M}^{-1})_{ij} \boldsymbol{T}_j \boldsymbol{B}_j \tag{30}$$

とする．

以上より，式 (29) を式 (19) に代入することによって，N 相材料からなる複合材料の平均増分応力ひずみ関係が次のように得られる．

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{ep}} \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \tag{31}$$

ここで $\boldsymbol{C}^{\mathrm{ep}}$ は平均弾塑性接線係数であり，以下のように表される．

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{ep}} \equiv \bar{\boldsymbol{C}} - \sum_{k=1}^{N-1} \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{Y}_k \tag{32}$$

同様に，各物理量はマクロひずみ増分 $\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ を用いて以下のようにまとめられる．

$$\langle \dot{\boldsymbol{\sigma}} \rangle_{\mathrm{M}} = \boldsymbol{Z}_{\mathrm{M}} \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \tag{33a}$$

$$\langle \dot{\boldsymbol{\sigma}} \rangle_i = \boldsymbol{Z}_i \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \tag{33b}$$

$$\langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_{\mathrm{D}} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{M}}^{-1} \boldsymbol{Z}_{\mathrm{M}} \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \tag{33c}$$

$$\langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_i = \boldsymbol{P}_i \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \tag{33d}$$

$$\langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \rangle_i + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^* = \boldsymbol{Q}_i \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \tag{33e}$$

ここで，各係数は以下のように定義される．

$$\boldsymbol{Z}_{\mathrm{M}} \equiv \boldsymbol{B}_{\mathrm{M}} - \sum_{k=1}^{N-1} \boldsymbol{E}_k \boldsymbol{Y}_k \tag{34a}$$

$$\boldsymbol{Z}_i \equiv \boldsymbol{B}_i + \boldsymbol{F}_i \boldsymbol{Y}_i - \boldsymbol{G}_i \sum_{k=1}^{N-1} \boldsymbol{E}_k \boldsymbol{Y}_k \tag{34b}$$

$$\boldsymbol{P}_i \equiv \boldsymbol{C}_i^{-1} \boldsymbol{Z}_i + \boldsymbol{Y}_i \tag{34c}$$

$$\boldsymbol{Q}_i \equiv \{ \boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} - (\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{C}_i) \boldsymbol{S}_i \}^{-1} \tag{34d}$$

$$\left\{ (\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{C}_i) \boldsymbol{C}_{\mathrm{M}}^{-1} \boldsymbol{Z}_{\mathrm{M}} + \boldsymbol{C}_i \boldsymbol{Y}_i \right\} \tag{34e}$$

このようにマクロ応力増分またはマクロひずみ増分を与えることで，複合材料の全体あるいは各相の平均挙動を求めることができる．界面剥離が発生した場合は，介在物の弾性テンソル $\boldsymbol{C}_i$ を式 (2) の仮想介在物の弾性テンソル $\boldsymbol{C}_i^d$ に置き換えることによって界面剥離を表現する．ただし，Eshelby テンソルには $\boldsymbol{C}_i^d$ の異方性を考慮しない剥離前のもので近似することにした．また，弾性に対して適用するためには $\boldsymbol{T}_i = 0$ と置けばよい．

さらに本研究では，3 次元的な介在物の方向分布を考慮するため，回転楕円体の Eshelby のテンソルをその向きに応じて座標変換して考える．ここでは回転楕円体の長軸方向を Euler 角 (ψ, θ, φ) を用いて表現している．

3.4　有限要素と Newton-Raphson 法による応力再配分

有限要素は，一般的な有限要素法における材料構成則を前項のものに変更するだけである．ここでは，文献[13)]に詳しい 8 節点アイソパラメトリック 6 面体要素を，非線形解析に対応させるため増分型に改訂したものを用いる．また剥離が生じると，そこで受け持っていた応力が開放され，周りの母材や他の介在物に配分しないと釣り合いが取れなくなる．そこで，前述の塑性変形の対処と同様，return mapping algorithm と Newton-Raphson 法を用いて，剥離による応力の再配分にも対応できるようにした．また，剥離が生じたら即座に $\boldsymbol{C}_i$ を $\boldsymbol{C}_i^d$ に更新した上で繰り返し計算を続けるようにした．

4.　仮想母材を導入した平均化手法

4.1　母材の体積比率を零にする平均化

前節では，N 相複合材料に対する森・田中平均化を有限要素法に適用し，剥離を考慮した弾塑性平均挙動予測手法を提案した．本研究ではさらに精度の良い予測を行うために，$\sum_{i=1}^{N-1} f_i = 1$，すなわち第 N 相の仮想母材の体積比率を零にした極限の場合の平均化[3)]を行うので，実際の母材は介在物の一つとして扱われることになる．その仮想母材の剛性選択には，次の 2 方法を提案する．

4.2 増分ひずみエネルギ原理を用いた母材剛性の選択法

仮想母材の剛性の選択方法として，文献[3]では弾性ひずみエネルギ原理を用いた手法を提案した．つまり，増分ひずみエネルギ率 W^*_{ep}

$$W^*_{ep} = \frac{1}{2}\int_D \dot{\sigma}^0_{ij}\dot{u}^0_{i,j}\,\mathrm{d}D - \frac{1}{2}\int_\Omega \dot{\sigma}_{ij}(\dot{\varepsilon}^p_{ij} + \dot{\varepsilon}^*_{ij})\,\mathrm{d}D \tag{35}$$

あるいは

$$W^*_{ep} = \frac{1}{2}\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} : \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1} f_i\,[\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{S}_i - \boldsymbol{I})\{\langle\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\rangle_i + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*_i\}] : \{\langle\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\rangle_i + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*_i\} \tag{36}$$

が最小になるような仮想母材の材料定数を求めた上で，平均挙動を求めるものである．このとき，平均ひずみを与えたエネルギ表現にするか，平均応力を与えた表現にするかによって，上下界のような 2 種類の予測が可能であるが，ここでは実験結果とも比較的整合のいい前者のみを用いる．具体的な計算法は文献[3]に示した．

4.3 self-consistent 法を用いた母材剛性の選択法

本研究では，もう 1 つの仮想母材剛性の選択方法として， Hill の self-consistent 法[4]を用いた手法を新たに提案する．森・田中の考え方の場合には，実際の母材の中に介在物を置いて相互作用を算定している．これに対し， self-consistent 法の場合には，これから求めようとする未知の平均弾性を持つ材料中に介在物を置いて相互作用を算定する．詳細は省略するが，最終的に平均弾性の応力ひずみ関係が

