

流体中の物体形状決定問題のための三次元有限要素生成法に関する研究

Research on Three-Dimensional Finite Element Mesh Generation for the Shape Identification of Body Located in Fluid Flow

野島和也*・川原陸人**

Kazuya NOJIMA and Mutsuto KAWHARA

*正会員 中央大学助教 理工学部都市環境学科 (〒 112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

**正会員 工博 中央大学教授 理工学部都市環境学科 (〒 112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

This paper presents a three-dimensional mesh generation for the numerical method of a shape optimization of a body located in an incompressible viscous flow. The purpose of the optimization is to find an optimal shape that minimizes the fluid forces subjected to the body. The formulation of the shape optimization is based on the optimal control theory.

To avoid the break down of calculation caused by destruction of element, the finite element mesh is reconstructed in each iteration of optimization process. The grid generation scheme based on Delaunay triangulation is applied to the reconstruction of mesh. A technique for the generation of boundary layer mesh is proposed. The boundary layer mesh has a smoothing effect for the gradient, on which depends shape deformation. A boundary layer mesh is effective for a stable shape optimization. As a numerical example, drag force minimization problems of a body located in low Reynolds number flow is carried out.

Key Words : Shape Identification, Optimal control theory, Mesh Generation, Delaunay Tetrahedrization

1. はじめに

本研究の目的は、三次元領域において、流体から受ける抗力が最小になるような形状を最適制御理論に基づき数値的に同定することであり、そのために必要となる、変化する形状に追従可能な完全自動の要素生成法の開発である。

近年 CFD と最適化手法を組み合わせることによって自動的に最適形状を求める研究が行われている。抗力最小形状決定への取り組みは、まず Pironneau¹⁾により Stokes 流れを仮定した場合において設計変数に物体表面座標を用いた最小化アルゴリズムが提案されたが適当な流れ場の数値解法がなかったため解を得るに至らなかった。しかし、Stokes 流れでは物体表面渦度が一定となる最適条件を導き出し、これを用いて面積一定条件のもと抗力最小形状を求めている。その後、Pironneau の提案したアルゴリズムをもとに抗力を目的関数に用いて二次元領域の定常 Stokes 流れや Oseen 流れにおいて抗力最小形状を得ている^{2),3)}

近年では非定常 Navier-Stokes 流れに対する形状決定が取り組まれている^{5),4)}。しかしながら、形状更新時にメッシュの破壊が生じたり、得られる勾配が波打ったりといった問題があった。この問題に対し、Delaunay 三角分割法をベースとした有限要素メッシュの再構築を最適化過程に組み入れることでメッシュの破壊を回

避する試みが行われたが、非構造メッシュを用いた場合に勾配 (物体の変形量) が滑らかではなくなり、物体表面が波打ち、かえって抗力が増加する問題が生じる。

これに対して、スムージング法を導入し、勾配を平滑化する方法⁵⁾や、物体と非構造形メッシュの間に、構造型メッシュを一層または複数層挿入する方法⁴⁾で、滑らかな勾配を得ることに成功している。図-1 は、大和田⁴⁾によって示されている、構造メッシュと非構造メッシュ、混合型のメッシュの勾配に対する影響の違いである。本研究では、得られた勾配を平滑化するスムージング法よりも、より自然な形で物体表面に沿って滑らかな勾配を得ることができる、非構造・構造の混合型のメッシュを用いる方法を取ることとする。

三次元の形状決定問題は、有限要素メッシュの作成が困難であり、これまで扱うことが困難であった。二次元解析の経験から、三次元解析においても、最適化プロセスにおいて、非構造・構造混合型のメッシュを使用した、有限要素メッシュ完全再構築システムが必要となる。

本研究では、このメッシュ完全再構築システムのベースとして Delaunay 分割法^{11),12),13),14)}を利用した。物体周りに三次元の構造型メッシュの層を構築方法、表面要素の変形に対する、ロバスト向上についての表面要素均一化方法を開発し、最終的に、三次元領域での抗力最小形状を導いたものである。

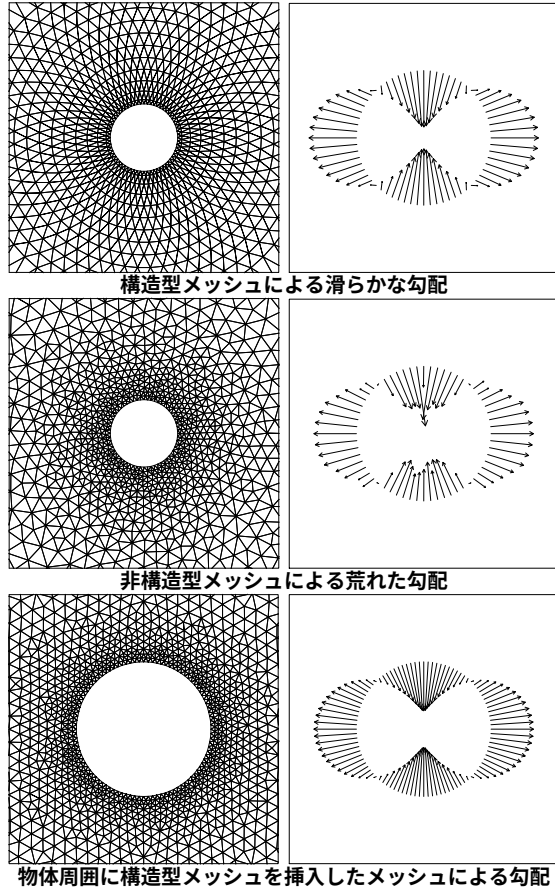


図-1 メッシュの違いによる勾配の違い⁴⁾

2. 流体中に置かれた物体の最小抗力形状決定問題

2.1 非圧縮性粘性流れ定式化

基礎方程式としては、非圧縮 Navier-Stokes 方程式を用いて安定化気泡関数有限要素法による離散化をおこなう。

(1) 支配方程式

流れの支配方程式として以下に示す無次元化した Navier-Stokes 方程式を用いる。なお、図-2 に示す境界 Γ を有する三次元領域 $\Omega \in R^3$ で定義し、領域 Ω は非圧縮性粘性流体で満たされているものとする。

