変位速度境界での外部仕事率を最大にする 剛塑性境界値問題の混合型解法について

Hybrid Formulation of Limit Analysis to Maximize an External Plastic Work Rate on the Prescribed Velocity Boundaries

小林俊一*・西藤 潤**・柳本楠佳子***

Shun-ichi KOBAYASHI, Jun Saito and Kanako Yanagimoto

*正会員 博士(工学) 金沢大学助教 理工研究域環境デザイン学系(〒 920-1192 金沢市角間町) **正会員 博士(工学) 京都大学助教 大学院工学研究科社会基盤工学専攻 ***京都大学大学院生 大学院工学研究科社会基盤工学専攻修士課程

A limit analysis problem in which prescribed velocity boundary conditions are given is considered in this paper. This type of limit analysis can be formulated as a maximization of an external work rate on the prescribed velocity boundaries. In order to solve this maximazation problem, a hybrid method based on the interior point method is convenient due to its numerical efficiency. Details of the hybrid formulation of rigid plastic finite element method for a velocity controlled limit analysis is derived and discussed as is in a similar way to a load controlled limit analysis problem. As the verification of the proposed formulation, bearing capacity of a shallow foundation is calculated and checked.

Key Words: limit analysis, finite element method, hybrid formulation, interior point method, prescribed velocity boundary

1. はじめに

剛塑性解析は、構造物が塑性崩壊するときの物理量 (荷重係数、応力、塑性ひずみ速度等)を直接評価する 解析法である。数理的には凸計画問題に属する非線形 最適化問題として定式化できる。地盤工学の分野では、 従来より支持力、斜面安定、土圧の問題は剛塑性解析 として取り扱われており、実務上のさまざまな問題に 対して、上界法や下界法によって推定された解、特性 曲線法によって評価された解、あるいは極限平衡法等 の近似的な解法で評価した解が、実際に利用されてき た。さらに、剛塑性境界値問題を数値的に解く方法と して、上界法に基づく剛塑性有限要素法^{1),2),3)} や、上 界法と下界法を同時に解く混合型剛塑性有限要素法も 提案されている^{4),5),6)}。

さて、剛塑性境界値問題によって構造物が塑性崩壊する極限荷重を評価する場合、極限荷重の載荷条件によって与えられる境界条件が異なるため、以下の2種類の定式化が必要である。

1 つは荷重制御条件による載荷が行われる場合である。この場合は、 ノイマン境界上に作用する基準荷重に対して構造物が崩壊する荷重係数を最大化する非線形最適化問題として定式化できる。一方、剛体のパンチングのように十分に剛な固体圧で載荷を行う場合は、変位速度境界条件として載荷をモデル化することが可能である。この場合は変位速度が与えられるディリクレ境界上での外部仕事率を最大化する非線形最適化問題となる。

著者はこれまで前者の載荷条件に対する混合型剛塑 性有限要素法を提案してきたが、理論的には同様の枠 組みで後者の載荷条件に対する混合型剛塑性有限要素 法も定式化可能である。そこで本論文では、その定式 化と数値的な解法について議論する。

さらに、具体的な数値解析例としてモール・クーロン地盤上の浅い剛な基礎の鉛直荷重に対する支持力問題を取り上げた。一般に剛な基礎の場合、地盤から基礎底面に作用する地盤反力分布そのものが未知量となる。このため、均一な鉛直荷重分布を仮定した荷重制御の問題では、内部摩擦角が大きくなるほど、起限支持力の評価が困難であった $^{5)}$ 。このため今回は、変位速度制御の境界条件が与えられる剛塑性有限要素法によって、上記問題を解き、支持力係数 N_c , N_γ の値を既往の研究例と比較することによって、提案する数値解析方法の妥当性も検証した。

2. 定式化

変位速度境界 S_u で変位速度 $\dot{u}=\dot{u}$ の載荷を受ける 剛完全塑性体の塑性崩壊荷重を評価する問題を考える。 より一般的な問題を考えるため、変位速度境界以外の部分についてもこの剛完全塑性体には、トラクションと物体力から成る一定外力が載荷しているものとする。 その概要を図-1 に示す。

このような変位制御の剛塑性境界値問題では、ディリクレ境界である変位速度境界に現れる反力 p に関心がある。そこで本論文では、まず静力学的な定式化として、釣合系で降伏条件を破らない許容応力場のうち、ディリクレ境界での仕事率を最大にする許容応力場を求める最適化問題を取り上げ、その数理的な性質を議

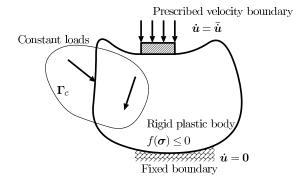


図-1 対象とする剛塑性境界値問題

論する。

2.1 静力学的な定式化とラグランジアン

ここでは、小林 $^{4),6}$)に従い、有限要素による空間離散した系について定式化を行う。可容応力場 σ の中でディリクレ境界での仕事率 $u\cdot p$ を最大化する最適化問題のラグランジアンは以下のように書ける。

$$L_d = \begin{cases} \bar{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{p} + \boldsymbol{\kappa} \cdot \left(\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\Gamma}_c - \boldsymbol{D}_d^T \boldsymbol{p} \right) \\ - \boldsymbol{\lambda} \cdot \left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{s} \right) + \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{t} & \text{for } \boldsymbol{t} \geq 0 \\ + \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

ここにベクトルp はディリクレ境界での節点反力、 Γ_c は系に作用する一定値の外力(物体力や一定の表面力など)、 $f(\sigma)$ は各積分点での降伏関数の値をまとめて表示したもの、s はスラック変数、行列 B は有限要素法の B マトリクス、 D_d はディリクレ境界条件が満たすべき節点変位を表すための行列であり、ベクトル κ 、 λ 、t はラグランジュ乗数である。