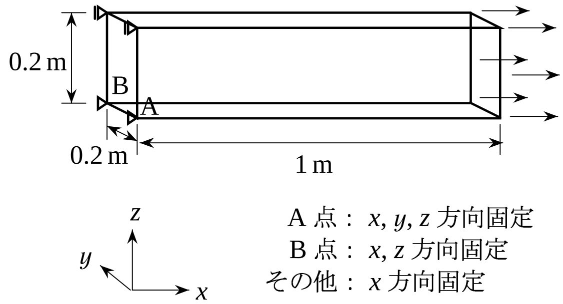
$$\begin{aligned}\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} &= \left[\left(1 - \sum_{k=1}^{N-1} f_k\right)\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} + \sum_{k=1}^{N-1} f_k\bar{\boldsymbol{C}}\right.\\ &\qquad \left.\left[\boldsymbol{I} + \left(\bar{\boldsymbol{S}}_k - \boldsymbol{I}\right)\left\{\bar{\boldsymbol{C}} - \left(\bar{\boldsymbol{C}} - \boldsymbol{C}_k\right)\bar{\boldsymbol{S}}_k\right\}^{-1}\left(\bar{\boldsymbol{C}} - \boldsymbol{C}_k\right)\right]\right]\\ &\quad \left[\boldsymbol{I} + \sum_{k=1}^{N-1} f_k\bar{\boldsymbol{S}}_k\left\{\bar{\boldsymbol{C}} - \left(\bar{\boldsymbol{C}} - \boldsymbol{C}_k\right)\bar{\boldsymbol{S}}_k\right\}^{-1}\left(\bar{\boldsymbol{C}} - \boldsymbol{C}_k\right)\right]^{-1}\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}\\ &= \bar{\boldsymbol{C}}\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}\end{aligned} \tag{37}$$

となる．この式の右辺 2 式の等値関係から求められる平均弾性係数 $\bar{\boldsymbol{C}}$ を仮想母材剛性とする．ただし， Eshelby のテンソルにも平均ポアソン比 $\bar{\nu}$ が含まれるので陽的に求めることができず，数値的に求めなければならないことに注意する．なお，以降の解析でこの選択法を用いる場合，楕円体介在物であっても近似的に球形として式 (37) の仮想母材剛性を求める．

5. 解析結果

5.1 仮想母材選択法による違い

まず剥離が生じない場合で，仮想母材の選択に self-consistent 法を用いた場合の精度について調べる．解析対象は**図–2** の軸方向 1 m，桁高 0.2 m，幅 0.2 m の柱とする．介在物の向きをランダムに分布させることも念頭に置き，軸方向に 50 分割，桁高方向に 10 分割，幅方向に 5 分割の計 2500 要素に分割して解析を行う（後述の状態図参照）．変位境界条件は，**図–2** の A 点で 3 方向固定， B 点で x, z 方向に固定し，その他の左端の全節点を x 方向固定とする．載荷は，右端に強制変位 u = 0.01 m を 400 ステップに分け，等分布強制変位増分量として与える．

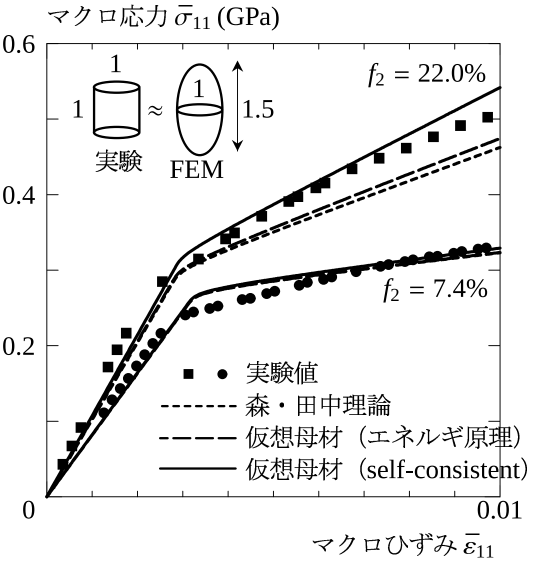


図–2 解析対象と境界条件

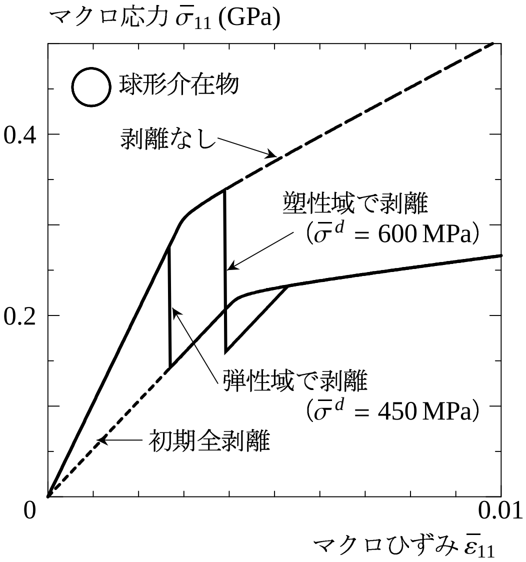
例として Papazian and Adler[14]で用いられた 5456Al に SiC を埋め込んだ複合材料の一軸引張試験との比較を行う． 5456Al の材料定数はヤング率を E_1 = 73 GPa, ポアソン比 ν_1 = 0.33，降伏応力 σ^y_1 = 230 MPa，硬化パラメータ h_1 = 68 MPa， n_1 = 0.135 である．また SiC はヤング率 E_2 = 485 GPa，ポアソン比 ν_2 = 0.20 の弾性体である．文献[14]より， SiC の形状はアスペクト比 l/d =1 : 1 の円柱形介在物であり，体積比率は f_2 = 7.6% と f_2 = 22.0% である．なお，文献[15]ではアスペクト比 l/d = α : 1 の円柱形介在物を半径比 1.5α : 1 : 1 の回転楕円体介在物で近似できるとしており，ここでも SiC 介在物を半径比 1.5 : 1 : 1 の回転楕円体で近似する．また，実際の母材の 5456Al は球形とし， SiC 介在物はランダムな向きに分布しているとする．

図–3 に実験値と解析結果のマクロ応力ひずみ曲線を示した．短い破線は元々の森・田中平均化による解析結果を表す．破線と実線が本手法によるもので，それぞれ仮想母材剛性の選択法としてエネルギ最小原理を用いた場合と self-consistent 法を用いた場合である．体積比率が小さく f_2 = 7.6% の場合は， 3 つの結果共にほぼ等しく，どれもが実験結果を良く再現できている．一方，体積比率 f_2 = 22.0% の場合は，仮想母材の選択法に self-consistent 法を用いた結果が他の 2 つより剛な予測を示すが，それが実験値と良く一致している． Hashin-Shtrikman[16]によると，介在物が球形の場合の森・田中平均化の解は下界であるとされており，他の 2 つの結果が剛な予測を示しているのはもっともらしい．また， self-consistent 法による方法は，介在物と母材間の相互作用をある程度高次に評価していると考えられ，マクロ挙動を良く追跡できていると考えられる．