$$\dot{u}_i + u_j u_{i,j} + p_{,i} - \nu(u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (1)$$

$$u_{i,i} = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (2)$$

ここで、 u_i は流速、 p は圧力、 ν は動粘性係数を示す。境界条件は以下のように与える。

$$u_i = \hat{u}_i \quad \text{on } \Gamma_U, \quad (3)$$

$$t_1 = 0, \quad u_2 = 0 \quad \text{on } \Gamma_y, \quad (4)$$

$$t_1 = 0, \quad u_3 = 0 \quad \text{on } \Gamma_z, \quad (5)$$

$$u_i = 0 \quad \text{on } \Gamma_B, \quad (6)$$

$$t_i = 0 \quad \text{on } \Gamma_D, \quad (7)$$

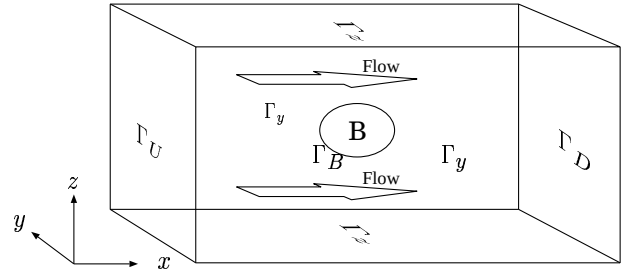


図-2 解析領域と境界条件

ここで、

$$t_i = \{-p\delta_{ij} + \nu(u_{i,j} + u_{j,i})\}n_j, \quad (8)$$

であり、 t_i はトラクション、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタ、 n_j は境界 Γ の外向き法線ベクトルである。

物体が受ける流体力 F_i (F_1 : 抗力, F_2 : 横力, F_3 : 揚力) は物体境界 Γ_B 上の応力 t_i の積分から与えられ、以下のように算出される。

$$F_i = - \int_{\Gamma_B} t_i d\Gamma. \quad (9)$$

(2) 離散化 - 混合補間

基礎方程式の重み付き残差方程式は以下のように表せる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w_i \dot{u}_i d\Omega + \int_{\Omega} w_i u_j u_{i,j} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} w_{i,j} \{-p\delta_{ij} + \nu(u_{i,j} + u_{j,i})\} d\Omega \\ & = \int_{\Gamma} w_i t_i d\Gamma, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\int_{\Omega} q u_{i,i} d\Omega = 0, \quad (11)$$

補間関数には安定化気泡関数有限要素法⁶⁾⁻⁷⁾を用いる。この手法では、流速に関しては気泡関数要素を、圧力に関しては一次要素を補間関数に用いる

a) 流速：気泡関数要素による補間

$$u_i = \Phi_1 u_{i1} + \Phi_2 u_{i2} + \Phi_3 u_{i3} + \Phi_4 u_{i4} + \Phi_5 \tilde{u}_{i5}, \quad (12)$$

$$\tilde{u}_{i5} = u_{i5} - \frac{1}{4}(u_{i1} + u_{i2} + u_{i3} + u_{i4}),$$

$$\Phi_1 = \eta_1, \quad \Phi_2 = \eta_2, \quad \Phi_3 = \eta_3, \quad \Phi_4 = \eta_4,$$

$$\Phi_5 = 256\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4,$$

b) 圧力：線形要素による補間

$$p = \Psi_1 p_1 + \Psi_2 p_2 + \Psi_3 p_3 + \Psi_4 p_4, \quad (13)$$

$$\Psi_1 = \eta_1, \quad \Psi_2 = \eta_2, \quad \Psi_3 = \eta_3, \quad \Psi_4 = \eta_4,$$

Φ_α ($\alpha = 1, 5$) は u_i の補間に用いる、5 節点の四面体気泡関数要素の補間関数であり、 Ψ_λ ($\lambda = 1, 4$) は p の補間に用いる、4 節点の四面体線形要素の補間関数である (図-3)。

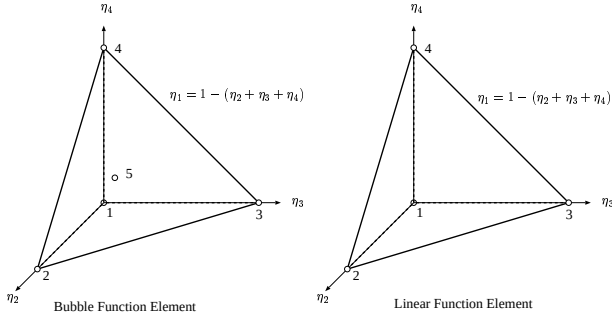


図-3 混合補間関数

気泡関数は、どのような関数を選んでも、気泡関数要素の安定化パラメータを一定値以上に出来ないことから、数値的な安定性は必ずしも十分でないことが知られている。本手法では、適切に数値粘性を補う為に、式(14)のように安定化作用を導入する。

$$\tau_{eB} = \frac{\langle \phi_e, 1 \rangle_{\Omega_e}^2}{(\nu + \nu') \|\phi_{e,j}\|_{\Omega_e}^2 A_e}, \quad (14)$$

ここで、 ν' は安定化作用に対する制御パラメータであり、この値は、式(15)で与えられる SUPG 法⁸⁾の安定化パラメータと等価になるように決定する。ここで、 h_e は要素幅である。

$$\frac{\langle \phi_e, 1 \rangle_{\Omega_e}^2}{\nu \|\phi_{e,j}\|_{\Omega_e}^2 A_e} = \tau_{eS}, \quad (15)$$

