応用力学論文集 Vol.12, pp.273-280　（2009 年 8 月）　土木学会

二相複合材料の巨視的降伏関数の解析的表現

An Analytical Expression of Overall Yielding Function of Two–Phase Composites

小山茂*・都筑萌**・岩熊哲夫***・大上俊之****
Shigeru KOYAMA, Moe TSUDUKI, Tetsuo IWAKUMA and Toshiyuki OHKAMI

*正会員　博士（工）　信州大学工学部土木工学科（〒 380 – 8553 長野市若里 4 – 17 – 1）
**修士（工）　佐久市役所（〒 385 – 8501 長野県佐久市中込 3056）
***PhD　東北大学大学院工学研究科土木工学専攻（〒 980 – 8579 仙台市青葉区荒巻 6 - 6 - 06）
****正会員　工博　信州大学工学部土木工学科（〒 380 – 8553 長野市若里 4 – 17 – 1）

An analytical expression of overall yield function of two–phase composites with an elastic material is derived. Formulation is carrid out basing on the Mori–Tanaka theory without physical assumptions. Parameters about the hydrostatic pressure dependence and the anisotropy are explicitly expressed by material constants and volume fraction only. Overall plastic strain and center position of the yield surface are related by fourth order tensor, which is also explicitly expressed by material constants and volume fraction only.

Key Words : *tow–Phase composites, Mori–Tanaka theory, subsequent yielding function, overall behavior, hardening rule*

1.　はじめに

複合材料は不均一であり，たとえ巨視的には単一材料のように均一に見えたとしても内部には微視構造を有している．このような材料からなる構造物を解析するにあたり，土木分野において第一に要求される情報は全体としてどう動くかという巨視的（または平均的）な挙動である．したがって，微視構造の性質・挙動を反映したものとして現れる巨視的な性質・挙動を予測することは有用である．有限要素法等の数値シミュレーションによって構造物や材料の弾塑性解析を行う場合，その結果は数値シミュレーションに組み込まれる降伏関数に大きく依存する．複合材料の降伏関数の誘導にあたっては，対象としている複合材料の塑性変形特性を実験により詳細に測定し，それに適合した降伏関数を個々の材料ごとに定式化するという方法がとられることが多い．複合材料の設計には，より大きなエネルギーやコストがかかることを念頭に置くと，微視構造の情報を適切に考慮した上で解析的に表した降伏関数が導ければ，使用する材料やその配合比等を絞り込んでから実験を行うということがより容易になるため，材料設計の効率化と環境への負荷の軽減が期待できる．

複合材料の巨視的挙動を予測するものの一つとして，Eshelby の解を利用した森・田中理論[1)]に基づく手法がある．介在物の形状を回転楕円体に限定すれば比較的簡単な計算で済むという特徴があり，著者らはその考え方を基に種々の弾塑性解析[2)3)4)5)6)]を行い，降伏関数に関する検討も行ってきた．その中では，初期降伏については解析的な表現が得られてはいるものの，後続の降伏については数値的な評価に留まっている．弾性問題については巨視的弾性係数が解析的に得られるため，微視構造の巨視的挙動に及ぼす影響について見通しが良いという利点があるが，弾塑性問題については，均質化手法[7)]のような他の数値解析手法のように多大な計算は必要としないものの，結局はケーススタディにならざるを得ない．

森・田中理論に基づいた降伏関数に関する解析的な研究としては，Ju らのもの[8)]がある．そこでは，回転楕円体介在物が二つある問題を解くことによって介在物同士の相互作用をより厳密に扱ってはいるが，巨視的な流れ則を最初から仮定したうえで巨視的な塑性ひずみを算定しており，この点については微視構造の情報を適切に考慮しているとは必ずしも言えないであろう．そこで本研究では，そのような仮定を設けずに森・田中理論の範囲内で，弾塑性複合材料の巨視的降伏関数をできるだけ可能な限り解析的な表現で導く．その上で，数値的には明らかとなっている[3)]巨視的降伏への静水応力依存性・異方性に関するパラメータ，巨視的硬化法則を明らかにする．

2.　微視的増分量と巨視的増分量の関係の定式化

2.1　増分型の森・田中理論

本研究では，母材と介在物から構成される二相の弾塑性複合材料を対象としているため，各所量の体積平均の増分によって森・田中理論を定式化することにする．またここでは，無限体と捉えた母材の中に，ただ一種類の形状を持つ無数の回転楕円体介在物が，すべて同じ方向を向いて不規則に分布しているものとする．以後，添え字 M は母材における所量であることを表すものとし，介在物に関する諸量については，添え字 I を

用いることとする．また，特に断らない限り，添え字について総和規約は適用しないものとする．

まず，母材の弾性係数テンソルを $\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}}$ とし，母材における応力増分を $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{M}}$，介在物同士の相互作用をすべて含んだ上での母材のひずみ増分を $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{D}}$，母材部分の塑性ひずみ増分を $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{p}}$ とすると，増分形で表した母材の応力ひずみ関係は

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{M}} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{D}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{p}}\right) \tag{1}$$

となる．一方，介在物の弾性係数テンソルを $\boldsymbol{C}_{\mathrm{I}}$ とし，介在物内部の応力増分を $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{I}}$，ひずみ増分を $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{I}}$，塑性ひずみ増分を $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{p}}$ とすると，介在物における応力ひずみ関係は

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{I}} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{I}} \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{I}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{p}}\right) \tag{2}$$

と表せる．

ここで，等価介在物法を適用すると，上式は

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{I}} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{I}} \left\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{I}} - \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{p}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*}\right)\right\} \tag{3}$$

と書き換えられる．ここに，$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*}$ は介在物における eigen ひずみ増分を表し，非適合ひずみであるというその性質を考慮して塑性ひずみ増分と共に括って表記した．また，母材–介在物の相互作用によって発生するひずみの乱れ成分の増分を $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ とすると，介在物内部のひずみ増分について

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{I}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{D}} + \dot{\boldsymbol{\gamma}} \tag{4}$$

と表せる．このひずみの乱れ成分の増分 $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ は Eshelby の解により

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{S} \left\{\left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{p}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{p}}\right) + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*}\right\} \tag{5}$$

と関係付けられるので，介在物内部の応力増分は

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{I}} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{I}} \left\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{D}} + \dot{\boldsymbol{\gamma}} - \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{p}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*}\right)\right\} \tag{6}$$