元々の森・田中手法は実際の母材を仮想母材に用いた



図–3 一軸引張モデル：仮想母材剛性の選択法によるマクロ応力ひずみ曲線の変化



図–4 一軸引張モデル：界面剥離によるマクロ応力ひずみ曲線の変化

場合に相当するが，以上のことから，仮想母材の選び方で若干の違いがあるものの，エネルギ的および self-consistent 法的な解は実験値により良く整合することを示すことができた．ただし， self-consistent 法的アプローチは弾性部分だけを扱っていることからエネルギ的アプローチに比べて簡便であり，しかし精度が悪くならないので，以降の解析では， self-consistent 法による仮想母材選択法を用いた場合の結果のみを示す．

5.2　パラメータが及ぼす剥離挙動への影響

(1)　界面剥離による応力再配分についての検討

次に剥離を伴う場合，それを適切に表現できるかという点と，各パラメータが結果に及ぼす基本的な影響とを調べておく．解析対象および材料定数は前節と同じとし， SiC の体積比率を $f_2 = 20\%$ とする．なお，介在物がランダムな向きに分布する場合，マクロ挙動は増分ステップ数に依存する可能性があるが，本解析で 200 ステップと 400 ステップにした場合同士でほぼ同じ結果を示すことは確認してある．

また，剥離規準となる剥離応力や変動係数については，本来ならば対象材料ごとの実験値を用いるのが妥当ではあるが，我々の調査した範囲ではその値をまだ見出すことができなかった．そこで，いくつかの剥離応力や変動係数を任意に設定し，界面剥離の進展と剥離による強度変化を検討していく．なお，剥離は SiC 介在物の界面にのみ生じるとする．

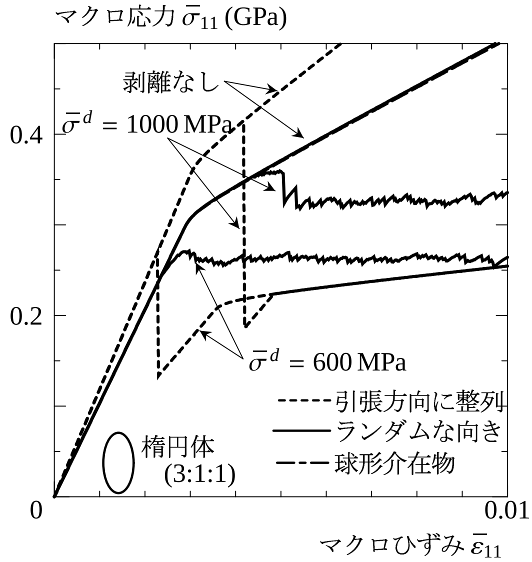
まず最も基本的な特性を調べるために，剥離応力のばらつきが無く（$c_v = 0$），剥離応力が $\bar{\sigma}^d = 450$ MPa, 600 MPa の 2 ケースを考える．この 2 種類の剥離応力は，弾性域か塑性域で剥離が発生する場合にそれぞれ相当する．また簡単のため介在物は球形とする．そのため，全要素（正確にはすべての Gauss 点）で界面剥離と降伏が同時に発生する．

図–4 に軸方向のマクロ応力ひずみ曲線の解析結果を示した．実線はそれぞれの剥離応力で界面剥離が生じた場合の結果である．また，長い破線は剥離が生じない場合の結果であり，短い破線は最初から全要素で引張方向に剥離させた場合の結果を示す．本解析では変位制御をしているため，界面剥離が発生するとすべての介在物の応力が剥離方向つまり引張方向に開放され，その瞬間に応力が急激に低下する．剥離後の挙動では，弾性域で剥離が発生する場合は塑性変形に影響を与えないため，最初からすべて剥離していた材料の挙動と一致する．一方，塑性域で剥離が発生する場合には剥離により一旦介在物中が弾性状態にまで除荷されるが，その後はやはり，最初からすべて剥離していた材料の挙動と一致する．この結果は，剥離による応力再配分を本解析手法が正確に扱えていることを示している．

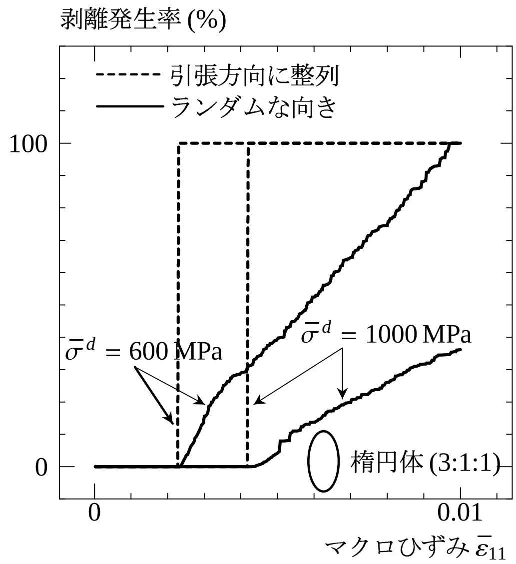
(2)　介在物の向きによる影響

次に，介在物の向きと形状による影響を調べるため，比較的球体に近い回転楕円体介在物（半径比 3 : 1 : 1）とファイバー状の回転楕円体介在物（半径比 30 : 1 : 1）を用いて検討する．なお，ここでも剥離応力のばらつきは無く $c_v = 0$ とする．向きについては，介在物の長軸方向が全て引張方向に整列している場合と，ランダムな場合を対象とする．ただしランダム分布というのは， 2500 要素のそれぞれに一様乱数で求めた介在物の 3 次元的な向きを設定して与えている．したがって，乱数によって数値解は若干異なるが，ここにはその 1 例を示していることになる．

まず，半径比 3 : 1 : 1 の回転楕円体介在物を含む複合材料の一軸引張におけるマクロ応力ひずみ曲線を**図–5** に示した．短い破線は介在物の長軸が引張方向に整列している場合，実線は介在物がランダムに向いている場合