このラグランジアンに対して、主問題

$$\inf_{\kappa, \lambda, t} \left\{ \sup_{p, \sigma, s} L_d \right\} \tag{2}$$

を考えれば、具体的に以下の最大化問題として導出で きる。

Find max $\dot{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{p}$

s.t.
$$\begin{cases} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\Gamma}_c - \boldsymbol{D}_d^T \boldsymbol{p} = 0 \\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}, \ \boldsymbol{s} \ge \boldsymbol{0} \end{cases}$$
 (3)

この最大化問題は、確かに可容応力場の中でディリクレ境界での仕事率 $\hat{u}\cdot p$ を最大化する問題となっている。一方、双対問題は上限操作と下限操作の順序を入れ

替えて

$$\sup_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{s}} \left\{ \inf_{\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{t}} L_d \right\} \tag{4}$$

とすることにより、以下の最小化問題として導出できる。

Find min $D(\kappa) - \kappa \cdot \Gamma_c$

s.t.
$$\begin{cases} D_d \kappa = \bar{\dot{u}} \\ \lambda \ge 0 \end{cases}$$
 (5)

ここにスカラー値関数 $D(\kappa)$ は最大塑性仕事の原理による内部消散率を表し、非負のラグランジュ乗数 λ のもとで

$$D(\kappa) = \sup_{\sigma} \left\{ \sigma \cdot B\kappa - \lambda \cdot f(\sigma) \right\}$$
 (6)

となる関数である。ラグランジュ乗数として導入した κ が力学的には節点変位速度と解釈できることに注意 する。さらに、降伏関数 $f(\sigma)$ が原点を含む凸関数で、しかも応力 σ について十分なめらかで微分可能であれば、最大塑性仕事の原理から直ちに関連流れ則

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{\kappa} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^T \boldsymbol{\lambda} \tag{7}$$

が導出できる。ここにラグランジュ乗数 λ が力学的には非負の塑性乗数と解釈できることに注意する。

2.2 解の最適性の必要条件

弱双対定理によれば主問題と双対問題の目的関数値は常に以下の不等式を満足する。

$$D(\kappa) - \kappa \cdot \Gamma_c \ge \bar{\dot{\boldsymbol{u}}} \cdot \boldsymbol{p} \tag{8}$$

ここに変位速度場 κ は適合系の速度場であることに注意する。さて、この不等式を変形すれば、

$$D(\kappa) \ge \kappa \cdot \Gamma_c + \bar{\dot{\boldsymbol{u}}} \cdot \boldsymbol{p} \tag{9}$$

となり、任意の適合系の速度場 κ について、内部消散率が必ず外部塑性仕事率を下回らないことが分かる。この関係は、上界法による極限解析を行う上で重要である。

さて、さらに主問題に対する解の最適性の必要条件から、以下の相補性条件が導かれる 7 。

$$S^*\lambda^* = \Lambda^*s^* = 0, s \ge 0, \lambda \ge 0 \tag{10}$$

ここに行列 S, Λ は対角成分のみ非零で、その成分がベクトル s, λ である行列で、上付きのアスタリスク * は最適解であることを表す。

2.3 解くべき方程式

これまでの議論より、応力場 σ , 節点変位速度場 κ , ディリクレ境界反力 p, 塑性乗数 λ およびスラック変数 s が最適解であれば、KKT 条件、すなわち以下の速度場、応力場および相補性条件に関する全ての方程式を満足する。

$$B\kappa^* - \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)^T \lambda^* = 0, \ \lambda^* \ge 0$$
 (11)

$$\mathbf{D}_d \mathbf{\kappa}^* = \bar{\dot{\mathbf{u}}} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\Gamma}_c - \boldsymbol{D}_d^T \boldsymbol{p}^* = \boldsymbol{0}$$
 (13)

$$f(\sigma^*) + s^* = 0, s^* > 0$$
 (14)

$$S^*\lambda^* = \Lambda^*s^* = 0 \tag{15}$$

したがって、変位速度制御の載荷を受ける剛塑性境界 値問題は、これらの方程式を同時に満たす変数を求め ればよいことが分かる。

2.4 主双対内点法による解法

前述の KKT 条件を満足する最適解を解く方法とし て、ここでは主双対内点法⁸⁾を用いる。この方法は、凸 計画問題に対する高速かつ安定な解法であることが知 られている。この方法では、変数 s, λ がその非負性を 満足するような任意の初期仮定解から繰返し計算を行 い、実行可能領域内部の内点をたどって最適解に収束 させる。工学的な計算上のメリットとしては、非実行 可能解から繰返し計算を開始できるためにあらかじめ 初期実行可能解を求める必要がないことや、繰返し計 算における増分の大きさを内点条件から可変的に決定 できるので計算効率がよいことなどが挙げられる。

(1) 相補性条件の近似とバリアパラメータ

主双対内点法では、繰返し計算のiステップにおける 近似解 s_i 、 λ_i を用いて、現在の近似解が相補性条件か らどれくらい外れているかを定量的に表す指標バリヤ パラメータ ε を導入し、繰返し過程でバリヤパラメー タを単調にゼロに収束させていく計算を行う。ここで は以下のバリアパラメータを用いることにする。

$$\varepsilon_i = \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{\lambda}_i / n \tag{16}$$

ここに下添字iは繰返し計算のiステップであることを 表し、スカラーnはベクトルs、 λ の成分数である。こ のバリヤパラメータは i ステップでの主双対ギャップを 相補性条件の数nで割ったものなので、物理的には平 均的な相補性条件の満足度を表していると解釈できる。