結果的に安定化気泡関数有限要素法の安定化パラメータは重心点のみに式(16)で与えられる安定化項を付加した形となる。

$$\sum_{e=1}^{N_e} \nu' \|\phi_{e,j}\|_{\Omega_e}^2 b_e, \quad (16)$$

N_e と b_e は要素数と要素重心点を示している。

(3) 有限要素方程式

支配方程式は、有限要素法を用いて近似することにより、設計変数 x_i の関数となり、勾配を直接計算することが可能になる。安定化気泡関数有限要素法を用いて空間方向に離散化すると、有限要素方程式は以下のように示される。

$$M \dot{u}_i + A_{,j}(u_j) u_i - C_{,i} p + D_{,jj} u_i + D_{,ji} u_j = T_i \quad \text{in } \Omega, \quad (17)$$

$$C_{,i}^T u_i = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (18)$$

ここで、

$$M = \sum \int_{\Omega_e} \Phi_\alpha \Phi_\beta d\Omega,$$

$$D_{,ji} = \sum \int_{\Omega_e} \nu \Phi_{\alpha,j} \Phi_{\beta,i} d\Omega,$$

$$A_{,i}(u_i) = \sum \int_{\Omega_e} \Phi_\alpha \Phi_\beta u_i \Phi_{\gamma,i} d\Omega,$$

$$C_{,i} = \sum \int_{\Omega_e} \Phi_\alpha \Psi_\beta d\Omega, \quad T_i = \int_{\Gamma_B} \eta t_i^h d\Gamma,$$

N と η はそれぞれ、要素領域と要素境界の補間関数であり、各節点で離散化された流速と圧力はそれぞれ u_i , p と表される。

2.2 抗力最小-形状決定問題

形状決定は最適化問題として扱うことができ、定式化は最適制御理論に基づいて行う。形状は設計変数 x_i を使って定義する。評価関数 $J(u_i, x_j)$ は設計変数 x_i と状態量 u_i の関数である。本研究では Lagrange 乗数法を用い、支配方程式 $R_k(u_i, x_j) = 0$ を満たしながら評価関数 $J(u_i, x_j)$ を最小にするような x_i を求める。Lagrange 乗数 λ を導入し、拡張評価関数 J^* を

$$J^*(u_i, x_j) = J(u_i, x_j) - \lambda_k R_k(u_i, x_j) \quad (19)$$

定義する。評価関数を最小化する為の最適条件は、 J^* の第一変分をゼロにすることにより導かれる。

$$\begin{aligned} \delta J^*(u_i, x_j) &= \left(\frac{\partial J}{\partial u_i} - \lambda_k \frac{\partial R_k}{\partial u_i} \right) \delta u_i \\ &+ \left(\frac{\partial J}{\partial x_i} - \lambda_k \frac{\partial R_k}{\partial x_i} \right) \delta x_i - R_k = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

これより、形状更新の勾配 $\frac{\partial J^*}{\partial x_i}$ は次式で表される。

$$G_i = \frac{\partial J^*}{\partial x_i} = \frac{\partial J}{\partial x_i} - \lambda \frac{\partial R_k}{\partial x_i}. \quad (21)$$

本研究では離散化前の Navier-Stokes 方程式を R_k として扱うのではなく、有限要素法により離散化した無次元化された非圧縮 Navier-Stokes 方程式を支配方程式 R_k として解析した。形状の設計変数 x_i は物体境界の座標値とした。また、目的関数 J には物体が流れから受ける力を用いた。

本研究では、Navier-Stokes 流体中の物体が受ける力の評価関数が最小になるような形状を、物体境界の座標値を未知数として決定する。

(1) 体積保存条件

物体形状は、全ての計算過程において体積一定条件を満たしながら最適化しなければならない。物体の体積が一定であることは、有限要素メッシュの全要素の体積の合計が一定であることと等価である。体積一定条件は次の方程式で示される。

$$\sum_{e=1}^m (a_e(x_i)) - A_0 = 0, \quad (22)$$

ここで、 $a_e(\mathbf{x}_i)$ は各要素の体積の体積を、 A_0 は初期領域の体積を表す。

(2) 評価関数

本研究では、流体力を評価関数に用いる。評価関数 J は Navier-Stokes 方程式から計算されて得られた流体力の二乗和で定義される⁹⁾。

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (q_1 F_1^2 + q_2 F_2^2 + q_3 F_3^2) dt, \quad (23)$$

F_1 と F_2 , F_3 はそれぞれ抗力と鉛直方向揚力、水平方向揚力を表し、 q_1 と q_2 , q_3 はそれぞれ抗力と鉛直・水平揚力に対する重み関数を表す。評価関数は式 (17)(18) を満たしながら最小化されなければならない。ここで、Lagrange 乗数法を適用し、以下の拡張評価関数を定義する

$$\begin{aligned} J^* = & \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (q_1 F_1^2 + q_2 F_2^2 + q_3 F_3^2) dt \\ & - \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{u}_i^{*T} (\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{A}_{,j}(\mathbf{u}_j)\mathbf{u}_i - \mathbf{C}_{,i}\mathbf{p} \\ & \quad + \mathbf{D}_{,jj}\mathbf{u}_i + \mathbf{D}_{,ji}\mathbf{u}_j - T_i) dt \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{p}^{*T} \mathbf{C}_{,i}^T \mathbf{u}_i dt \\ & + \mathbf{a} \left\{ \sum_{e=1}^m (a_e(\mathbf{x}_i)) - A_0 \right\}, \end{aligned} \quad (24)$$

形状決定は評価関数 J の代わりに、この拡張評価関数 J^* を停留することで実行される。

(3) 停留条件

拡張評価関数の停留条件は $\delta J^* = 0$ となる。拡張評価関数 J^* の第一変分は

$$\begin{aligned} \delta J^* = & - \int_{t_0}^{t_f} \delta \mathbf{u}_i^{*T} (\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{A}_{,j}(\mathbf{u}_j)\mathbf{u}_i - \mathbf{C}_{,i}\mathbf{p} \\ & \quad + \mathbf{D}_{,jj}\mathbf{u}_i + \mathbf{D}_{,ji}\mathbf{u}_j - T_i) dt \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \delta \mathbf{p}^{*T} \mathbf{C}_{,i}^T \mathbf{u}_i dt \\ & - \int_{t_0}^{t_f} \delta \mathbf{u}_i^T (\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}_i^* + \mathbf{A}_{,j}^T(\mathbf{u}_j)\mathbf{u}_i^* - \mathbf{C}_{,i}\mathbf{p}^* \\ & \quad + \mathbf{D}_{,jj}^T \mathbf{u}_i^* + \mathbf{D}_{,ij}^T \mathbf{u}_j^*) dt \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \delta \mathbf{p}^T \mathbf{C}_{,i}^T \mathbf{u}_i^* dt \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \delta T_i^T (\mathbf{u}_i^* - q_i F_i) dt \\ & + \delta \mathbf{a}^T \left\{ \sum_{e=1}^m (a_e(\mathbf{x}_i)) - A_0 \right\} + \delta \mathbf{x}_i^T G_i, \end{aligned} \quad (25)$$