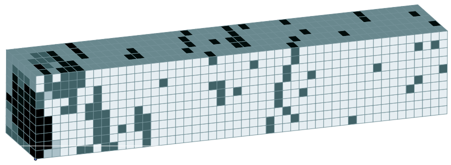
図–5 一軸引張モデル：マクロ応力ひずみ曲線における介在物の向きによる影響（半径比 3 : 1 : 1）



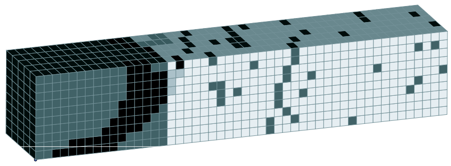
図–6 一軸引張モデル：剥離発生率における介在物の向きによる影響（半径比 3 : 1 : 1）

を表しており，それぞれ剥離が無い場合と，剥離応力が $\bar{\sigma}^d$ = 600 MPa，1000 MPa の場合を示した．また比較のために，球形介在物が剥離しない場合の結果を一点鎖線（剥離無しの実線とほぼ重なっている）で示す．

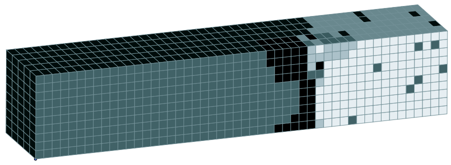
介在物の長軸が引張方向に揃っている場合は強い異方性を示すため，剥離前はランダムの場合より剛性が高い．また，ランダムな場合には巨視的にはほぼ均質材料となるため，剥離前のマクロ挙動は球形介在物の場合とよく似ている．一方剥離発生後に，介在物がランダムな場合は界面剥離が徐々に発生し，ほぼ同じ応力レベルを維持しながら変形が進んでいく．そのため，剥離前の弾性剛性は整列したものより小さくなるのに対し，残留強度は高くなる．**図–6** には剥離率の変化を示した．介在物がランダムな場合には，剥離応力が大きくなると，塑性



図–7-a 強制変位 u = 3.0 mm



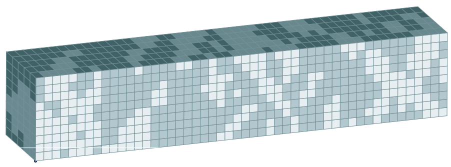
図–7-b 強制変位 u = 5.0 mm



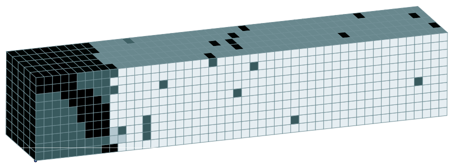
図–7-c 強制変位 u = 7.5 mm

付着・弾性　剥離・弾性　付着・塑性　剥離・弾性

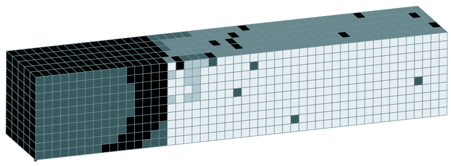
図–7 一軸引張モデル：介在物がランダムに向いている場合の弾塑性・剥離状態図（半径比 3 : 1 : 1，$\bar{\sigma}^d$ = 600 MPa）



図–8-a 強制変位 u = 3.0 mm



図–8-b 強制変位 u = 7.5 mm



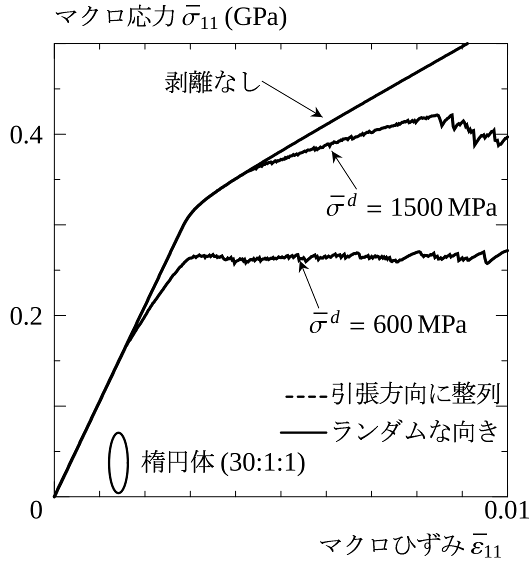
図–8-c 強制変位 u = 10.0 mm

付着・弾性　剥離・弾性　付着・塑性　剥離・弾性

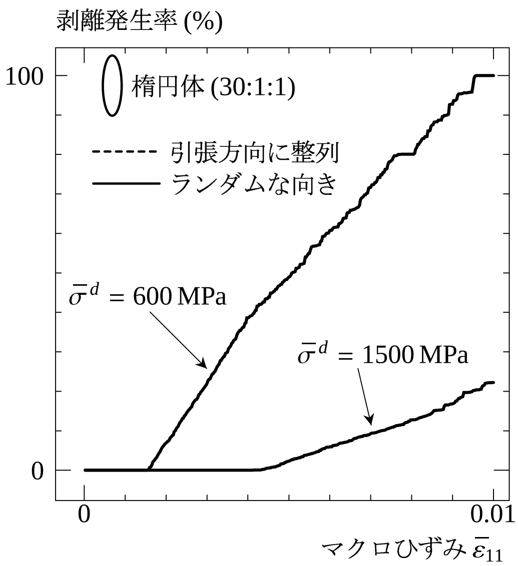
図–8 一軸引張モデル：介在物がランダムに向いている場合の弾塑性・剥離状態図（半径比 3 : 1 : 1，$\bar{\sigma}^d$ = 1000 MPa）

変形との相互干渉のためか，剥離の進展速度は遅くなっている．

図–7 および **図–8** には，介在物がランダムに向いている場合の各変位段階での弾塑性・剥離状態図を示した．**図–7** は $\bar{\sigma}^d$ = 600 MPa，**図–8** は $\bar{\sigma}^d$ = 1000 MPa の結果