実際の数値計算では、より早くゼロに収束させるた めに、下記に示すように、パラメータ γ で線形に加速 させたり、パラメータ ω で冪で加速させたバリヤパラ メータ ε を用いることが多い。

$$\varepsilon = \begin{cases} \gamma \cdot \varepsilon_i^{\omega} & \text{if } \varepsilon_i < 1\\ \gamma \cdot \varepsilon_i^{1/\omega} & \text{if } \varepsilon_i \ge 1 \end{cases}$$
 (17)

本研究では、これらのパラメータとして主に $\gamma=0.9$, $\omega = 1.1$ を用いた。

(2) 増分形の方程式

正解が満すべき方程式 $(11)\sim(15)$ を基にして、ある 近似解の周りで1次のテーラー展開を行い、増分形の 方程式を求めると、以下の方程式が得られる。

$$\boldsymbol{H}\triangle\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{E}^{T}\triangle\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{B}\triangle\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{E}^{T}\boldsymbol{\lambda}$$
 (18)

$$-\boldsymbol{B}^{T} \triangle \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{D}_{d}^{T} \triangle \boldsymbol{p} = \boldsymbol{B} \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{D}_{d}^{T} \boldsymbol{p} - \boldsymbol{\Gamma}_{c} \quad (19)$$

$$\boldsymbol{D}_d \triangle \boldsymbol{\kappa} = \bar{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{D}_d \boldsymbol{\kappa} \tag{20}$$

$$E\triangle\sigma + \triangle s = -f(\sigma) - s \tag{21}$$

$$S \triangle \lambda + \Lambda \triangle s = \varepsilon e - \Lambda s \tag{22}$$

ここに行列 H, E は応力空間内における降伏関数の ヘッセ行列と勾配を表し、それぞれ以下のように定義 される。

$$H = \frac{\partial^2 (\Lambda f)}{\partial \sigma \partial \sigma}$$
(23)
$$E = \frac{\partial f}{\partial \sigma}$$
(24)

$$\boldsymbol{E} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{24}$$

行列 S は対角項のみに非負成分を持つ行列であるの で、その逆行列は $S^{-1} = \operatorname{diag}(1/s_i)$ と陽に表すことが 可能である。これを用いて、増分 $\triangle \lambda$, $\triangle s$ を増分 $\triangle \sigma$ のみで表すと

$$\triangle s = -f(\sigma) - s - E \triangle \sigma \tag{25}$$

$$\triangle \lambda = S^{-1} \Lambda E \triangle \sigma + \varepsilon S^{-1} e + S^{-1} \Lambda f$$
 (26)

となる。これを代入すれば、解くべき増分形の方程式 は次のようにまとめられる。

$$\begin{bmatrix} W & -B & \mathbf{0} \\ -B^T & \mathbf{0} & D_d^T \\ \mathbf{0} & D_d & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \triangle \boldsymbol{\sigma} \\ \triangle \boldsymbol{\kappa} \\ \triangle \boldsymbol{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_{\kappa} \\ \boldsymbol{r}_{\sigma} \\ \boldsymbol{r}_d \end{pmatrix}$$
(27)

ここに残差ベクトル $oldsymbol{r}_\kappa, oldsymbol{r}_\sigma, oldsymbol{r}_d$ はそれぞれ

$$r_{\kappa} = B\kappa - E^{T} \left(\lambda + \varepsilon S^{-1} e + S^{-1} \Lambda f \right)$$
 (28)

$$r_{\sigma} = \boldsymbol{B}^{T} \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{D}_{d}^{T} \boldsymbol{p} - \boldsymbol{\Gamma}_{c} \tag{29}$$

$$r_d = \bar{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{D}_d \boldsymbol{\kappa} \tag{30}$$

であり、行列 W は対称行列で

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{H} + \boldsymbol{E}^T \boldsymbol{S}^{-1} \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{E} \tag{31}$$

式(27)の解は、1次テーラー展開に基づいて近似解 から解を修正するための、解の探索方向を表している。

(3) 解の増分幅の評価

一般に、繰返し解法では解の探索方向に沿って適当 な増分を与え、近似解を更新する。この増分幅の選択 法は、計算の効率と安定性に影響を及ぼす。主双対内 点法の場合、各計算ステップでの増分幅は可変的に決 定することが可能であるため、計算効率がよいとされ る。具体的には、非負変数が必ず実行可能領域に含ま れること、つまり内点条件を満たすこと、が要求され る。i ステップでの非負変数 s, λ の近似解 s_i , λ_i と解 の探索方向 $\triangle s$, $\triangle \lambda$ から解を更新するとき、 β は以下 の条件を満たす必要がある。

$$s_i + \beta_p \triangle s > 0 \tag{32}$$

$$\lambda_i + \beta_d \triangle \lambda > 0 \tag{33}$$

ここに β_p, β_d は非負のスカラー量で、それぞれ主問題、 双対問題の変数に関する増分幅である。

しかしながら、上記の増分幅を直接適用した場合に は、収束計算が破綻する場合がある。その理由として、 増分形方程式の定式化では非線形関数である降伏関数 $f(\sigma)$ のテーラー展開で 2 次以上の高次項を無視してい たが、これらの高次項の影響が収束計算上、無視でき ないことが挙げられる。そこで、以下のような方法で、 高次項の影響を考慮して増分幅 🖟 を評価することと した。

$$f(\boldsymbol{\sigma} + \beta_p \triangle \boldsymbol{\sigma}) < 0 \tag{34}$$

もし式 (32) で評価した増分幅 β_p では降伏関数の非負 性を満足できない場合、降伏関数の非負性を満足でき

るまで、1 より小さい非負の実数を乗じて増分幅を小さくした。

このようにして評価したステップ幅を用いて、変数 を以下のように更新する。

$$\boldsymbol{\kappa}_{i+1} = \boldsymbol{\kappa}_i + \beta_d \triangle \boldsymbol{\kappa} \tag{35}$$

$$\lambda_{i+1} = \lambda_i + \beta_d \triangle \lambda \tag{36}$$

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i + \beta_p \triangle \sigma \tag{37}$$

$$\boldsymbol{s}_{i+1} = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma}_{i+1}) \tag{38}$$

$$\boldsymbol{p}_{i+1} = \boldsymbol{p}_i + \beta_p \triangle \boldsymbol{p} \tag{39}$$