ここに、

$$\begin{aligned} G_k = & - \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{u}_i^{*T} \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{x}_k} \dot{\mathbf{u}}_i + \frac{\partial \mathbf{A}_{,j}(\mathbf{u}_j)}{\partial \mathbf{x}_k} \mathbf{u}_i - \frac{\partial \mathbf{C}_{,i}}{\partial \mathbf{x}_k} \mathbf{p} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial \mathbf{D}_{,jj}}{\partial \mathbf{x}_k} \mathbf{u}_i + \frac{\partial \mathbf{D}_{,ji}}{\partial \mathbf{x}_k} \mathbf{u}_j - \frac{\partial T_i}{\partial \mathbf{x}_k} \right) dt \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{p}^{*T} \frac{\partial \mathbf{C}_{,i}^T}{\partial \mathbf{x}_k} \mathbf{u}_i dt + \mathbf{a}^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k} \sum_{e=1}^m a_e(\mathbf{x}_i), \end{aligned} \quad (26)$$

であり、 G_k は拡張評価関数の勾配となる。最適条件を得る為に各項をゼロとすると、以下のような方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{A}_{,j}(\mathbf{u}_j)\mathbf{u}_i - \mathbf{C}_{,i}\mathbf{p} \\ + \mathbf{D}_{,jj}\mathbf{u}_i + \mathbf{D}_{,ji}\mathbf{u}_j = T_i \quad \text{in } \Omega, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\mathbf{C}_{,i}^T \mathbf{u}_i = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^T \dot{\mathbf{u}}_i^* + \mathbf{A}_{,j}^T(\mathbf{u}_j)\mathbf{u}_i^* - \mathbf{C}_{,i}\mathbf{p}^* \\ + \mathbf{D}_{,jj}^T \mathbf{u}_i^* + \mathbf{D}_{,ji}^T \mathbf{u}_j^* = 0 \quad \text{in } \Omega, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\mathbf{C}_{,i}^T \mathbf{u}_i^* = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (30)$$

$$q_i F_i - \mathbf{u}_i^* = 0 \quad \text{on } \Gamma_B, \quad (31)$$

$$\sum_{e=1}^m (a_e(\mathbf{x}_i)) - A_0 = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (32)$$

$$G_i = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (33)$$

$\mathbf{u}_i$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{u}_i^*$, $\mathbf{p}^*$, $\mathbf{a}$ を式 (27) から (33) を満たすように解く。本問題の最適条件は (33) 式で表される。

$$\frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}_i} = G_i = 0. \quad (34)$$

2.3 評価関数最小化手法

本研究では最小化手法として勾配法を用いた。この手法では以下の修正評価関数 K を定義し、これを最小とすることで、形状決定のパラメータを求める。

$$\begin{aligned} K^{(l)} = & J^{*(l)} \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_B} \left(\mathbf{x}_i^{(l+1)} - \mathbf{x}_i^{(l)} \right)^T W \left(\mathbf{x}_i^{(l+1)} - \mathbf{x}_i^{(l)} \right) d\Gamma, \end{aligned} \quad (35)$$

l は最小化のイタレーション数であり、 $\mathbf{x}_i$ は物体表面の座標、 W は重み関数である。修正評価関数 K の最小条件は

$$\frac{\partial K^{(l)}}{\partial \mathbf{x}_i^{(l)}} = 0 \quad (36)$$

であり、式 (34) を考慮すると、形状決定のパラメータは以下の式で更新されることになる。

$$\mathbf{x}_i^{(l+1)} = \mathbf{x}_i^{(l)} - W^{-1} G_i^{(l)} \quad (37)$$

(1) 形状決定—計算アルゴリズム

数値計算は以下のようなアルゴリズムに沿って行われる。

1. $l = 0$ とし、物体形状の初期状態 $\mathbf{x}_i^{(0)}$ を設定する。

2. 支配方程式, 式 (27), (28) より, 流れ変数の初期状態 $u_i^{(0)}, p^{(0)}$ を求める.
3. $J^{(0)}$ を計算する.
4. 随伴方程式, 式 (29)–(31) より, 随伴変数の初期状態 $u_i^{*(0)}, p^{*(0)}$ を求める.
5. $l = l + 1$ とする
6. 式 (37) より物体形状 $x_i^{(l)}$ を求める.
7. 支配方程式, 式 (27), (28) より, 流れ変数 $u_i^{(l)}, p^{(l)}$ を求める.
8. Compute $J^{(l)}$
9. $|x_i^{(l)} - x_i^{(l-1)}| < \varepsilon$ を満たせば計算終了. そうでなければ, 随伴方程式より随伴変数 $u_i^{*(l)}, p^{*(l)}$ を求め, 5. に戻る.

計算の流れとしては, まず, 計算領域において支配方程式を解き, 算定された状態量の値を用いて随伴方程式を解く. 次に, 算定された状態量と随伴量から勾配 G_i を算出する. 物体境界 Γ_B 上の G_i から, 物体の形状 x_i を更新し, その更新された形状の物体の置かれる領域で, 再び支配方程式を解くという繰り返し計算を行うこととなる. 繰り返し計算の過程で, 徐々に G_i が小さくなり, やがてゼロとなる. $G_i = 0$ となれば, 式 (33) を満たすことになるから, 拡張評価関数 J^* の第一変分 δJ^* はゼロになり, 停留条件を満たす. 同時に, 評価関数 J の停留条件をも満たすこととなり, 目的の形状を得たことになる. 収束判定値は $\varepsilon = 10^{-6}$ を使用した.

3. 三次元有限要素メッシュ生成法の最小抗力形状決定問題への適用

3.1 粘性層要素の作成法

本研究の形状決定問題においては, より正確な形状を求めるために, 物体周辺に関しては, Delaunay 分割による非構造型の有限要素メッシュよりも, 正則な構造型の有限要素メッシュが好まれる. また, 今後レイノルズ数の高い流れを対象とした場合, 粘性層を適切に表現できるメッシュは必要となることから, 本研究では, 物体表面に層を設けることとした. 本研究では, 粘性層流れを解像する目的よりも, 安定した形状を求める目的の方が強いので, この層を正則層と呼ぶこととする.