図–9 一軸引張モデル：介在物がランダムに向いている場合のマクロ応力ひずみ曲線（半径比 30 : 1 : 1）

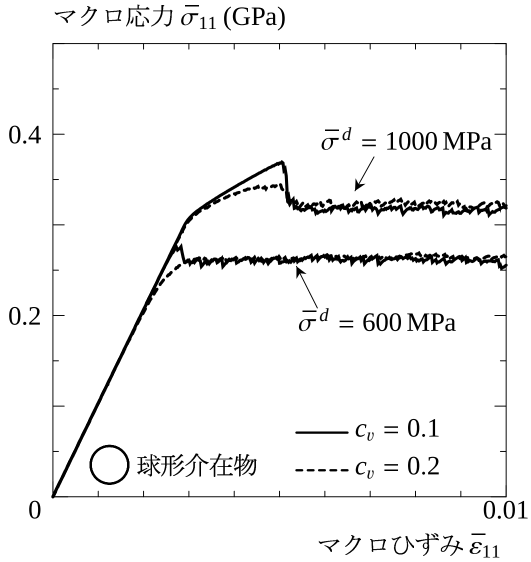


図–10 一軸引張モデル：介在物ががにランダム向いている場合の剥離発生率（半径比 30 : 1 : 1）

である．凡例に示したような網掛け濃度で状態を区別している．**図–7** の場合，変位が小さいときにまばらに発生した剥離が，変形が大きくなるにつれてやや左側に集中してくる．これは，たまたま左側に分布する要素で剥離がし易い向きになるような乱数を用いたからであるが，一旦剥離が生じると，その弱くなったところにさらに剥離が集中する挙動がよく再現されている．一方**図–8** を見ると，$u = 3.0 \times 10^{-3}$ m の段階では界面剥離が発生する前に降伏が生じ，変位が増えるにつれて**図–7** と同じように左端から剥離が進展している．**図–7** と異なるのは，降伏後の剥離は急激な応力開放を促し，多くの要素が弾性域に戻っている点である．

(3)　介在物の形状による影響

図–9 と **図–10** には，回転楕円体介在物の半径比が 30 : 1 : 1 でランダムに向いている場合のマクロ応力ひずみ曲線と剥離発生率の図を示す．剥離応力は $\bar{\sigma}^d = 600$ MPa と 1500 MPa の 2 種類で，比較のために剥離しない場合の結果も示した．半径比が 3 : 1 : 1 のときの**図–5**・**図–6** とこの結果とを比較すると，介在物が細長くなることで異方性の効果が大きくなり，半径比 3 : 1 : 1 の場合より早く剥離が生じる．しかし，剥離が生じて間もない段階ではある程度の剛性を維持しつつマクロ応力が増加していき，その後半径比 3 : 1 : 1 の場合とほぼ同じマクロ応力レベルでマクロひずみが増加していく．剥離発生率も，初期剥離が若干早く生じるものの，その後はほぼ同じ進展速度を示している．このように，介在物がランダムに向いている場合，介在物形状による影響は剥離の初期段階のみに現れ，全体的なマクロ挙動にはそれほど影響が無い．



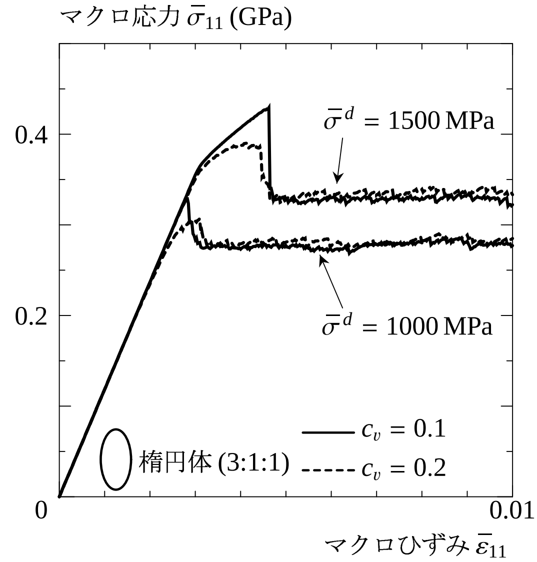
図–11 一軸引張モデル：マクロ応力ひずみ曲線における変動係数 c_v の依存性（球形介在物）

(4)　剥離応力の変動係数 c_v による影響

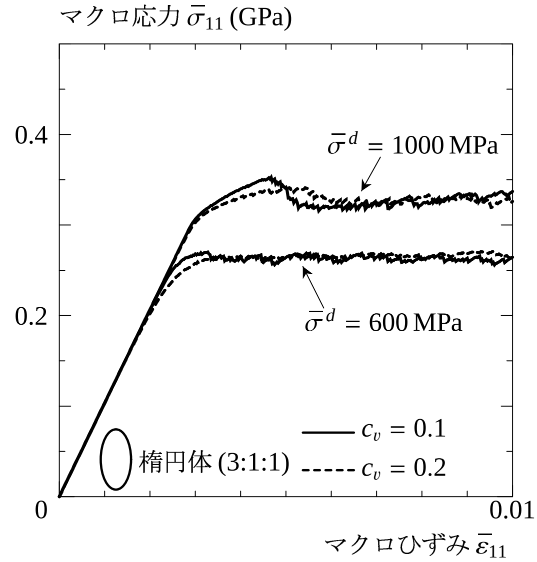
最後に，より現実的に剥離応力が定数ではなく，ばらつきがある場合を検討する．まず**図–11** は，球形介在物の場合のマクロ応力ひずみ曲線である．剥離応力のばらつきのために徐々に剥離が発生している．また変動係数 c_v が小さい $c_v = 0.1$ の場合には剥離の初期段階で大きく応力が低下するが， $c_v = 0.2$ の場合は比較的ゆっくりと剥離が生じていく．ただし，残留強度は変動係数からはほとんど影響を受けない．

次に半径比 3 : 1 : 1 の回転楕円体介在物の長軸が引張方向に整列する場合の結果を**図–12** に示す．球形介在物の場合と同様の特性を示すが，介在物による異方性が大きいため，球形の場合よりも応力開放による連鎖的な剥離が比較的たくさん起きるため，剥離が始まった段階での応力低下が比較的大きくなっている．

さらに，半径比 3 : 1 : 1 の回転楕円体介在物がランダムに向いている場合の結果が**図–13** である．向きもラン



図–12 一軸引張モデル：マクロ応力ひずみ曲線における変動係数 c_v の依存性（半径比 3 : 1 : 1，引張方向に整列）



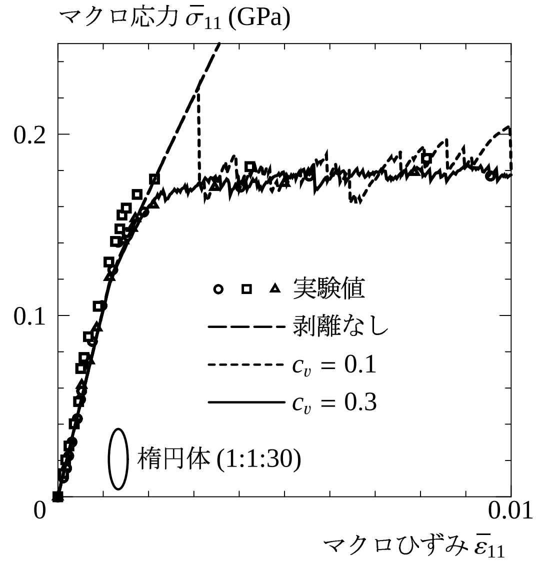
図–13 一軸引張モデル：マクロ応力ひずみ曲線における変動係数 c_v の依存性（半径比 3 : 1 : 1，ランダムな向き）