(4) 初期仮定解の設定

主双対内点法では、非負変数がその非負性を満足する範囲であれば、非実行可能解から収束計算を開始することが可能である。つまり初期解として

$$oldsymbol{s}_0 > oldsymbol{0}$$
 $oldsymbol{\lambda}_0 > oldsymbol{0}$

を満たす解を仮定すればよい。計算初期に近似解が非 実行可能領域であっても、繰返し計算過程で近似解が 実行可能領域に入ってくるようになる。

ただし、一般的には初期解の選択が収束計算回数などの計算効率に大きく影響し、当然ではあるが最適解の近くから収束計算を始める方が少ない回数で最適解に到達する。本研究では、初期解の選択については特に工夫を行っていないが、計算効率をさらに良くするために今後検討すべき事項であると考えている。

3. 数值実験例

本研究で提案する数値解析法を検証するために、モール・クーロン地盤上の剛な帯基礎の鉛直支持力問題を取り上げる。地盤材料の自重が無視できる場合には、支持力係数 N_c を求める問題に帰着し、その正解は解析的に得られている。一方、自重が無視できない場合には、支持力係数 N_γ を評価しなければならず、その正解は解析的には求められていない。数値的に N_γ を評価することは、帯基礎の支持力理論にとって重要な課題であるため、これまで多くの既往の研究が行われてきている。ここでは、それらの成果との比較によって検証を行う。

Terzaghi の支持力公式によれば、支持力は粘着力に 起因する項と自重に起因する項の和として表現される。 奥行き方向に均一な2次元問題では、単位幅あたりの 極限支持力qは

$$q = c \cdot N_c + \frac{1}{2}\rho g B \cdot N_{\gamma} \tag{40}$$

と表現される。ここに $N_c,\,N_\gamma$ は支持力係数と呼ばれ、内部摩擦角 ϕ の関数となっている。また地盤の密度は $\rho,\,$ 重力加速度は $g,\,$ 基礎の幅は B である。

この支持力公式を粘着力 c で除して無次元化すると

$$\frac{q}{c} = N_c + \frac{\rho g B}{2c} \cdot N_\gamma \tag{41}$$

となる。上式より、支持力の中で自重による項と粘着力による項との寄与の割合を表すパラメータGが以下のように定義できる。

$$G = \frac{\rho g B}{2c} \tag{42}$$

パラメータ G は 0 から ∞ の値をとり、自重が無視できる場合は G=0、逆に粘着力が無視できる場合は $G=\infty$ となる。数値解析上は、 $G=\infty$ となるケース は計算できないので、十分大きな値で代用することにした。

用いた有限要素メッシュとしては以下の 2 パターンのメッシュを用いた。

Mesh A 変位制御による載荷幅 B/2 に対して、解析領域の大きさが幅 6.1B, 深さ 1.55B で、載荷幅 B/2を 5 要素分で空間離散化したメッシュ。

Mesh B 変位制御による載荷幅 B/2 に対して、解析領域の幅を 15.2B, 深さ 2.58B とし、載荷幅 B/2 を 3 要素分で空間離散化したメッシュ。

双方のメッシュとも、変位制御の載荷領域端部は速度 場が特異となるので、これを計算上回避する便法とし て、載荷領域端部付近のメッシュ分割を細かくしてい る。境界条件としては、側方境界はスライダー、底面 境界は固定となる斉次ディリクレ条件を課した。一方、 剛基礎部分には下向きに一定の鉛直変位速度となる 音次ディリクレ条件を課した。また、基礎と地盤の固 着条件として、基礎と地盤を完全に固着して鉛直下 きに強制変位速度を与えて載荷する粗い基礎と、基礎 と地盤の接方向に拘束を与えず鉛直下向きの強制変位 速度だけを与えて載荷する滑らかな基礎、の2通りの 固着条件を想定した。

2つのメッシュの使い分けは以下のような考え方に基づく。基礎周辺地盤の崩壊機構を考えたとき、自重が無視できる G=0 のケースでは、自重による外部仕事率がゼロであるために、自重を考慮した場合と比べると基礎周辺の遷移領域および主働くさび領域が側方に大きく広がる傾向にある。この傾向は内部摩擦角 ϕ が大きくなるに従って顕著である(例えば後述する図-6を参照のこと)。したがって、自重を無視して N_c を計算するシリーズについては、内部摩擦角 ϕ が 15° 以上となる場合のみ、 $Mesh\ A$ ではメッシュ側方の境界の影響が顕著に認められるため、 $Mesh\ B$ による解析を実施した。一方、G が十分に大きく自重が卓越するようなケースでは、 $Mesh\ A$ による解析を基本とし、いくつかの場合についてのみメッシュ分割の影響を見るために $Mesh\ B$ (粗いメッシュ)の解析も行った。

3.1 自重が無視できるモール・クーロン地盤の支持力問題 (支持力係数 N_c の評価)

自重が無視できる場合は、支持力係数 N_c の正解が以下のように知られている $^{9)}$ 。

$$N_c = \cot \phi \left[e^{\pi \tan \phi} \cdot \tan^2 \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} \phi \right) - 1 \right]$$
 (43)

これに対して、内部摩擦角 $\phi=0^\circ\sim35^\circ$ について、粗い基礎と滑らかな基礎について数値解析を行い、支持力係数 N_c の比較を表- 1 および図-2 に示す。