正則層は, 図-4 に示すように, 境界 (物体表面) から垂直外向き方向に, 節点を発生させることで作成する. このとき, 同一層上の隣り合う節点は互いに要素の辺で結合されてる必要がある. 二次元に於いては, 図-5 に示すように, 隣り合う層の間では四角形が形成される. この四角形の対角線を取ることによって, 三角形要素を簡単に作成することができる.

三次元に於いても, 図-6 に示すように, 層の間にできた三角柱を, 三つの四面体に切り分けることで, 四

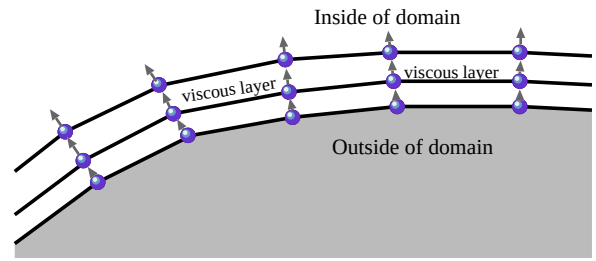


図-4 物体境界付近の構造型メッシュ層

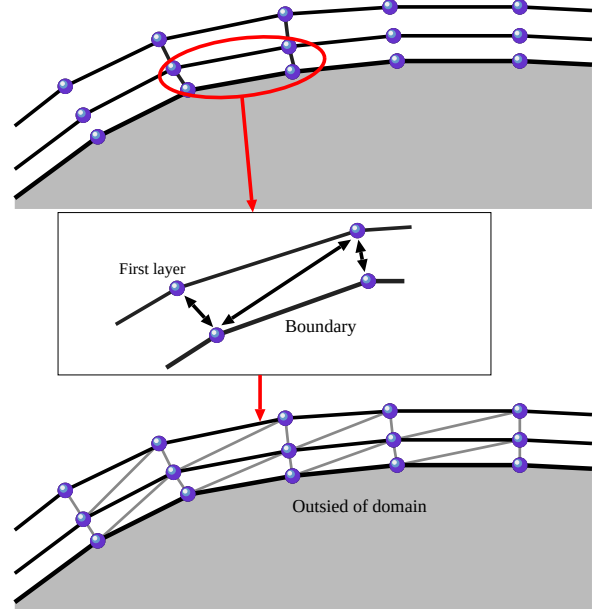


図-5 層間の三角分割

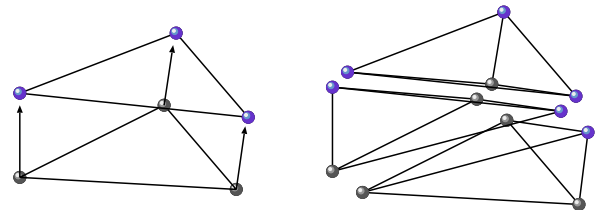


図-6 三角柱要素からの四面体分割

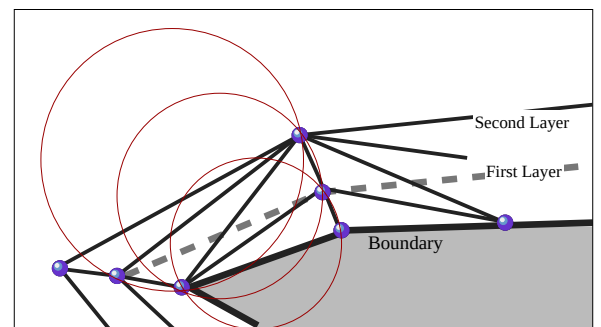


図-7 Delaunay 三角分割による粘性層メッシュの破壊

面体要素の生成を簡単に行うことができる. しかしながら, 隣合う三角柱の間で, 三角形面の不一致が起こる可能性があり, 三角柱の切り分け方に気をつけなければならない. この方法で不一致を起こさないように

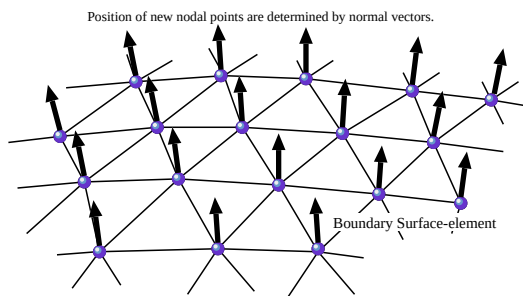


図-8 境界上節点の法線ベクトル

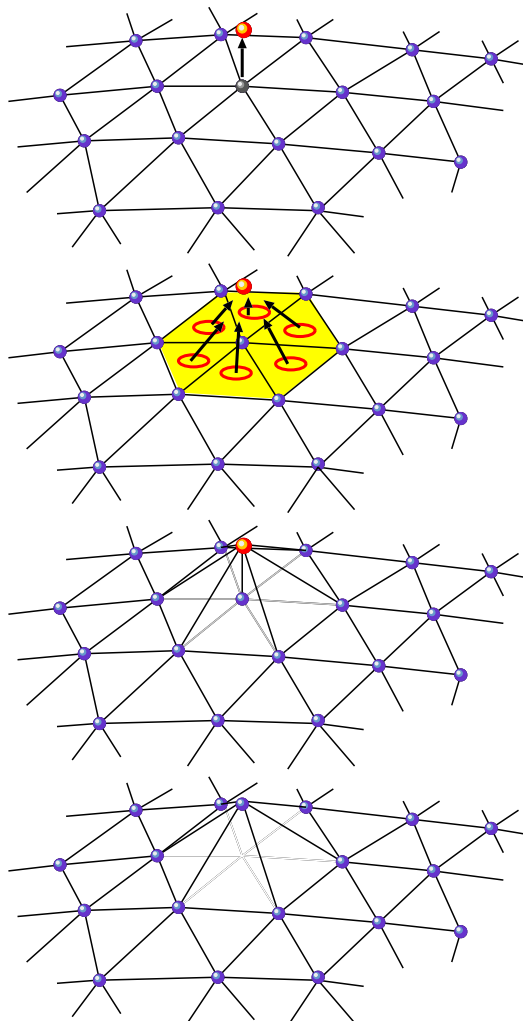


図-9 境界層間の四面体要素生成: 第一節点

分割を行う場合、作業が煩雑なものになることが予想される。

他の方法として、Delaunay 分割法を利用する方法が挙げられが、これも層を作成する上では問題が起こる。Delaunay 分割は節点の位置によって決定されるため、層を構成する節点の位置関係によっては、層を無視した要素が生成されることになる。これは、三次元に限ったことではなく、二次元でも起こりうることで図-7 状態になる。図-7 の太い破線は境界からの第一層を示