ダムになっていることから，上述の 2 ケースに比べてなだらかな変化になっている．また変動係数 c_v による影響は比較的小さい．

5.3　2 相複合材料に対する一軸引張試験との比較

(1)　ボロン/2024Al 複合材料の一軸引張試験

提案モデルの有用性を示すために，まず一方向に整列したボロンファイバーで 2024Al を補強したボロン/2024Al 複合材料の一軸引張試験[17]との比較を行う．解析モデルは**図–2** の通りであり，右端に強制変位 0.01 m を段階的に与える．ファイバーは引張 x 軸方向と直交する z 軸方向に整列している．実験では 2024Al の材料定数はヤング率 $E_1 = 55.85$ GPa，ポアソン比 $\nu_1 = 0.32$，降伏強度 $\sigma_1^y = 79.29$ MPa と与えられており，さらに文献[18]で硬化パラメータを $h_1 = 68$ MPa, $n_1 = 0.135$ と推定している．ボロンの材料定数はヤング率 $E_2 = 379.23$ GPa，ポアソン比 $\nu_2 = 0.20$ であり，体積比率は $f_2 = 34\%$ とする．ボロンファイバーの形状比は与えられていないが，十分に細長い回転楕円体介在物を考え，半径比を 1 : 1 : 30 と設定する．



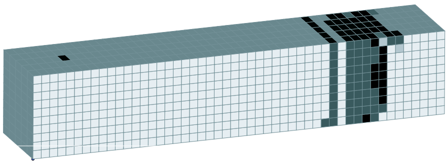
図–14 マクロ応力ひずみ曲線の実験結果との比較（ボロン/2024Al 複合材料）

この一軸引張試験において文献[18]では剥離が観察されたと報告されているが，剥離応力やその変動係数についての記述はない．そのため，実験結果に近づくような値としてここの解析では平均剥離応力を $\bar{\sigma}^d = 600$ MPa と推定し，変動係数を $c_v = 0.1$ と $c_v = 0.3$ の 2 種類を考える．**図–14** にマクロ応力ひずみ曲線を示す．参考のため剥離しない場合の結果を長い破線で示した．2 つの変動係数の設定に対する曲線は剥離の初期段階こそ異なるものの，その後はどちらも一定のマクロ応力を維持しながら変形が進んでおり，実験値と同様のほぼ一定の残留強度を良く再現できている．

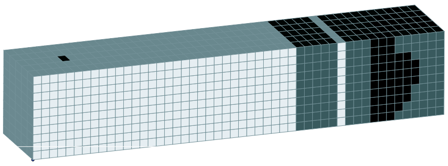
しかし，**図–15** と**図–16** で示す弾塑性・剥離状態図を見ると，変動係数の違いが顕著である．剥離応力のばらつきが小さい $c_v = 0.1$ の場合は，一旦右端側で剥離が発生し始めるとその周辺の負荷が大きくなり，連鎖的な剥離を引き起こしている．一方， $c_v = 0.3$ の場合は剥離応力のばらつきが大きいため，比較的剥離応力が小さい要素で分散した剥離が生じていき，結果として全体的に満遍なく剥離が発生する．このように，マクロ挙動は同じように見えても，剥離応力の変動係数の大きさにより異なる損傷メカニズムを示している．

(2)　SiC/2124Al 複合材料の一軸引張試験

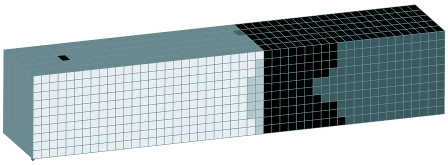
さて，介在物がランダムに向いている場合の実験が文献[19),20)]で紹介されている．これは 2124Al を SiC 円柱介在物で補強した SiC/2124Al 複合材料の一軸引張試験であり，解析モデルは**図–2** とし，右端に強制変位 0.04 m



図–15-a　強制変位 u = 4.0 mm



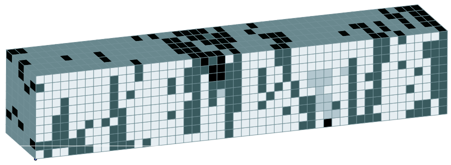
図–15-b　強制変位 u = 7.5 mm



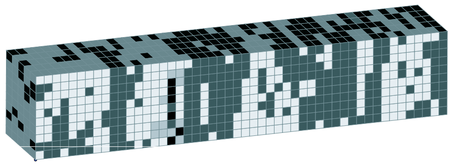
図–15-c　強制変位 u = 9.5 mm

□ 付着・弾性　■ 剥離・弾性　□ 付着・塑性　■ 剥離・弾性

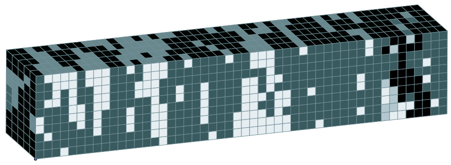
図–15　剥離応力のばらつきが小さい場合の弾塑性・剥離状態図（c_v = 0.1）



図–16-a　強制変位 u = 5.0 mm



図–16-b　強制変位 u = 7.5 mm



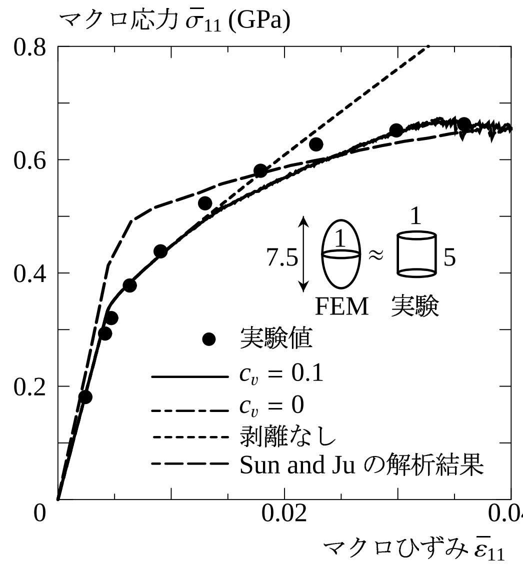
図–16-c　強制変位 u = 10.0 mm

□ 付着・弾性　■ 剥離・弾性　□ 付着・塑性　■ 剥離・弾性

図–16　剥離応力のばらつきが大きい場合の弾塑性・剥離状態図（c_v = 0.3）

を段階的に与える．文献[15)]より，2124Al の材料定数はヤング率 $E_1 = 60$ GPa，ポアソン比 $\nu_1 = 0.3$，降伏強度 $\sigma_1^y = 290$ とし，硬化パラメータを $h_1 = 700$ MPa, $n_1 = 0.55$ とする．また，SiC 円柱介在物はランダムに向いているとし，材料定数はヤング率 $E_2 = 450$ GPa，ポアソン比 $\nu_2 = 0.2$，体積比率 $f_2 = 13.2$ % とする．実際の SiC 円柱介在物の平均的なアスペクト比は $l/d = 5$ であるが，文献[15)]と同様，半径比を 7.5 : 1 : 1 の回転楕円体介在物で近似した．