表-1 支持力係数 N_c の理論解と計算値

$\overline{\phi}$	Theory	Mesh A		Mesh B	
		Rough	Smooth	Rough	Smooth
0	5.14	5.30	5.35	_	_
10	8.34	8.55	8.68		_
15	11.0	11.2	11.5	11.3	11.5
20	14.8	_	_	15.2	15.8
25	20.7	_	_	21.2	22.2
35	46.1	_	_	46.7	47.5

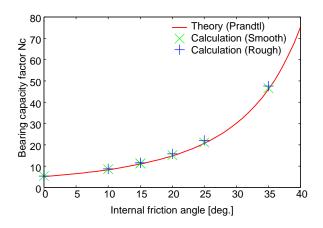


図-2 支持力係数 N_c の理論値と数値解析解の比較

表-1 によれば、かなり粗いメッシュ分割にも関わらず、数値解は正解によく一致した値が得られていることが分かる。また、自重が無視できる場合には、粗い基礎と滑らかな基礎の支持力に大きな差異はないことが分かる。

一方、終局限界時の塑性崩壊機構の例を図-3, 図-4, 図-5, 図-6 に示すが、粗い基礎と滑らかな基礎でほぼ同様の崩壊機構が得られていることが分かる。この理由として、滑らかな基礎であっても基礎中心に位置する節点については、鉛直下向きの速度場が強制的に与えられていることが挙げられる。自重が無視できる場合は、基礎直下地盤の剛体くさび状の領域が鉛直下向きに運動する Prandtl のメカニズムであっても、基礎中心を対称に左右に運動する剛体くさび領域が現れるHill のメカニズムであっても、極限支持力に差異はないことが知られている。このために、基礎中心直下の節点の変位速度境界条件が支配的になって、結果としてPrandtl のメカニズムが選択されたことが考えられる。

3.2 自重を考慮したモール・クーロン地盤の支持力問題 (支持力係数 N_{γ} の評価)

自重を考慮した場合は、自重を無視できる場合と比較すると、最適解に至る収束計算の計算量が増える傾向にある。その理由として以下の2つを指摘しておく。

- 自重に起因する外部塑性仕事率 $\kappa \cdot \Gamma_c$ も考慮しなければならないこと
- 地盤材料の剪断強度が応力状態によって変化する

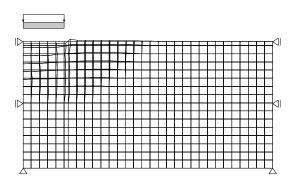


図-3 滑らかな基礎の崩壊機構 (Mesh A, $\phi = 0^\circ$, G = 0)

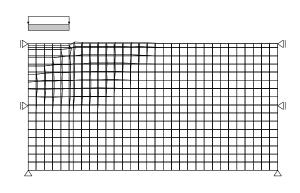


図-4 粗い基礎の崩壊機構 (Mesh A, $\phi = 0^{\circ}$, G = 0)

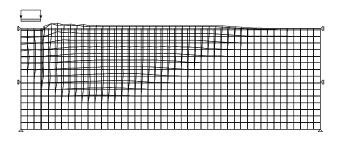


図-5 滑らかな基礎の崩壊機構 (Mesh B, $\phi = 35^{\circ}$, G = 0)

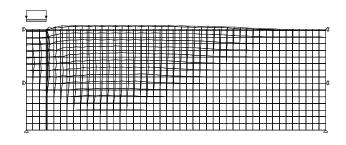


図-6 粗い基礎の崩壊機構 (Mesh B, $\phi = 35^{\circ}$, G = 0)

こと

これらの影響を含めて収束計算を行わなければならない。さらに初期仮定解として応力空間の原点に近い値を選択すれば、実行可能領域の境界付近から収束計算を開始することになるので、収束までの反復計算回数が増加したり、スラック変数の逆行列 S^{-1} の条件数が大きくなって数値的な独立性が損なわれやすい等、数

表 $-\mathbf{2}$ 内部摩擦角 ϕ と支持力係数 N_{γ} の関係

ϕ	Smooth	
	Mesh A	Mesh B
0	5.30×10^{-3}	_
10	3.68×10^{-1}	4.28×10^{-1}
15	8.69×10^{-1}	1.02
20	1.91	2.17
25	4.06	_
30	8.77	_
35	1.97×10^{1}	

ϕ	Rough	
	Mesh A	Mesh B
0	5.35×10^{-3}	_
10	6.73×10^{-1}	7.16×10^{-1}
15	1.66	1.823
20	3.75	4.21
25	8.25	_
30	1.83×10^{1}	_
35	4.16×10^{1}	_

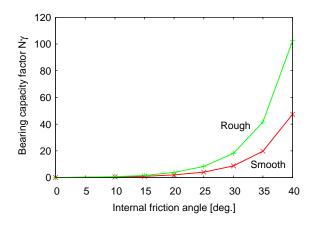


図-7 粗い基礎と滑らかな基礎の支持力係数 N_{γ} ($\mathrm{Mesh}\ \mathrm{A}$)

値計算としては厳しい条件となる。

さて、支持力係数 N_γ を評価するために、パラメータ G を十分に大きくとり、G=1000 とした場合の数値解析を行った。支持力係数 N_γ の計算は、粘着力による項 N_c を無視し、

$$\frac{q}{c} \approx G \cdot N_{\gamma} \tag{44}$$

から評価した。

数値解析結果に基づき、内部摩擦角 ϕ と粗い基礎および滑らかな基礎に関する支持力係数 N_{γ} の関係を表-2 および図- 7 に示す。表-2 には、メッシュサイズの影響を見るために、内部摩擦角 $\phi=20^{\circ}$ 以下のケースについて、粗いメッシュ分割である Mesh~B の解析結果も併

せて表記した。同表によれば、 $Mesh\ B$ (粗Nメッシュ)の解析結果は $Mesh\ A$ の解析結果よりも過大な支持力を与えていることが分かる。その理由として、自重を考慮する場合には、メッシュ分割が外力ベクトル(有限要素法でいう右辺ベクトル)の離散化にも影響を及ぼすことが考えられる。さらにモール・クーロン材料は、拘束圧に依存したせん断強度を示す材料であるため、塑性応力場にも影響が及ぶ。これらの理由によって、メッシュ分割が解析結果に与える影響は、支持力係数 N_{γ} を評価する解析シリーズよりも大きいと考えられる。

さらに本研究で求めた支持力係数 N_{γ} と既往の研究で求められた支持力係数とを比較したものを表-3 および表-4に示す.