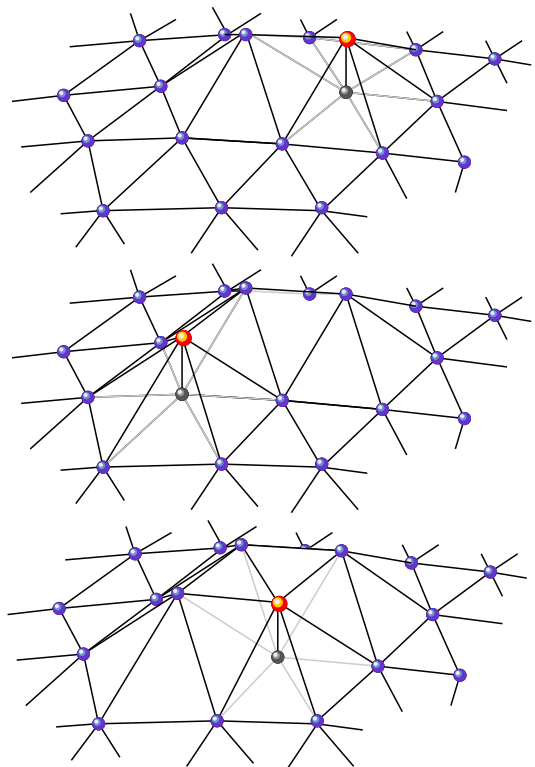


図-10 境界層間の四面体要素生成: 第二節点から第四節点

すものであり、細い実線は三角形要素の辺である。図では、第二層上の節点と境界上の節点が結合した要素が存在しており、第一層のラインを切断している。ここで、図にある三角形は円で確認できるように、図の三角形は Delaunay 三角形である。このように、Delaunay 分割法を用いた方法では層を確実に表現することが難しい。

そこで、ここでは、不一致を起こすことなく正則層を四面体分割をする方法を提案する。

(1) 摘み上げ法

本方法は境界面の節点を一つ一つ摘み上げるようにして要素及び層の作成を行うので、ここでは以降、摘み上げ法と呼ぶことにする。

1. 境界表面に三角形要素を作成し、そのリストを作成する。
2. 境界表面上の各節点ごとに、単位法線ベクトルを計算し保存する。(図-8)
3. 一つの節点 P に着目し、求めた単位法線ベクトルと層厚から新節点 Q を発生させる。
4. リストより節点 P に隣接する三角形要素を探す。
5. 節点 P に隣接する三角形要素と新節点 Q を結合することにより四面体を作成する。(図-9)
6. リストから四面体作成に使用した三角形要素を削除し、新節点周辺の三角面を追加する。(図-9 3 番目)
7. 上記手順 2. から 6. を全ての境界表面上の節点に

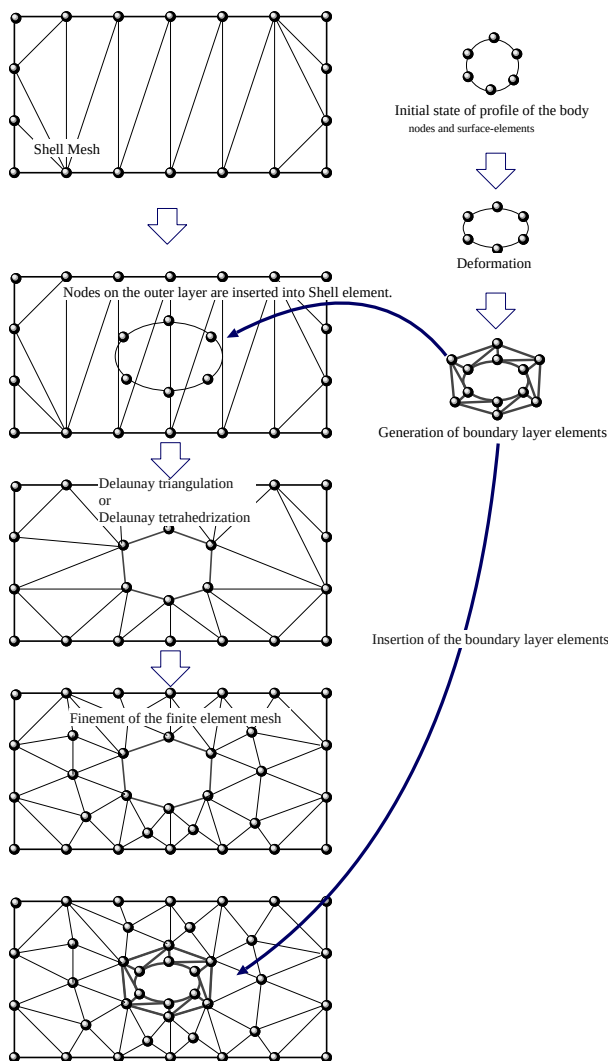


図-11 有限要素メッシュ再構築アルゴリズム

ついて繰り返す。

(2) 再構築アルゴリズム

粘性層を持つ有限要素メッシュの再構築方法のアルゴリズムを図-11に示す。この方法は、最初に、外境界の節点のみを有する殻要素メッシュデータと物体表面を表現する節点データを必要とし、以下のアルゴリズムに従い、要素の再構築を行う。