図–17 にマクロ応力ひずみ曲線を示した．この実験において剥離が観察されたという報告は無いが，マクロひずみが 2 % より大きくなると明らかにマクロ応力ひずみ曲線の勾配が変化しているため，この前後で界面剥離が発生したことにより損傷したと考えてみた．そのため試行錯誤のあと，平均剥離応力を $\bar{\sigma}^d = 3000$ MPa とし，変動係数を $c_v = 0$ と $c_v = 0.1$ とに設定した場合の解析結果をそれぞれ一点鎖線と実線（ほとんど重複している）で示し，比較のため界面剥離が生じない場合の解析結果を短い破線で示す．さらに，長い破線は Sun and Ju[15)]による解析結果を表す．ただし，Sun and Ju による解析は剥離を考慮しておらず，母材と介在物の相互作用を高次近似したマクロ的降伏条件を用いることで降伏後の接線係数を小さく評価しているだけである．本解析結果は介在物がランダムに向いていることによって剥離が徐々に進展することを表現できており，剥離応力という物理量をうまく選びさえすれば実験値を良く再現できることを示すことができた．またこの程度の大きさの変動係数

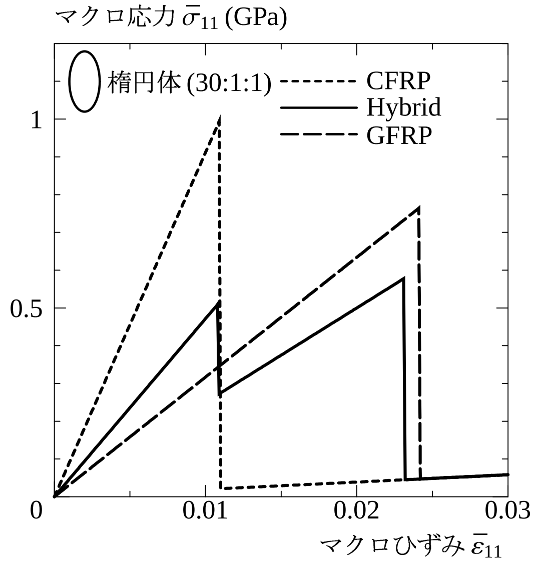


図–17　マクロ応力ひずみ曲線の実験結果との比較（SiC/2124Al 複合材料）

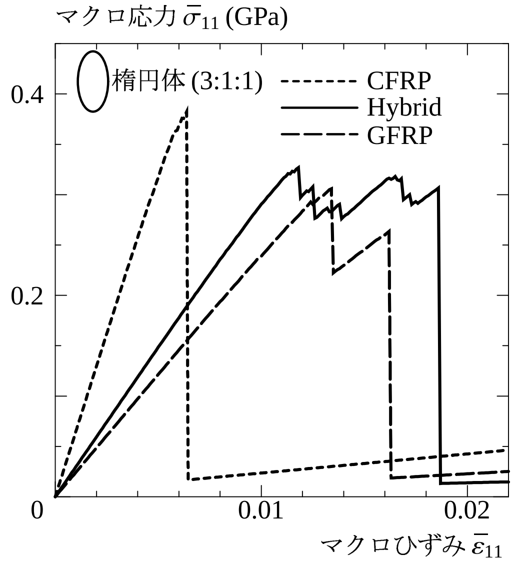
によるマクロ挙動の変化は，このような設定の場合にはほとんど無い．この数値解析結果におけるマクロひずみ 1.5% 程度の段階における剥離による接線剛性の変化と実験結果の比較は，実験でも剥離が発生した可能性を示唆している．

5.4　ハイブリッド複合材料の一例

最後に 2 種類の繊維を入れたハイブリッド複合材料の例を示す．例えばガラスファイバーは，高強度で軽量かつ低価格であるのに対し，炭素ファイバーは比較的高い



図–18 単繊維補強複合材料とハイブリッド繊維補強複合材料のマクロ応力ひずみ曲線の比較（引張方向に整列，c_v = 0）



図–19 単繊維補強複合材料とハイブリッド繊維補強複合材料のマクロ応力ひずみ曲線の比較（ランダムな向き，c_v = 0.3）

表–1 各複合材料の機能性の比較

	体積比率		ヤング率 $\bar{E}_1$(GPa)	破壊ひずみ	コスト比
	GF	CF			
GFRP	54％	0％	31.70	0.0242	1
Hybrid	40％	14％	47.17	0.0232	1.52
CFRP	0％	54％	91.17	0.0110	30

剛性を持っているが，繊維補強材として用いる場合脆性破壊を引き起こしやすく，さらにガラスファイバーの30倍のコストがかかる．そこで，ハイブリッド複合材料の解析例として，文献[21]で扱われている不飽和ポリエステルをガラスファイバーで補強した材料（GFRP）と，炭素ファイバーで補強した材料（CFRP）の2種類を参考にして，この2種類の繊維のハイブリッド化を模擬してみる．ただし，実験結果と材料特性を明らかにした研究成果が見つからなかったので，ここでは簡単な引張試験を扱う．材料定数は繊維のヤング率以外与えられていないため，推定値を用いる．不飽和ポリエステルとガラス・炭素繊維のヤング率はそれぞれ $E_1 = 4$ GPa，$E_2 = 74$ GPa，$E_3 = 235$ GPa とし，ポアソン比はすべて0.3と仮定し，簡単のためすべて弾性体で，終局状態は界面剥離の発生によるものと設定する．