まず比較に用いた研究例について解説する。Kumar and Kouzer 10)は Sloan 6^{11} の提案した不連続速度場を考慮した上界法に基づく数値塑性解析を用いており、降伏関数を区分線形の線形関数で近似することによって定式化された線形計画法で MATLAB で解いて支持力を評価している。表中の解析結果は、降伏関数を 24 のポリゴンで線形化し、100820 個の節点、33600 個の三角形要素、50210 個の速度不連続で離散化したモデルについて解いたもので、そこそこの規模の線形計画法を実施した結果であるといえる。解析結果には問題を線形化したために生じる誤差が含まれていることに注意する。

Ukritchon et al.¹²⁾は、上界値の計算だけでなく、下界法に基づく下界値も計算し、正解の範囲を挟み撃ちで評価した研究である。具体的な手法としては、上界値計算は Kumar and Kouzer と同じ方法、下界値計算については、Sloan らが提案した下界法に基づく数値塑性解析法¹³⁾を採用している。表中、左側が上界法による結果、右側が下界法による結果である。正解値はこの両者の間にあることを意味する。ただし、この解析結果には、問題の線形化近似に伴う誤差も含まれていることに注意する必要がある。

Michalowski¹⁴⁾は直線すべり場や対数らせん場などの比較的単純な崩壊メカニズムを仮定した古典的な上界法計算による解析結果、Chen⁹⁾は滑らかな基礎では Hillのメカニズムによる上界法計算、粗い基礎では Prandtlのメカニズムを修正した崩壊機構による上界法計算による解析結果である。一般に、内部摩擦角が大きくなるほど、地盤内の塑性域は周辺に大きく広がる。自重による外部仕事率(つまり自重ベクトルと想定メカニズムによる速度ベクトルの内積)を評価する時には、塑性域の大きさが大きくなればなるほど、つまり積分領域が広くなればなるほど、想定する崩壊メカニズムと現実のメカニズムの差がより効いてくる。このため、内部摩擦角が大きくなるほど、古典的な上界法計算による解析結果と正解との差は広がる傾向がある。

最後に、Hansen and Christensen¹⁵⁾は応力の特性曲線法によって塑性応力場を数値的に解いた解析結果である。この特性曲線法が適用できる問題は限られているが、本問題に対しては表中で最も正確な支持力係数を与えているものと考えてよい。なお、特性曲線法に

表-3 滑らかな基礎の支持力係数 N_{γ} の比較

φ	Present study	Kumar and Kouzer (2007)	Ukritch	on et al. (2003)	Michalowski (1997)	Chen (1975)	Hansen and Chris- tensen (1969)
10	0.368	0.31	0.30	0.27	0.42	_	_
15	0.869	0.78	0.75	0.68	1.05	1.2	0.7
20	1.91	1.74	1.73	1.52	2.33	2.7	1.6
25	4.06	3.82	3.94	3.33	5.02	5.9	3.5
30	8.77	8.47	8.54	7.18	10.9	12.7	7.5
35	19.7	19.7	21.2	15.7	24.7	28.6	18.0

表-4 粗い基礎の支持力係数 N_{γ} の比較

φ	Present study	Kumar and Kouzer (2007)	Ukritch	on et al. (2003)	Michalowski (1997)	Chen (1975)	Hansen and Chris- tensen (1969)
10	0.673	0.57	0.47	0.41	0.71		
15	1.66	1.46	1.31	1.13	1.94	2.1	1.2
20	3.75	3.37	3.27	2.67	4.47	4.6	2.9
25	8.25	7.57	7.52	5.95	9.77	10.9	7.0
30	18.3	17.0	17.4	13.2	21.4	25.0	15.0
35	41.6	39.8	42.4	29.3	48.7	57.0	35.0

よる解はしばしば不完全解と呼ばれるが、これは境界 条件から特性曲線に沿って塑性域での応力場の検討だけを行い、塑性域の外側にある剛体域での応力の釣合 条件や降伏条件については何ら照査していないためで ある。幾何形状や強度分布が複雑な問題では注意を要 する場合があることを指摘しておく。ここでは均質な 半無限領域を想定しているので、得られる解が可容応 力場であることは容易に理解できる。

さて一般に、剛塑性有限要素法で粗いメッシュを使用する場合、すなわち空間離散化が粗い場合は、表現できる速度場の自由度が低いために正解よりも大きめの解を評価する可能性がある。本研究では比較的粗いメッシュを使用しているにも関わらず、細かな解析メッシュを用いている Kumar and Kouzer の研究例と同様の評価が可能となっていることが分かる。また、Hansen and Christensen の解と比較すると、本研究の数値解はおおよそ 20% 程度過大評価しているが、これは主として空間離散化に伴う誤差であると考えられる。

次に基礎の崩壊機構の例を図-8, 図-9 に示す。この両図は解析領域の大きさが異なるため表示縮尺が揃っていないが、いずれも基礎直下の地盤を基礎幅 (B/2) あたり 5 要素で分割しており、基礎周辺地盤のメッシュサイズも等しいため、同等の空間離散化を行っているとみなしてよい。 自重を考慮した場合、一般に基礎底面の塑性領域が広くなるほど大きな支持力を発揮できる。粗い基礎のように基礎と地盤が固着している場合