のように書ける．

ここで，材料全体を巨視的に見た場合の平均量について考える．材料全体の体積を V，介在物の体積を V_{I} としたとき，介在物の体積分率を

$$f_2 \equiv \frac{V_{\mathrm{I}}}{V} \tag{7}$$

と定義する．これから，母材の体積分率は $1 - f_2$ と表される．これを用いて，巨視的応力増分 $\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}$ と巨視的ひずみ増分 $\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ を各相の体積分率を重みとした体積平均により

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} &\equiv (1 - f_2)\, \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{M}} + f_2\, \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{I}} \\ \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} &\equiv (1 - f_2)\, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{D}} + f_2\, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{I}} \end{aligned} \tag{8}$$

と定義する．

以上の式をまとめると，母材部分・介在物部分の応力増分と巨視的ひずみ増分が

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{M}} &= \boldsymbol{A}\, \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} - \boldsymbol{D} \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{p}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{p}}\right) \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{I}} &= \boldsymbol{B}\, \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{E} \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{p}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{p}}\right) \\ \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} &= \bar{\boldsymbol{C}}^{-1}\, \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{F}\, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{p}} + \boldsymbol{G}\, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{p}} \end{aligned} \tag{9}$$

のように，巨視的応力増分と母材・介在物部分の塑性ひずみ増分とによって表すことができる．ここに，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &\equiv (\boldsymbol{I} + f_2\, \boldsymbol{L})^{-1} \\ \boldsymbol{L} &\equiv \boldsymbol{C}_{\mathrm{M}}\, (\boldsymbol{S} - \boldsymbol{I}) \{\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} - (\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{C}_{\mathrm{I}})\, \boldsymbol{S}\}^{-1} \\ &\qquad (\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{C}_{\mathrm{I}})\, \boldsymbol{C}_{\mathrm{M}}^{-1} \\ \boldsymbol{D} &\equiv f_2\, \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{M} \\ \boldsymbol{M} &\equiv \boldsymbol{C}_{\mathrm{M}}\, (\boldsymbol{S} - \boldsymbol{I}) \{\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} - (\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{C}_{\mathrm{I}})\, \boldsymbol{S}\}^{-1}\, \boldsymbol{C}_{\mathrm{I}} \\ \boldsymbol{B} &\equiv (\boldsymbol{I} + f_2\, \boldsymbol{L})\, \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{E} &\equiv (\boldsymbol{I} - f_2\, \boldsymbol{B})\, \boldsymbol{M} \\ \bar{\boldsymbol{C}}^{-1} &\equiv \boldsymbol{N}\, \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{N} &\equiv (\boldsymbol{I} + f_2\, \boldsymbol{S}\, \boldsymbol{R}) \\ \boldsymbol{R} &\equiv \{\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} - (\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{C}_{\mathrm{I}})\, \boldsymbol{S}\}^{-1} (\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{C}_{\mathrm{I}}) \\ \boldsymbol{F} &\equiv \boldsymbol{I} - f_2 \left(\boldsymbol{S}\, \boldsymbol{P} - \bar{\boldsymbol{C}}^{-1}\, \boldsymbol{M}\right) \\ \boldsymbol{P} &\equiv \{\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} - (\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{C}_{\mathrm{I}})\, \boldsymbol{S}\}^{-1}\, \boldsymbol{C}_{\mathrm{I}} \\ \boldsymbol{G} &\equiv f_2 \left(\boldsymbol{S}\, \boldsymbol{P} - \bar{\boldsymbol{C}}^{-1}\, \boldsymbol{M}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

で各係数を定義した．また，$\boldsymbol{I}$ は単位テンソルである．母材・介在物が共に弾性の場合（$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{p}}$ と $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{p}}$ が常に $\mathbf{0}$），式 (9) の形から，$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ は応力集中係数，$\bar{\boldsymbol{C}}$ は巨視的弾性係数と解釈することができる．また，式 (9) 第三式右辺第一項目は Hooke の法則に従う弾性ひずみ増分と見なすことができるため，巨視的な塑性ひずみ増分 $\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{\mathrm{p}}$ は巨視的ひずみ増分と巨視的弾性ひずみ増分との差で，以下のように定義できる．

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{\mathrm{p}} \equiv \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \bar{\boldsymbol{C}}^{-1}\, \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \boldsymbol{F}\, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{p}} + \boldsymbol{G}\, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{p}} \tag{11}$$

2.2　母材部分・介在物部分の塑性ひずみ増分

本研究では，母材または介在物のどちらか一方が von Mises の降伏条件と関連流れ則に従う弾塑性材料，もう一方の材料は弾性材料と仮定する．すなわち，母材と介在物は同時に降伏することはなく，$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{p}}$ または $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{p}}$ のどちらか一方は常に $\mathbf{0}$ であるものとする．それぞれの材料の降伏は，平均応力が降伏応力に達した時点で定義し，降伏関数を

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{M}} &\equiv \sqrt{(J_2)_{\mathrm{M}}} - F_{\mathrm{M}} \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{p}}\right) \\ f_{\mathrm{I}} &\equiv \sqrt{(J_2)_{\mathrm{I}}} - F_{\mathrm{I}} \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{p}}\right) \end{aligned} \tag{12}$$

で定義する．ここに，$\sqrt{(J_2)_{\mathrm{M}}}$, $\sqrt{(J_2)_{\mathrm{I}}}$ はそれぞれ母材・介在物の相当応力を表す．硬化関数については，power

law で

$$
\begin{aligned}
F_{\mathrm{M}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{p}}) &\equiv \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\sigma_{\mathrm{M}}^{\mathrm{Y}} + h_{\mathrm{M}}\left\{\frac{\left(\varepsilon_{\mathrm{M}}^{\mathrm{eq}}\right)^{\mathrm{p}}}{\sqrt{3}}\right\}^{n_{\mathrm{M}}}\right] \\
F_{\mathrm{I}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{p}}) &\equiv \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\sigma_{\mathrm{I}}^{\mathrm{Y}} + h_{\mathrm{I}}\left\{\frac{\left(\varepsilon_{\mathrm{I}}^{\mathrm{eq}}\right)^{\mathrm{p}}}{\sqrt{3}}\right\}^{n_{\mathrm{I}}}\right]
\end{aligned}
\tag{13}
$$