まず積層材を念頭に置いて引張方向に半径比30 : 1 : 1の回転楕円体介在物の長軸が整列しているものとし，**図–2**の解析モデルの右端に強制変位0.04 mを段階的に与える．ガラス繊維・炭素繊維の平均剥離応力をそれぞれ $\bar{\sigma}_2^d = 1800$ MPa，$\bar{\sigma}_3^d = 2500$ MPa とし，剥離応力のばらつきは無いものと仮定する．各繊維の体積比率は**表–1**に示した．**図–18**の2本の破線がそれぞれのマクロ応力ひずみ曲線であり，実線がハイブリッドにした場合のそれである．**表–1**にはマクロな軸方向ヤング率 $\bar{E}_1$ と初期破壊ひずみおよびコスト比も示した．破壊ひずみとは，急激な応力低下で剛性が急激に低下した時点のマクロひずみで定義した．またコストは繊維の価格のみで数値化し，製造過程等の費用は含まない．この結果を急激な剛性低下をする1種類繊維補強材と比較すると，CFRPをハイブリッド化したと考えれば靱性を向上している．ただしGFRPをハイブリッド化した場合のコスト面から見ると，GFRPのみの場合の1.52倍のコストで約1.5倍のヤング率しか発現できておらず，コスト面ではこの程度なのかもしれない．

最後に，マット材のように短繊維がランダムな向きに分布している場合を想定し，半径比3 : 1 : 1の回転楕円体介在物をランダムな向きに配置する．剥離応力の変動係数を $c_v = 0.3$ としたときのマクロ応力ひずみ曲線の解析結果を**図–19**に示す．やはり，炭素繊維によるハイブリッド化によって高い靭性を示し，ガラス繊維補強材より剛性も若干だが向上している．以上の例は架空で簡略化したものではあるが，ここで開発した有限要素でどのような材料開発の補助ができるかを示してみた．

6. 結論

仮想母材を用いた改良版森・田中手法と，Zhao and Wengによる界面剥離モデルとを有限要素に組み，応力開放も扱えるコードを開発した．剥離発生は単純な規準にしたが，剥離応力はWeibull分布に従ってばらつくようにした．いくつかの複合材料モデルでパラメータの影響を調べ，実験値との比較を行った結果，以下の知見を得た．

- 仮想母材に self-consistent 法を用いると比較的容易に平均化ができ，以前提案したエネルギ原理のものとほぼ同じ結果が得られることを示した.
- 急激な応力の低下が生じる場合の解析を安定して行えることを示し，剥離と降伏の順序による，マクロおよびミクロな特性の違いを示した.
- 剥離応力のばらつきをモデル化することにより，進行性剥離現象を模擬でき，実験結果と整合するようなマクロ挙動を追跡できることを示した.
- ハイブリッド複合材料の簡単な例の解析により，本手法が材料・配合設計段階で有用であることを示すことができた.

謝辞: 本研究の一部は日本学術振興会の平成 21 年度科学研究費補助金基盤研究 (C) 21560495 の補助を受けた.

参考文献

1) 寺田賢二郎，菊池昇: 均質化法入門，丸善, 2003.
2) Iwakuma, T. and Koyama, K.: An estimate of average elastic moduli of composites and polycrystals, *Mech. of Mater.*, Vol.37, pp.459-472, 2005.
3) 小山茂，片野俊一，大上俊之，岩熊哲夫: 複合材料や多結晶金属の平均弾塑性挙動予測の一手法，土木学会論文集, Vol.64, pp.121-132, 2008.
4) Hill, R.: A self-consistent mechanics of composite materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.13, pp.213-222, 1965.
5) Zhao, Y.H. and Weng, G.J.: Transversely isotropic moduli of two partially debonded composites, *Int. J. Solids Structures*, Vol.34, pp.493-507, 1997.
6) グエン デュイ シン，斉木功，岩熊哲夫: 解析的平均化手法に界面剥離を組み込んだ複合材料要素，応用力学論文集，土木学会， Vol.10, pp.415-423, 2007.
7) Tandon, G.P.: Evaluation of interfacial normal strength in a SCS-0/epoxy composite with cruciform specimens, *Comp. Sci. Tech.*, Vol.60, pp.2281-2295, 2000.
8) Tohgo, K. and Weng, G.J.: A progressive damage mechanics in particle-reinforced metal-matrix composites under high triaxial tension, *J. Eng. Mater. Tech.*, ASCE, Vol.116, pp.414-420, 1994.
9) Liu, H.T,, Sun. L.Z. and Ju, J.W.: Elastoplastic modeling of progressive interfacial debonding for particle-reinforced metal-matrix composites, *Acta Mech.*, Vol.181, pp.1-17, 2006.
10) Mura, T.: *Micromechanics of Defects in Solids*, Martinus Nijhoff Publ., 1982.
11) Ju, J.W. and Tseng, K.H.: Effective elastoplastic behavior of two-phase ductile matrix composites: a micoromechanical framework, *Int. J. Solids Structures*, Vol.33, pp.4267-4291, 1996.
12) Simo, J.C. and Hughes, T.J.R.: *Computational Inelasticticity*, Springer, 1998
13) 富田佳宏: 数値弾塑性力学 — 有限要素シミュレーション基礎と応用 —，養賢堂, 1990.
14) Papazian, J.M. and Adler, P.N.: Tensile properties of short fiber-reinforced SiC/Al composites : part I. effects of matrix precipitates, *Metall. Trans.*, Vol.21.A, pp.401-410, 1990.
15) Sun, L.Z. and Ju, J.W.: Effective elastoplastic behavior of metal matrix composites containing randomly located aligned spheroidal inhomogeneities. Part II: applications, *Int. J. Solids Structures*, Vol.38, pp.203-225, 2001.
16) Hashin, Z. and Shtrikman S.: A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.11, pp.127-140, 1963.
17) Adams, D.F.: Inelastic analysis of a unidirectional composite subjected to transverse normal loading, *J. Composite Materials*, Vol.4, pp.310-328, 1970.
18) Ju, J.W. and Zhang, X.D.: Effective elastoplastic behavior of ductile matrix composites containing randomly located aligned circular fibers, *Int. J. Solids Structures*, Vol.38, pp.4045-4046, 2001.
19) Christman, T., Needleman, A., Nutt, S. and Suresh, S.: On microstructural evolution and micromechanical modeling of deformation of a whisker-reinforced metal-matrix composite, *Mater. Sci. Engng.*, Vol.A107, pp.49-61, 1989.
20) Christman, T., Needleman, A. and Suresh, S.: An experimental and numerical study of deformation in metal-ceramic composites, *Acta Metall.*, Vol.37, pp.3029-3050, 1989.
21) 植村益次，福田博: ハイブリッド複合材料，シーエムシー出版, 2002.

(2009 年 4 月 9 日 受付)