1. 形状最適化手法の結果により、物体の形状の情報を更新する。
2. 粘性層を生成する。
3. 粘性層の最も外側の節点を、殻要素メッシュに挿入し、Delaunay 分割法を適用する事で、外部領域と粘性層外側の節点のみの有限要素メッシュを作成する。
4. 解析領域全体に適切に節点を分布し、Delaunay 分割法を用いて、有限要素メッシュに挿入する。
5. 最後に、粘性層のメッシュを取り込むことで、全体領域のメッシュを構成する。

3.2 物体要素-表面要素サイズ均一化

最適形状決定問題を表面要素に関しては、節点の移動のみで対処していたため、表面要素の圧壊と膨張による破壊の二つの問題が生じた。いずれの問題に関しても、形状決定計算を停止させる原因となる。これら対して、表面要素サイズを均一に保つことで問題解決を行った。

(1) 表面要素の崩壊による計算の停止

形状決定問題において、勾配を計算すると、先端の表面要素の間隔が広がり、側面では狭まる傾向がある。微小な変形ではあるが、最適化の繰返し数が増えると、この影響が大きな問題となってくる。図-12は、先端と後端の表面三角形が広がりすぎたことにより、形状を表現できなくなった例である。ここまで先端が広がると、正しく勾配が計算できず、計算は破綻する。

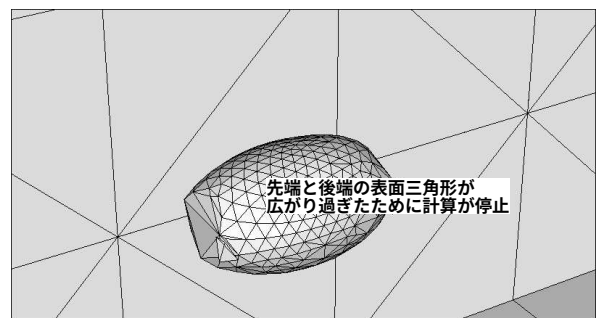


図-12 表面要素が広がることによる計算停止

表面要素が潰れる問題も発生した。この場合、潰れた表面要素に接する四面体要素の体積もゼロとなることから、計算を行えなくなる。図-13では、表面三角形メッシュの一部が押しつぶされている様子を見ることができる。この図は、形状決定で体積に関する拘束条件を、外して行ったものである。本来ならば、物体は徐々に小さくなり、最終的に点になる。しかし、この例では点にはならず、初期形状の半分ほどの径まで、小さくなった段階で計算が停止した。

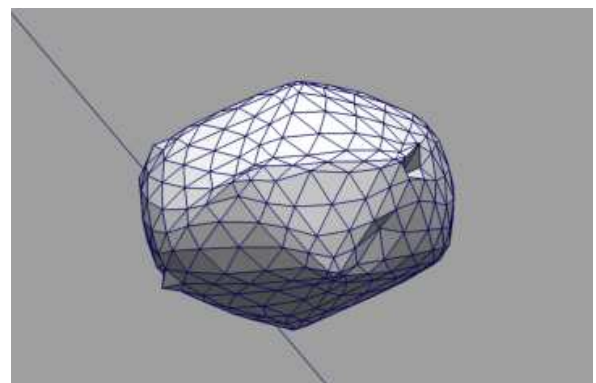


図-13 表面要素が潰れることによる計算停止

(2) 要素サイズ均一化手法

Laplacian 法と呼ばれる方法で、要素の均一化を図る。Laplacian 法は、有限要素メッシュのスモーディング

手法として、用いられているものである。ある節点に注目したとき、その節点を囲んでいる三角形群の重心に移動することにより、周囲の要素のサイズを均一にするものである (図-14)。しかし、本研究で要素サイズ

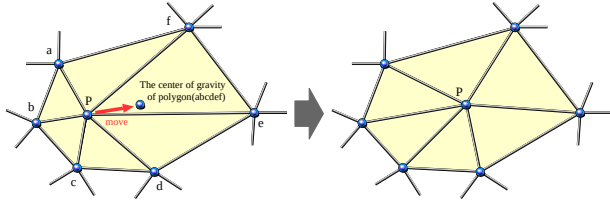


図-14 Laplacian 法による節点移動

を均一化する、領域は平面ではなく、曲面であるため、通常の方法では、面の形状が変わってしまう。図-15に、二次元における曲線領域で Laplacian 法の例を示す。節点の移動先は、

$$P' = \sum_{i=1}^{Ne} G_{e_i} \cdot A_{e_i},$$

にて計算される。 G_{e_i} 、 A_{e_i} はそれぞれ、節点に隣接する要素の重心とサイズである。図より、移動を繰り返すことで、節点は元の境界からどんどん離れていくことがわかる。従って、節点の移動の際には、節点が曲線や曲面上を移動させる必要がある。

本研究では、節点を節点の位置の法線方向と垂直に動かすことで、物体の形状を損なうことなく、要素サイズの均一化を行う方法を提案する。節点の移動方向の高速は、図-16 に示すように行う。まず、節点位置の法線は、

$$\vec{n}_{glob} = \frac{\sum_{i=1}^{Ne} \vec{n}_{e_i} \cdot A_{e_i}}{|\sum_{i=1}^{Ne} \vec{n}_{e_i} \cdot A_{e_i}|},$$

で定義する。節点が移動する、平面に投影された時の、重心 G'_{e_i} と要素サイズ A'_{e_i} は、

$$G'_{e_i} = G_{e_i} + \{\vec{n}_{glob} \cdot (G_{e_i} - P)\} \vec{n}_{glob}$$

$$A'_{e_i} = A_{e_i} \cdot \vec{n}_{glob}$$

で表すことができる。結果、節点の移動先は、

$$P' = \sum_{i=1}^{Ne} G'_{e_i} \cdot A'_{e_i},$$

にて計算することができる。

(3) アルゴリズム

1. 節点 P における法線 $\vec{n}_{glob}$ を計算する。
2. 周辺の表面要素を、 P を通り、 $\vec{n}_{glob}$ に直行する平面に投影する。
3. 投影された、要素面積 A'_{e_i} および重心 G'_{e_i} をもとめる。
4. P' を求め、節点を移動する。
5. 物体表面上の全てに対して 1. から 4. の作業を繰り返す。