と与えられるものとする．ここに，$\left(\varepsilon_{\mathrm{M}}^{\mathrm{eq}}\right)^{\mathrm{p}}$, $\left(\varepsilon_{\mathrm{I}}^{\mathrm{eq}}\right)^{\mathrm{p}}$ はそれぞれ母材・介在物部分の相当塑性ひずみを表す．$\sigma_{\mathrm{M}}^{\mathrm{Y}}$, $\sigma_{\mathrm{M}}^{\mathrm{Y}}$ はそれぞれ母材・介在物の単純引っ張り降伏応力，h_{M}, h_{I}, n_{M}, h_{I} は，硬化パラメータを表し，各材料単体での簡単な単純引っ張り試験等から求められる，ある定まった値を有するものとする．また，母材・介在物部分のそれぞれの相当応力と相当塑性ひずみは

$$
\begin{aligned}
\sqrt{(J_2)_{\mathrm{M}}} &\equiv \sqrt{\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}'_{\mathrm{M}} : \boldsymbol{\sigma}'_{\mathrm{M}}} \\
\sqrt{(J_2)_{\mathrm{I}}} &\equiv \sqrt{\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}'_{\mathrm{I}} : \boldsymbol{\sigma}'_{\mathrm{I}}} \\
\left(\varepsilon_{\mathrm{M}}^{\mathrm{eq}}\right)^{\mathrm{p}} &\equiv \int_{\text{履歴}} \sqrt{2\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{p}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{p}}}\,\mathrm{d}t \\
\left(\varepsilon_{\mathrm{I}}^{\mathrm{eq}}\right)^{\mathrm{p}} &\equiv \int_{\text{履歴}} \sqrt{2\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{p}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{p}}}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{14}
$$

で定義した．ここに，$\boldsymbol{\sigma}'_{\mathrm{M}}$, $\boldsymbol{\sigma}'_{\mathrm{I}}$ はそれぞれ母材・介在物部分の偏差応力，‘:’ は２階のテンソル積を表す．

母材・介在物部分の流れ則に付いては，関連流れ則によって

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{p}} &= \frac{1}{H_{\mathrm{M}}}\frac{\boldsymbol{\sigma}'_{\mathrm{M}} \otimes \boldsymbol{\sigma}'_{\mathrm{M}}}{4\,(J_2)_{\mathrm{M}}} \\
\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{p}} &= \frac{1}{H_{\mathrm{I}}}\frac{\boldsymbol{\sigma}'_{\mathrm{I}} \otimes \boldsymbol{\sigma}'_{\mathrm{I}}}{4\,(J_2)_{\mathrm{I}}}
\end{aligned}
\tag{15}
$$

という関係にある．ここに，‘⊗’ はテンソル積を表す．また母材・介在物の硬化係数 H_{M}, H_{I} はそれぞれ power low を用いて以下のように定義する．

$$
\begin{aligned}
H_{\mathrm{M}} &\equiv \frac{\partial f_{\mathrm{M}}}{\partial \varepsilon_{\mathrm{M}}^{\mathrm{eq}}} = \frac{h_{\mathrm{M}} n_{\mathrm{M}}}{\left(\sqrt{3}\right)^{n_{\mathrm{M}}+1}}\left\{\left(\varepsilon_{\mathrm{M}}^{\mathrm{eq}}\right)^{\mathrm{p}}\right\}^{n_{\mathrm{M}}-1} \\
H_{\mathrm{I}} &\equiv \frac{\partial f_{\mathrm{I}}}{\partial \varepsilon_{\mathrm{I}}^{\mathrm{eq}}} = \frac{h_{\mathrm{I}} n_{\mathrm{I}}}{\left(\sqrt{3}\right)^{n_{\mathrm{I}}+1}}\left\{\left(\varepsilon_{\mathrm{I}}^{\mathrm{eq}}\right)^{\mathrm{p}}\right\}^{n_{\mathrm{I}}-1}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

式 (15) に式 (9) の第一式目，第二式目を代入すると，

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{p}} &= \left\{\boldsymbol{I} - \frac{\boldsymbol{\sigma}'_{\mathrm{M}} \otimes \boldsymbol{\sigma}'_{\mathrm{M}}}{4H_{\mathrm{M}}\,(J_2)_{\mathrm{M}}}\boldsymbol{D}\right\}^{-1}\frac{\boldsymbol{\sigma}'_{\mathrm{M}} \otimes \boldsymbol{\sigma}'_{\mathrm{M}}}{4H_{\mathrm{M}}\,(J_2)_{\mathrm{M}}}\boldsymbol{A}\,\dot{\bar{\sigma}} \\
\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{p}} &= \left\{\boldsymbol{I} - \frac{\boldsymbol{\sigma}'_{\mathrm{I}} \otimes \boldsymbol{\sigma}'_{\mathrm{I}}}{4H_{\mathrm{I}}\,(J_2)_{\mathrm{I}}}\boldsymbol{E}\right\}^{-1}\frac{\boldsymbol{\sigma}'_{\mathrm{I}} \otimes \boldsymbol{\sigma}'_{\mathrm{I}}}{4H_{\mathrm{I}}\,(J_2)_{\mathrm{I}}}\boldsymbol{B}\,\dot{\bar{\sigma}}
\end{aligned}
\tag{17}
$$

が得られ，母材部分・介在物部分の塑性ひずみ増分が巨視的応力増分によって表現することができる．更に式 (11) より，巨視的塑性ひずみ増分も巨視的応力増分で表現できる．

3. 弾塑性複合材料の巨視的降伏関数の誘導

本研究ではどちらか一方の材料は弾性体であるものと仮定しているが，ここでは，弾性補強された複合材料を念頭に置き，母材を弾塑性体，介在物を弾性体として定式化を進める．もちろん，逆に母材が弾性体，介在物が弾塑性体の場合においても同様の手順によって誘導することが可能である．巨視的な降伏は母材が降伏すると同時に生じるものとして考え，巨視的な降伏関数は，母材の降伏関数を巨視的な量で表したものとして表現することとする．なお，母材・介在物共に弾塑性体である場合の扱いについては，今後の課題とする．

ここからは，各所量について添え字表記法を用いて表す．添え字の範囲は 1, 2, 3 とし，特に断らない限り総和規約が適用されるものとする．まず，母材の応力と塑性ひずみを巨視的応力と巨視的塑性ひずみとで表すことを試みる．式 (9) の第一式より，母材部分の応力増分 $\dot{\sigma}_{ij}^{\mathrm{M}}$ は，

$$
\dot{\sigma}_{ij}^{\mathrm{M}} = A_{ijkl}\,\dot{\bar{\sigma}}_{kl} + D_{ijkl}\,\dot{\varepsilon}_{kl}^{\mathrm{pM}} \tag{18}
$$