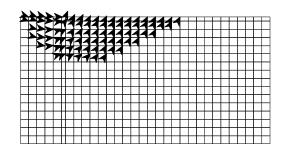


図-8 滑らかな基礎の崩壊機構($\phi=35^\circ,G=1000$)

は基礎底面の深い領域まで塑性領域が発達するため大きな支持力を発揮するが、滑らかな基礎の場合は基礎底面で地盤と相対的にすべってしまう速度場が許されるので、結果として基礎底面の深い領域まで塑性領域が発達せず支持力も小さくなる。このような塑性領域の違いが数値解析結果にも明瞭に現れていることが分かる

さらに、例えば図-5 と図-8 を比較すれば分かるように、自重を考慮した場合は、自重項の寄与に応じて、言い換えればパラメータ G の変化に応じて、基礎底面に現れる塑性領域の発達の様子が異なってくる。これは、Terzaghi の支持力公式のような重ね合わせの原理が厳密には成り立たないことを示唆していることに注意す

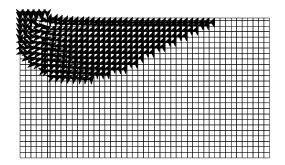


図-9 粗い基礎の崩壊機構($\phi = 35^{\circ}, G = 1000$)

る必要がある。さらに、本研究で提案する剛塑性有限要素法や Sloan らが提案する数値塑性力学手法では、剛塑性境界値問題をシステマチックに解き、基礎の極限荷重と崩壊機構を評価するので、複雑な幾何形状や材料強度分布を示すより一般的な支持力問題に対しても適用可能であることを指摘しておく。

4. おわりに

本研究では、速度境界上での外部仕事率を最大にする剛塑性境界値問題の混合型解法について議論した。 得られた知見は以下のとおりである。

- Lagrange 双対理論に基づいて、対象問題の Lagragian から主問題・双対問題を導出し、最適解が満たすべき KKT 条件を導出した。
- KKT条件を満たす最適解を数値的に解く方法として、主双対内点法による混合型解法を用い、混合型の剛塑性有限要素法を定式化した。これは、従来の荷重係数の最大化を図る応力制御問題と同様の数理構造を有している。
- 提案した手法を検証するため、モールクーロン地盤上の剛な浅い基礎に関する2次元支持力解析を実施した。その結果、既往の研究とよい一致を示す数値解が得られることを確認した。

基本的な数値解析に関しては特に問題がないことを確認したが、今後より効率的な計算を実施するために は以下の点に留意する必要があると考えている。

内部摩擦角 ϕ を考慮した解析では、最適解に至る繰返し計算回数が $\phi=0$ のケースよりも増加する場合が多く、計算効率が悪化する傾向にある。これについては、解析の初期解をどのように仮定するかが重要になると思われる。線形弾性の応力解を利用する等、より効率的な計算のノウハウを蓄積する必要があると思われる。

さらに増分方程式を解くプロセスでは、大規模な準 正定値行列を効率良く解く必要がある。行列の非ゼロ 要素のみを効率的に取り扱うスパース線形方程式ソル バなどの利用も検討する必要がある。

謝辞

本論文の執筆に当たって、金沢大学教授 松本樹典氏から有益なコメントを頂いた。また、本研究の一部は平成20年度日本学術振興会科学研究費補助金 基盤研究(C)20560461 (研究代表者:小林俊一)の補助を受けた。ここに記して謝意を表する。

参考文献

- Tamura, T., Kobayashi, S. and Sumi, T: Limit Analysis of soil structure by rigid plastic finite element method, Soils and Foundations, Vol. 24, No. 1, pp. 34-42, 1984.
- Tamura, T., Kobayashi, S. and Sumi, T.: Rigidplastic finite element method for frictinal materials, Soils and Foundations, Vol. 27, No. 3, pp. 1-12, 1987.
- 3) Asaoka, A. and Kodaka, T.: Bearing capacity of foundation on clays by the rigid plastic finite element model, Numerical Models in Geomechanics NUMOG IV, Pand & Pietruszczak Eds., pp. 839-849, 1992.
- 4) 小林俊一:主双対内点法による混合型剛塑性有限要素法 の開発、応用力学論文集、Vol. 6, pp. 95-106, 土木学 会,2003.
- 5) 小林俊一・酒井拓磨・田村 武:混合型剛塑性有限要素法 による摩擦性材料の支持力解析、応用力学論文集、Vol. 7, pp. 483-492, 土木学会, 2004.
- Kobayashi, S.: Hybrid type rigid plastic finite element analysis for bearing capacity characteristics of surface uniform loading, Soils and Foundations, Vol. 45, No. 2, pp. 17-27, 2005.
- 7) 福島雅夫:非線形最適化の基礎,朝倉書店,2001.
- 8) 小島政和・土谷 隆・水野真治・矢部 博:内点法、朝 倉書店, 2001.
- 9) Chen, W.F.: Limit Analysis and Soil Plasticity, p. 81, p. 167, p. 250 and p. 273, Elsevier, 1975.
- 10) Kumar, J. and Kouzer, K.M.: Effect of footing roughness on bearing capacity factor N_{γ} , Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, Vol. 133, No. 5, pp. 502-511, 2007.
- 11) Sloan, S.W. and Kleeman, P.W.: Upper bound limit analysis using discontinuous velocity fields, Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 127, No. 1, pp. 293-314, 1995.