である．ここに，$\dot{\bar{\sigma}}_{kl}$ は巨視的応力増分，$\dot{\varepsilon}_{kl}^{\mathrm{pM}}$ は母材における塑性ひずみ増分を表す．また A_{ijkl} と D_{ijkl} は，定義式である式 (10) の形から母材の弾性係数 C_{ijkl}^{M}，介在物の弾性係数 C_{ijkl}^{I}，Eshelby のテンソル S_{ijkl}，介在物の体積分率 f_2 のみから決まることに注意する．一方，巨視的塑性ひずみ増分 $\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^{\mathrm{p}}$ は式 (11) より，

$$
\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^{\mathrm{p}} = F_{ijkl}\,\dot{\varepsilon}_{kl}^{\mathrm{pM}} \tag{19}
$$

である．ここでも F_{ijkl} は母材の弾性係数 C_{ijkl}^{M}，介在物の弾性係数 C_{ijkl}^{I}，Eshelby のテンソル S_{ijkl}，介在物の体積分率 f_2 のみから決まることに注意する．

応力や変形のない自然状態からある変形状態までの応力とひずみは，それに対応する応力増分とひずみ増分を履歴積分することによって表すことができるので，ここで用いている各種応力と各種ひずみに対して．

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij} &\equiv \int_{\text{履歴}} \dot{\sigma}_{ij}\,\mathrm{d}t \\
\varepsilon_{ij} &\equiv \int_{\text{履歴}} \dot{\varepsilon}_{ij}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{20}
$$

と定義する．ここで，式 (18) を履歴積分することを考える．

$$
\int_{\text{履歴}} \dot{\sigma}_{ij}^{\mathrm{M}}\,\mathrm{d}t = \int_{\text{履歴}} A_{ijkl}\,\dot{\bar{\sigma}}_{kl}\,\mathrm{d}t + \int_{\text{履歴}} D_{ijkl}\,\dot{\varepsilon}_{kl}^{\mathrm{pM}}\,\mathrm{d}t \tag{21}
$$

先に述べてたように，係数 A_{ijkl}, D_{ijkl} は母材・介在物の材料パラメータのみで決まり，履歴には依存しない量であるために積分の外へ出すことができ

$$
\int_{\text{履歴}} \dot{\sigma}_{ij}^{\mathrm{M}}\,\mathrm{d}t = A_{ijkl}\int_{\text{履歴}} \dot{\bar{\sigma}}_{kl}\,\mathrm{d}t + D_{ijkl}\int_{\text{履歴}} \dot{\varepsilon}_{kl}^{\mathrm{pM}}\,\mathrm{d}t \tag{22}
$$

と書くことができる．式 (20) を考慮すると，上式は

$$
\sigma_{ij}^{\mathrm{M}} = A_{ijkl}\,\bar{\sigma}_{kl} + D_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}^{\mathrm{pM}} \tag{23}
$$

と書き改められ，増分量であるか否かにかかわらず同一の形式で与えられることが分かる．同様に，巨視的な塑性ひずみについても式 (19) を履歴積分すると，係数 F_{ijkl} も履歴に依存しない量であるために積分の外へ出すことが可能で

$$\overline{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{ij} = F_{ijkl}\,\varepsilon^{\mathrm{pM}}_{kl} \tag{24}$$

と表すことができ，こちらの場合も同様に増分量であるかどうかの区別なく同じ表現で与えられることが分かる．

次に，母材の降伏関数

$$f_{\mathrm{M}} = \left(\frac{1}{2}s^{\mathrm{M}}_{ij}\,s^{\mathrm{M}}_{ij}\right)^{1/2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\sigma^{\mathrm{M}}_{\mathrm{y}} + h^{\mathrm{M}}\,(\kappa^{\mathrm{M}})^{n^{\mathrm{M}}}\right\} \tag{25}$$

と表しておく．ここに，s^{M}_{ij} は母材における偏差応力，$\sigma^{\mathrm{M}}_{\mathrm{y}}$ は母材の単純引っ張り降伏応力，h^{M} と n^{M} は硬化パラメータ，κ^{M} はひずみ硬化パラメータで

$$\begin{aligned} \kappa^{\mathrm{M}} &\equiv \int_{履歴} \dot{\kappa}^{\mathrm{M}}\,\mathrm{d}t \\ \dot{\kappa}^{\mathrm{M}} &\equiv \left(\frac{1}{2}\dot{\varepsilon}^{\mathrm{pM}}_{ij}\,\dot{\varepsilon}^{\mathrm{pM}}_{ij}\right)^{1/2} \end{aligned} \tag{26}$$

で定義した．母材における偏差応力を書き下すと，式 (23) より，

$$\begin{aligned} s^{\mathrm{M}}_{ij} &= \sigma^{\mathrm{M}}_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\,\sigma^{\mathrm{M}}_{kk} \\ &= A_{ijkl}\,\overline{\sigma}_{kl} + D_{ijkl}\,\varepsilon^{\mathrm{pM}}_{kl} \\ &\qquad -\frac{1}{3}\delta_{ij}\left(A_{mmkl}\,\overline{\sigma}_{kl} + D_{mmkl}\,\varepsilon^{\mathrm{pM}}_{kl}\right) \\ &= \left(A_{ijkl} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\,A_{mmkl}\right)\sigma^{\mathrm{M}}_{kl} \\ &\qquad + \left(D_{ijkl} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\,D_{mmkl}\right)F^{-1}_{klpq}\,\overline{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{pq} \\ &= V_{ijkl}\,\overline{\sigma}_{kl} + W_{ijpq}\,\overline{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{pq} \\ &= V_{ijkl}\left(\overline{\sigma}_{kl} + V^{-1}_{klmn}\,W_{mnpq}\,\overline{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{pq}\right) \\ &= V_{ijkl}\left(\overline{\sigma}_{kl} - T_{klpq}\,\overline{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{pq}\right) \end{aligned} \tag{27}$$

となる．ここに，δ_{ij} はクロネッカーのデルタを表し，係数 V_{ijkl}, W_{ijkl}, T_{ijkl} は

$$\begin{aligned} V_{ijkl} &\equiv A_{ijkl} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\,A_{mmkl} \\ W_{ijkl} &\equiv \left(D_{ijpq} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\,D_{mmpq}\right)F^{-1}_{pqkl} \\ T_{ijkl} &\equiv V^{-1}_{ijmn}\,W_{mnkl} \end{aligned} \tag{28}$$

で定義した．式 (27) を式 (25) に代入すると，巨視的降伏関数 $\overline{f}$ が

$$\begin{aligned} \overline{f} &= \left\{\frac{1}{2}Q_{klmn}\,(\overline{\sigma}_{kl} - \varphi_{kl})\,(\overline{\sigma}_{mn} - \varphi_{mn})\right\}^{1/2} \\ &\qquad -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sigma^{\mathrm{M}}_{\mathrm{y}} + h^{\mathrm{M}}\overline{\kappa}^{n^{\mathrm{M}}}\right) \end{aligned} \tag{29}$$

と表すことができる．ここに，係数 Q_{ijkl}，巨視的ひずみ硬化パラメータ $\overline{\kappa}$，２階のテンソル φ_{ij} を

$$\begin{aligned} Q_{ijkl} &\equiv V_{mnij}V_{mmkl} \\ \overline{\kappa} &\equiv \int_{履歴} \overleftarrow{\kappa}\,\mathrm{d}t \\ \overleftarrow{\kappa} &\equiv \left(\frac{2}{3}F^{-1}_{mnij}\,F^{-1}_{mnkl}\,\dot{\overline{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}_{ij}\,\dot{\overline{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}_{kl}\right)^{1/2} \\ \varphi_{ij} &\equiv \int_{履歴} \dot{\varphi}_{ij}\,\mathrm{d}t \\ \dot{\varphi}_{ij} &\equiv T_{ijkl}\,\dot{\overline{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}_{kl} \end{aligned} \tag{30}$$

で定義した．

4. 巨視的降伏曲面の特性

4.1 一般的な性質

(1) 硬化法則

式 (29) の第一項目を $\overline{f}_1$，第二項目を $\overline{f}_2$ とおくと，巨視的降伏曲面は形式的に

$$\overline{f}_1\left(\overline{\sigma}_{ij} - \varphi_{ij}\right) - \overline{f}\,(\overline{\kappa}) = 0$$

と表すことができる．式の形から，ここで扱っているような複合材料は，移動硬化と等方硬化を組み合わせた複合硬化を起こすことが分かる．移動硬化則については，式 (30) の五番目の式より降伏曲面の中心の変化 $\dot{\varphi}_{ij}$ と巨視的塑性ひずみ速度 $\dot{\overline{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}_{ij}$ とが４階のテンソル T_{ijkl} で関係付けられており，Prager の考え方とは一致しない．この表現は，徳岡が示した移動硬化式[10]に形式上一致する．

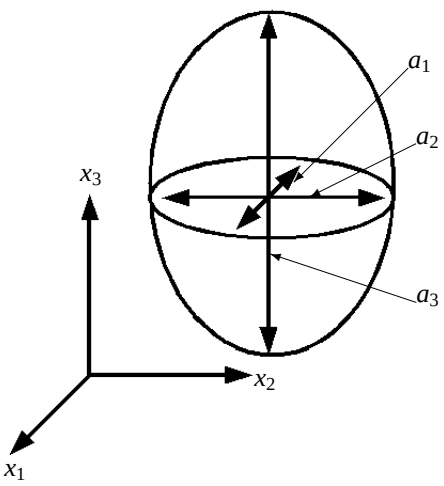
また，等方硬化則に関して補足しておくと，降伏曲面の形状を決める係数 Q_{ijkl} は，母材の弾性係数 C^{M}_{ijkl}，介在物の弾性係数 C^{I}_{ijkl}，Eshelby のテンソル S_{ijkl}，介在物の体積分率 f_2 のみから決まる．したがって，降伏曲面形状は硬化に伴って形を変えることなく大きさのみが変化する．

(2) 異方性

式 (29) は一般的な異方性の降伏関数と同一の形式であり，母材・介在物がそれぞれ等方性を示す材料であっても巨視的には異方性材料としての性質を示す．ただし，介在物の形状が球形である場合のみ Q_{ijkl} が等方テンソルとなるため，等方性材料としての性質を示す．これは，介在物が球形の場合の Eshelby のテンソル S_{ijkl} が等方テンソルであるためであり，Q_{ijkl} が等方テンソルであるか否かは S_{ijkl} が等方テンソルであるかどうかに依存することによる．

4.2 π 平面上の降伏関数

以下では，降伏に関するパラメータを明確にするために，巨視的主応力空間 $(\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \overline{\sigma}_3)$ における降伏曲面を考える．ここでは，介在物である回転楕円体の三



図–1 介在物の配置と形状

つの主軸が直角座標系の x_1, x_2, x_3 方向に一致するように配置し，二つの主軸の長さ a_1 と a_2 が等しくなるように設定した (**図–1**)．これは，回転楕円体全ての主軸の長さが異なる場合においては，降伏曲面の解析的な表現が得られなかったためである．なお，テンソルの演算については文献[9]にある方法を用いて行列計算により行った．

(1)　初期降伏の特性

まず，簡単のために初期降伏曲面について示す．$\overline{\sigma}_3$ 軸に一致させて ζ 軸をとり，$\overline{\sigma}_1 = \overline{\sigma}_2 = \overline{\sigma}_3$ 方向に垂直に交わる π 平面 (η, ζ) に投影した初期降伏曲面は

$$\frac{\eta^2}{\left(\sigma_{\mathrm{y}}^{\mathrm{M}}/a\right)^2} + \frac{(\zeta - \beta\overline{p})^2}{\left(\sigma_{\mathrm{y}}^{\mathrm{M}}/b\right)^2} = 1 \tag{31}$$

のように誘導することができ，楕円となることが分かる．ここに，

$$\begin{aligned} a &\equiv \sqrt{\frac{3}{2}}\,(A_{11} - A_{12}) \\ b &\equiv \sqrt{\frac{1}{6}}\,\{A_{11} + A_{12} - 2\,(A_{31} + A_{13} - A_{33})\} \\ \overline{p} &\equiv \overline{\sigma}_1 + \overline{\sigma}_2 + \overline{\sigma}_3 \\ \beta &\equiv \sqrt{2}\left(1 - \frac{3}{\alpha + 2}\right) \\ \alpha &\equiv \frac{A_{11} + A_{12} - 2A_{31}}{A_{33} - A_{13}} \end{aligned} \tag{32}$$

と定義した．A_{ij} は，応力集中係数 A_{ijkl} を Voigt 表記したもので，回転楕円体の形状がここで扱っているような $a_1 = a_2$ の場合には，母材と介在物のヤング率の比 $E_r = E_{\mathrm{M}}/E_{\mathrm{I}}$，母材のポアソン比 ν_{M}，介在物のポアソン比 ν_{I}，介在物の体積分率 f_2 のみで決まる．

降伏曲面を表す楕円の長軸と短軸の長さの比は，a/b または b/a によって決まるため，a, b は異方性を表すパラメータと解釈することができる．介在物の形状が球形の場合は，$A_{11} = A_{33}, A_{12} = A_{13} = A_{31}$ より，$a = b$ が導かれることから降伏曲面の形状は円となり，巨視的に等方性の性質を示す．