表-5 載荷条件および目的関数の比較

		何里制御
変位速度	$\dot{u}=ar{\dot{u}}$ (非斉次	$\dot{u} = 0$ (β χ χ
条件	条件)	件)
荷重条件	Γ_c (一定)	$lpha \Gamma_0$ (基準荷重の
		スカラー倍)と
		Γ_c (一定)
目的関数	$ar{\dot{u}}\cdot p$ (最大化)	α(最大化)

表-6 ラグランジアンおよび ККТ 条件の比較

	变位速度制御問題	荷重制御問題	
ラグランジアン	$L_d = egin{cases} ar{ar{u}} \cdot oldsymbol{p} + oldsymbol{\kappa} \cdot ig(oldsymbol{B}^T oldsymbol{\sigma} - oldsymbol{\Gamma}_c - oldsymbol{D}_d^T oldsymbol{p} ig) \ -oldsymbol{\lambda} \cdot ig(oldsymbol{f}(oldsymbol{\sigma}) + oldsymbol{s} \cdot oldsymbol{t} egin{cases} ar{u} & oldsymbol{\sigma} & oldsymbol{\sigma} \ + oldsymbol{\omega} & ext{otherwise} \end{cases}$	$L = egin{cases} lpha + oldsymbol{\kappa} \cdot \left(oldsymbol{B}^T oldsymbol{\sigma} - oldsymbol{\Gamma}_c - lpha oldsymbol{\Gamma}_0 - oldsymbol{D}_d^T oldsymbol{p} ight) \ - oldsymbol{\lambda} \cdot \left(oldsymbol{f}(oldsymbol{\sigma}) + oldsymbol{s} \cdot oldsymbol{t} ight) + oldsymbol{s} \cdot oldsymbol{t} \ & ext{if } oldsymbol{t} \geq oldsymbol{0} \ + \infty & ext{otherwise} \end{cases}$	
KKT 条件			
関連流れ則	$oxed{B \kappa^* = \left(rac{\partial oldsymbol{f}}{\partial oldsymbol{\sigma}} ight)^T oldsymbol{\lambda}^*, oldsymbol{\lambda}^* \geq 0}$	同左	
ディリクレ条件	$oldsymbol{D}_d oldsymbol{\kappa}^* = ar{ar{u}}$	$oldsymbol{D}_d oldsymbol{\kappa}^* = oldsymbol{0}$	
仕事率の正規化	該当せず	$\Gamma_0 \cdot \kappa^* = 1$	
釣合式	$igg oldsymbol{B}^T oldsymbol{\sigma}^* - oldsymbol{\Gamma}_c - oldsymbol{D}_d^T oldsymbol{p}^* = oldsymbol{0}$	$egin{aligned} oldsymbol{B}^T oldsymbol{\sigma}^* - oldsymbol{\Gamma}_c - lpha oldsymbol{\Gamma}_0 - oldsymbol{D}_d^T oldsymbol{p}^* = oldsymbol{0} \end{aligned}$	
降伏条件	$igg f(oldsymbol{\sigma}^*) + oldsymbol{s}^* = oldsymbol{0}, oldsymbol{s}^* \geq oldsymbol{0}$	同左	
相補性条件	$igg S^*\lambda^* = \Lambda^*s^* = 0$	同左	

- 12) Ukritchon, B., Whittle, A.W. and Klangvijit, C.: Calculation of bearing capacity factor N_{γ} using numerical limit analysis, Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, Vol. 129, No. 6, pp. 468-474, 2003.
- 13) Sloan, S.W.: Lower bound limit analysis using finite elements and linear programming, International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 12, No. 1, pp. 61-77, 1988.
- 14) Michalowski, R.L.: An estimate of the influence of soil weight on bearing capacity using limit analysis, Soils and Foundations, Vol. 37, No. 4, pp. 57-64, 1997.
- 15) Hansen, B. and Christensen, N.H.: Discussion of 'Theoretical bearing capacity of very shallow footing' by A.L.Larkins, Journal of Soil Mechanics and Foundation Engineering, ASCE, Vol. 95, No. 6, pp. 1568-1572, 1969.

付録 I 荷重係数を最大化する剛塑性境界値 問題(荷重制御問題)との比較

本論文で議論したディリクレ境界上での仕事率を最 大化する剛塑性境界値問題(変位速度制御問題)と、荷 重係数を最大化する剛塑性境界値問題(荷重制御問題) の数理的な構造について簡単にまとめておく。なお荷 重制御問題については、既往の文献^{4),6)}をもとにして いるが、本論文で議論した変位速度制御問題との比較 を容易にするため、荷重条件の設定を一部修正してい ることに注意されたい。

荷重制御問題では基準となる荷重 Γ_0 と荷重係数 α を用いて、塑性崩壊荷重 $\alpha\Gamma_0$ を評価する。変位速度制御問題および荷重制御問題の載荷条件と目的関数を表-5にまとめる。

変位速度制御問題および荷重制御問題のラグランジアンと KKT 条件を表-6 に示す。同表より、荷重制御問題では未知数として荷重係数 α が加わるものの、変位速度制御問題とは極めて類似した数理構造を有していることが理解できる。

最後に表-5 に示した目的関数についてコメントしておく。ディリクレ境界上での外部仕事率を考えると、変位速度制御問題では非斉次条件が与えられているため、外部仕事率は $\bar{u}\cdot p\neq 0$ となり、この外部仕事率を最大化する最適化問題を解いている。一方、荷重制御問題では斉次境界条件(すなわち固定境界条件)であるために、ディリクレ境界上での外部仕事率は常に0 である。しかしながら、表-6 で仕事率の正規化が課せられることから、塑性崩壊荷重 $\alpha\Gamma_0$ と速度場 κ による外部仕事率は α となっている。従って、荷重制御問題で行う荷重係数 α の最大化とは、実は仕事率の正規化 $\Gamma_0 \cdot \kappa^* = 1$ の下で外部仕事率の最大化を図っていると見ることも可能である。

(2009年4月9日受付)