$\overline{p}$ は定義式からも明らかなように，物理的には巨視的な静水応力に対応する．主応力空間における降伏曲面は楕円柱となるが，その中心軸は単体の場合と比較して $\overline{\sigma}_3$ 方向に傾き，$(\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \overline{\sigma}_3) = (1, 1, \alpha)$ となるために静水応力が降伏に影響を及ぼすようになる．また，β は式 (31) 中において静水応力にかかる係数となっているため，静水応力の影響の大きさを表すパラメータとみなすことができる．介在物の形状が球形の場合には，$A_{11} = A_{33}, A_{12} = A_{13} = A_{31}$ より $\alpha = 1, \beta = 0$ が導かれ，静水応力が降伏に影響を及ぼさないことが分かる．

なお，介在物が弾塑性材料で母材が弾性材料の場合には，A_{ijkl} を B_{ijkl} に，$\sigma_{\mathrm{y}}^{\mathrm{M}}$ を $\sigma_{\mathrm{y}}^{\mathrm{I}}$ に置き換えるだけでよい．B_{ijkl} についても A_{ijkl} と同様，母材と介在物のヤング率の比 $E_r = E_{\mathrm{M}}/E_{\mathrm{I}}$，母材のポアソン比 ν_{M}，介在物のポアソン比 ν_{I}，介在物の体積分率 f_2 のみで決められる．

(2)　後続降伏の特性

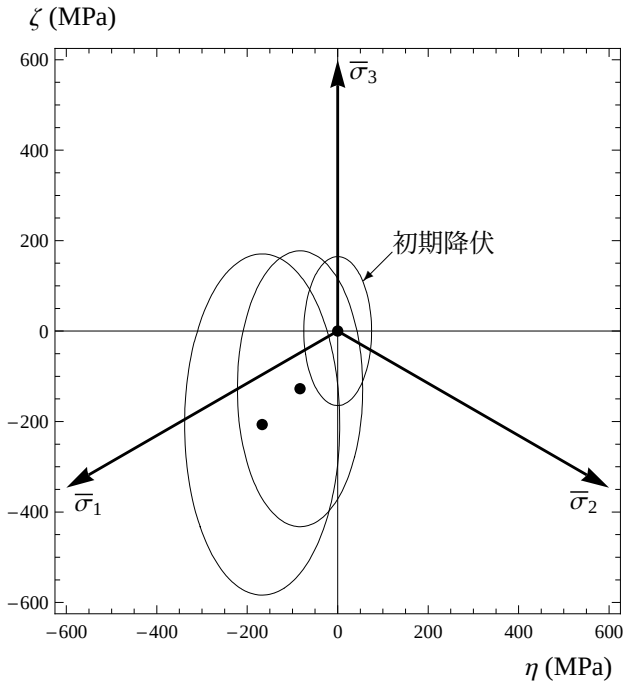
後続降伏に関する降伏曲面は，式 (31) を拡張した形で

$$\frac{\left(\eta - \varphi_\eta\right)^2}{\left(\sigma_{\mathrm{y}}^{\mathrm{M}}/a\right)^2} + \frac{\left\{\left(\zeta - \varphi_\zeta\right) - \beta\left(\overline{p} - \varphi_p\right)\right\}^2}{\left(\sigma_{\mathrm{y}}^{\mathrm{M}}/b\right)^2} = 1 \tag{33}$$

のように誘導することができる．ここに，$\sigma_{\mathrm{Y}}^{\mathrm{M}}$ は後続の降伏応力で式 (29) の右辺第二項目に対応する．また，$\varphi_\eta, \varphi_\zeta, \varphi_p$ は主応力空間上での中心の移動量 φ_{ij} を π 平面に投影したものであり，以下のように定義される．

$$\begin{aligned} \varphi_\eta &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\,(-\varphi_{11} + \varphi_{22}) \\ \varphi_\zeta &\equiv \frac{1}{6}\,(-\varphi_{11} - \varphi_{22} + 2\varphi_{33}) \\ \varphi_p &\equiv \frac{1}{\sqrt{3}}\,(\varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_{33}) \end{aligned} \tag{34}$$

式 (33) を見れば明らかなように，後続の降伏曲面も楕円となるが，初期降伏曲面の場合と同様に長軸と短軸の長さ比は a/b または b/a によって決まるため，その形状は初期降伏曲面と相似となり大きさのみが変化することが分かる (**図–2**)．α, β についても初期降伏の場合と同様で，後続の降伏曲面である楕円柱の中心軸は初期降伏の降伏曲面である楕円柱の中心軸を平行移動したものとなる．ただし，移動硬化の影響で降伏曲面が $\overline{\sigma}_1 = \overline{\sigma}_2 = \overline{\sigma}_3$ 軸と交わることもあるので，β のみで静水応力の影響が表せるわけではないことに注意する．



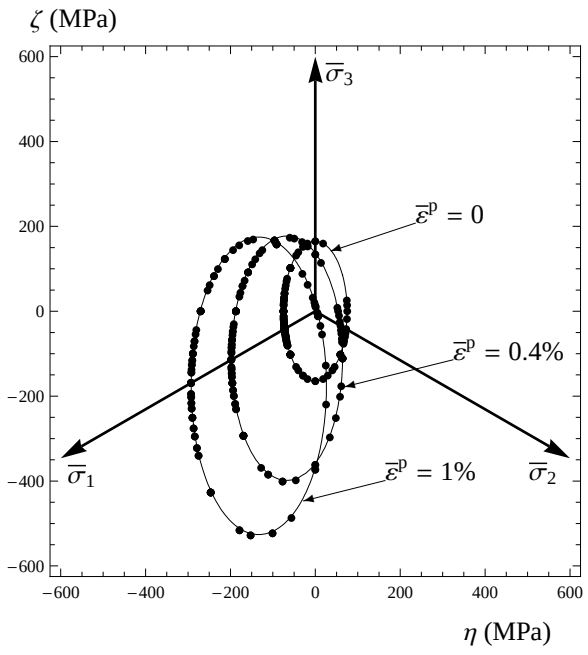
図–2 π 平面上の降伏関数

5. 計算例

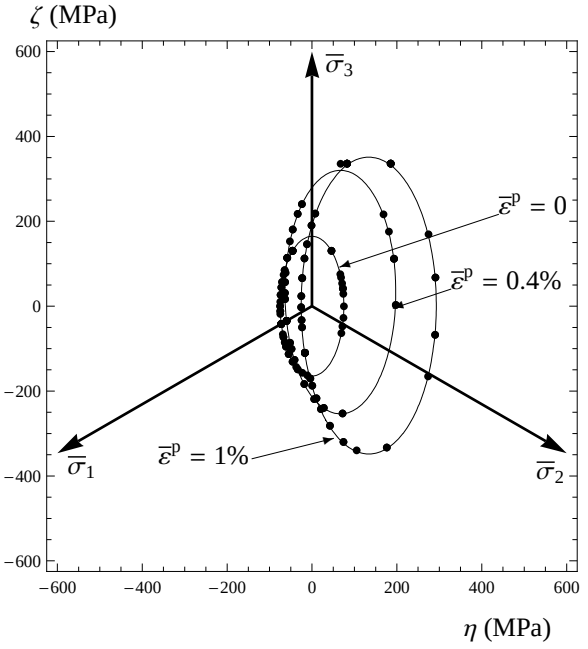
ここまで二相複合材料の巨視的な降伏関数の誘導を行ってきたが，実際に降伏曲面を描くにあたっては，$\dot{\varphi}_{ij}$ だけは数値的に求めなければならない．すなわち，無限遠方で応力増分 $\dot{\sigma}_{ij}$ を外力として与え，式 (11) と式 (17) より巨視的塑性ひずみを求めた後に，式 (30) の第五式から得られた $\dot{\varphi}_{ij}$ が降伏曲面の中心移動量の増分となる．

5.1 円柱介在物を含む複合材料の降伏曲面

ここでは，弾性円柱介在物のボロン繊維を含む 2024 Al 弾塑性母材の複合材料についての計算例を示す．母材の材料定数はヤング率 E_{M} = 55.85GPa，ポアソン比 ν_{M} = 0.32，単純引っ張り降伏応力 $\sigma_{\mathrm{y}}^{\mathrm{M}}$ = 77.29MPa，硬化パラメータ h = 827.4MPa, n = 0.6，介在物の材料定数はヤング率 E_{I} = 379.23GPa，ポアソン比 ν_{I} = 0.2，体積分率を f = 0.2 とした．**図–3-a** に繊維長軸（x_3）方向の直交方向（x_1）方向に単純引っ張りし，巨視的塑性ひずみが 0%, 0.4%, 1% に達したときの巨視的降伏曲面を実線で示した．図中の黒点は，式 (9) を用いて所定の変形状態まで増分計算を継続させた後，除荷計算を行い，その後様々な比率で再載荷し，各応力比率ごとに再降伏する点をプロットしたものである．これまでの方法では，これらの点を曲線で結ぶことによって降伏曲面を描いていた[3]．**図–3-b** には x_2 と x_3 方向に二軸引っ張りをし，巨視的塑性ひずみが 0.4% に達した後に x_2 方向のみに単純引っ張りした場合の降伏曲面を表した．両者共に従来の方法で求めたものと一致することがわかる．また，降伏曲面を描くにあたっては除荷 → 再載荷の手順を何度も繰り返すことなく巨視的塑性ひずみ増分を計算するだけでよいので，従来の方法よりも容易である．



図–3-a 荷重が単純引っ張りのみの場合

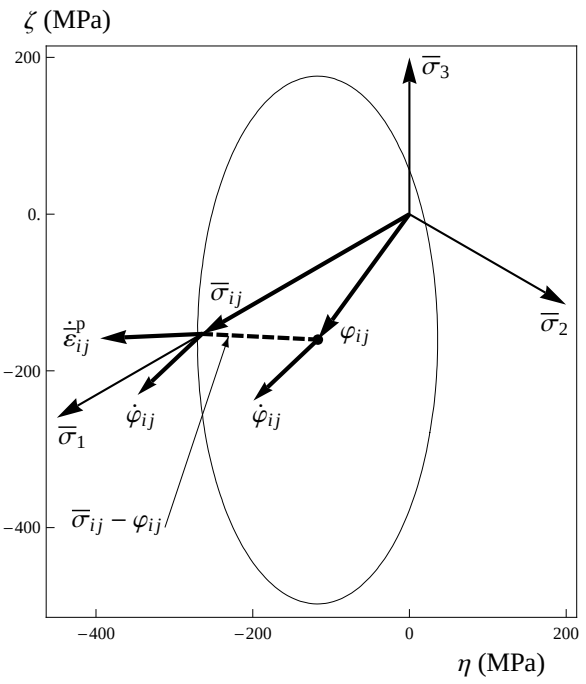


図–3-b 途中から荷重を変化させた場合

図–3 円柱介在物を含む複合材料の降伏曲面

5.2 移動硬化則

移動硬化則について確認するために，**図–3-a** の $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ = 0.4% の状態における降伏曲面の中心 φ_{ij}，巨視的応力



図–4 硬化法則

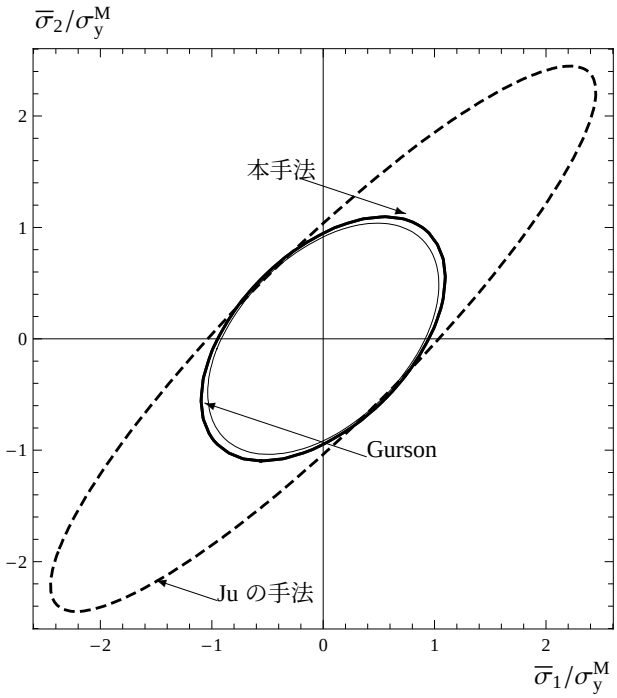
$\overline{\sigma}_{ij}$ とそれぞれの増分量の方向を **図–4** に示した．先に示したように，$\dot{\varphi}_{ij}$ と $\dot{\overline{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}_{ij}$ の方向は一致しないのが見てとれる．また，Ziegler の考え方のように $\overline{\sigma}_{ij}-\varphi_{ij}$ と $\dot{\varphi}_{ij}$ の方向も一致しないのが明らかである．両者の関係を解析的に得ようと試みたが，今回は求めることができなかったため，今後更なる検討を行いたい．

5.3 空隙を含む弾塑性材料

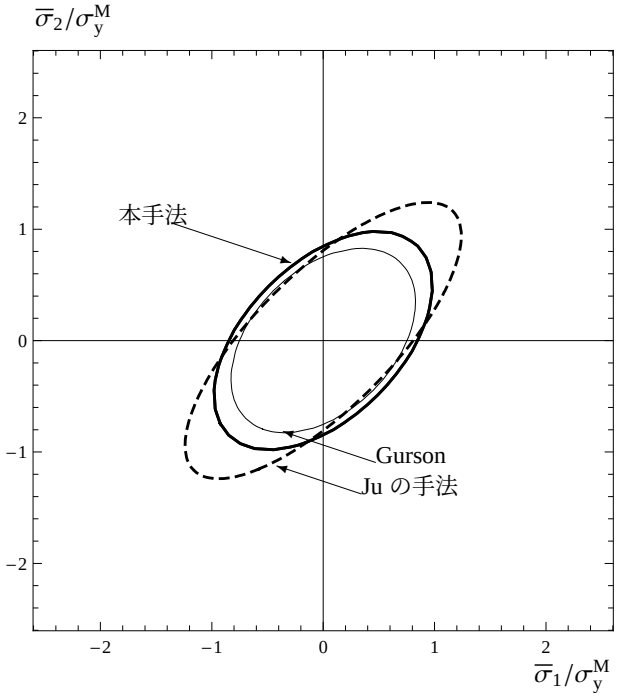
ここでは特殊な場合として，空隙を含む弾塑性複合材料の降伏曲面を示す．介在物のヤング率を 0 とすることによって空隙を表現できるものとして考え，Voigt 表記した係数 A_{ijkl} を計算すると

$$A_{ij} = \frac{1}{1-f_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{35}$$

のように空隙の体積分率のみによって表され，母材の材料パラメータや空隙の形状に一切無関係な量となる．式 (32) より $a = b(= \sqrt{3}/\sqrt{2}(1-f_2))$ となるから，π 平面上での降伏曲面の形状は常に円となる．また，$\alpha = 1, \beta = 0$ となるため，空隙がどのような形状であっても降伏は静水応力に依存しないことが分かる．同様に，係数 T_{ijkl} の成分を計算すると全て 0 となるため，移動硬化も生じないことが分かる．



図–5-a $f_2 = 0.05$



図–5-b $f_2 = 0.15$

図–5 空隙を含む弾塑性材料の巨視的初期降伏曲面

図–5 に空隙を含む弾塑性材料の初期降伏曲面を示す．主応力を母材の降伏応力で除した $\overline{\sigma}_{11}/\sigma_{\mathrm{y}}^{\mathrm{M}}$ を横軸に，$\overline{\sigma}_{22}/\sigma_{\mathrm{y}}^{\mathrm{M}}$ を縦軸にとり，ボイド損傷理論の式としてよく用いられている Gurson の式と Ju の示した式[8)]による結果を合わせて示した．空隙の体積分率が小さい場合は，本手法による結果は Gurson の結果とほとんど一致する．また，体積分率が大きくなるにつれて，二

軸引っ張り方向には Gurson の結果と Ju の結果との中間くらいに位置するが，せん断方向については他の手法よりもやや大きくなることが分かる．

6. まとめ

増分型の森・田中理論に基づき，弾性体を含む二相複合材料の巨視的降伏曲面を解析的な式で表し，以下のような知見を得た．

- 降伏関数は，異方性を有し移動硬化と等方硬化を組み合わせた場合の一般的な式と一致する．
- 降伏曲面の中心移動量増分と巨視的塑性ひずみ増分は，母材・介在物の弾性係数と介在物の体積分率のみによって求められる４階のテンソルによって関係付けられる．
- 二つの主軸の長さが等しい回転楕円体介在物を有する複合材料の降伏について，静水応力依存性と異方性に関するパラメータは母材・介在物のヤング率の比，母材・介在物のヤング率，介在物の体積分率のみで決められる．
- 空隙を含む弾塑性複合材料の降伏特性は，母材の弾性係数や空隙の形状には一切依存せず，母材の降伏応力と空隙の体積分率のみで決まり，巨視的な異方性・静水応力依存性・移動硬化の性質は見られない．

最後に，本解析においては問題を簡単にするために，対象とする問題を限定して

- 母材と介在物は同時に降伏しない
- 回転楕円体介在物の三つの主軸が直角座標系の各軸に一致している
- 母材または介在物の移動硬化は考えない

という仮定を設けた．ただし，複合材料を開発をするという立場に立てば，このような仮定を設定することは設計の自由度を狭めることとなり，実際に寄与できる点は多くないであろう．今後は，このような仮定をできる限り外した上で，複合材料の巨視的降伏関数を解析的に誘導したいと考えている．

参考文献

1) Mori, T. and Tanaka. K. : Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions, *Act. Metall.*, Vol.21, pp.571–574, 1973.
2) 岩熊哲夫，田辺将樹，岩崎智昭，小山茂：複合材料や多結晶体の初期降伏曲面の特性，応用力学論文集，Vol.4, pp.405–412, 2001.
3) 岩崎智昭，岩熊哲夫，小山茂：複合材料の巨視的降伏および流れ則の予測，応用力学論文集，Vol.5, pp.273–282, 2002.
4) 廣瀬恒太，岩熊哲夫，小山茂：材料内部の微視構造が初期降伏特性に及ぼす影響と巨視的構成則，応用力学論文集，Vol.6, pp.355–366, 2003.
5) 湯本健寛，岩熊哲夫：複合材料の平均的書記降伏関数の陽な近似表現，応用力学論文集，Vol.7, pp.515–525, 2004.
6) 小山茂，片野俊一，大上俊之，岩熊哲夫：複合材料や多結晶金属体の平均弾塑性挙動予測の一手法，土木学会論文集 A，Vol.64 No.1, pp.121–132, 2008.
7) 寺田賢二郎，菊地昇：均質化法入門，丸善，2003.
8) Ju, J. W. and Zhang, X. D. : Effective elastoplastic behavior of ductile matrix composites containing randomly located aligned circular fibers, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 38, pp. 4045-4069, 2001.
9) Nemat-Nasser, S. and Hori, M.: *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*, Second Revised Edition, North-Holland, 1999.
10) 徳岡辰雄：運動学的加工硬化を持つ Prandtl–Reuss 塑性物質の構成式，材料，第２６巻 第２８３号，pp.334–338, 1976.

(2009 年 4 月 9 日 受付)