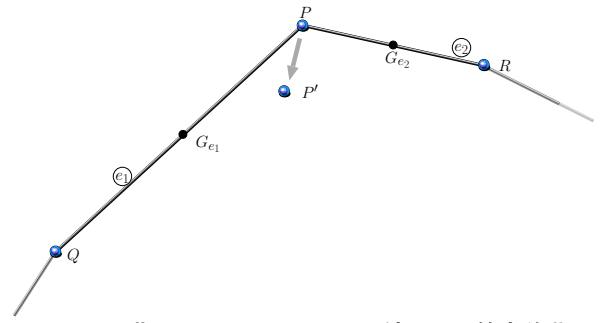


図-15 曲面上における Laplacian 法による節点移動

6. 節点の移動がなくなるまで、1. から 5. の作業を繰り返す。

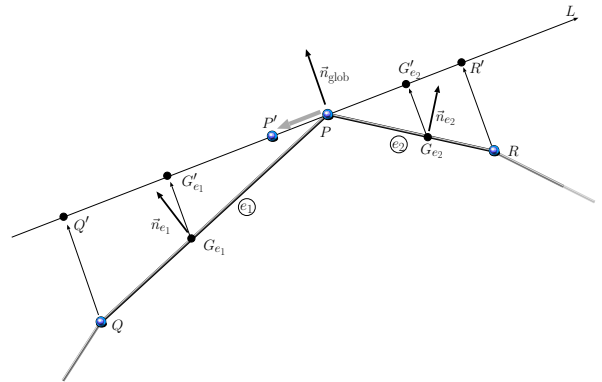


図-16 修正 Laplacian 法による節点移動

図-17 に示すように、形を損なうことなく、表面要素の均一化を行えていることが確認できる。

(4) 一様化手法の効果

表面要素が広がりすぎることによる問題と要素要素が潰れることにより起こる問題に対して、提案する均一化手法を適用する。図-18, 図-19 に例を示す。どちらの場合も、計算を破綻させることなく、目的の形状に達することができた。

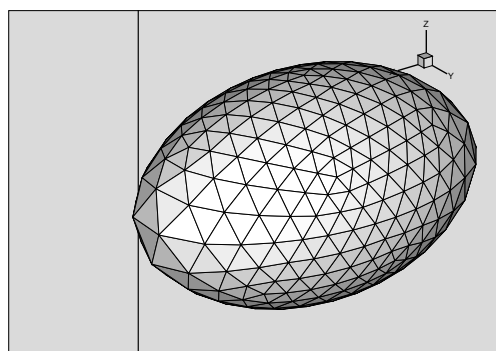
3.3 数値解析例

数値解析例として、以下のような領域における物体の流体力最小化問題を扱った。領域は非圧縮性粘性流体で満たされている。本解析では、抗力のみを形状決定に反映させるため、重み関数 q_1 , q_2 , q_3 はそれぞれ 1.0, 0.0, 0.0 に設定した。図-20 に解析領域を、図-21 に初期の有限要素メッシュを示す。図-22 は最適化前の初期形状を示す。

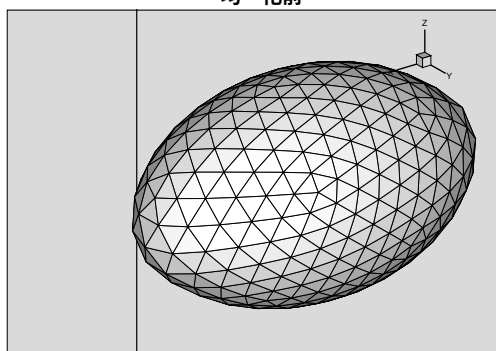
Reynolds 数は O.Pironneau の結果と比較するため、 $Re = 1$ を用いる。この数値例では、最適化プロセスを通して、節点数が約 5 千、要素数が約 2 万 7 千である。

(1) 数値解析結果

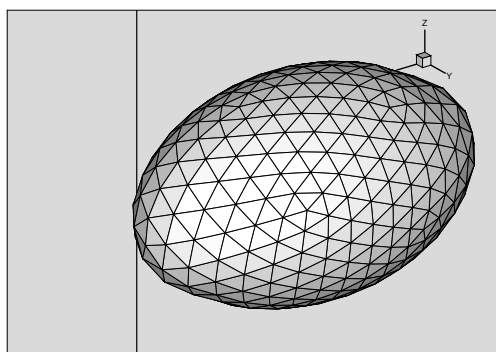
図-23 は、本研究の最適化手法により決定された形状である。図-24 は、Pironneau¹⁾ によって導出された形状と、本研究の結果とを比較したものである。図より、本解析での結果は Pironneau の示す形状と良い一致を示していることがわかる。図-26 は、に解析領域



均一化前



均一化途中



均一化後

図-17 表面要素均一化の例

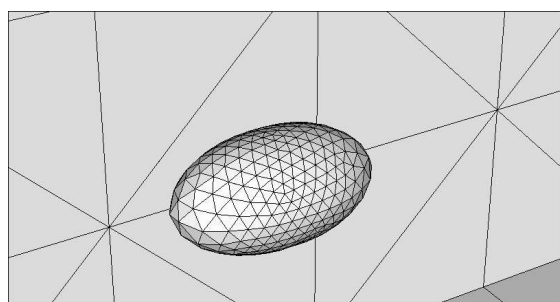


図-18 表面要素が広がってしまっていたことに対する効果

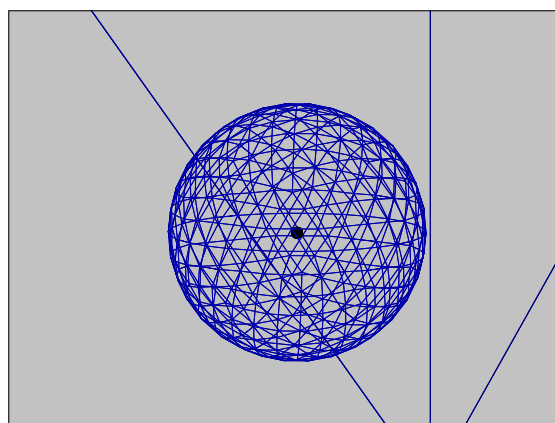


図-19 体積拘束無しの形状決定に対する効果

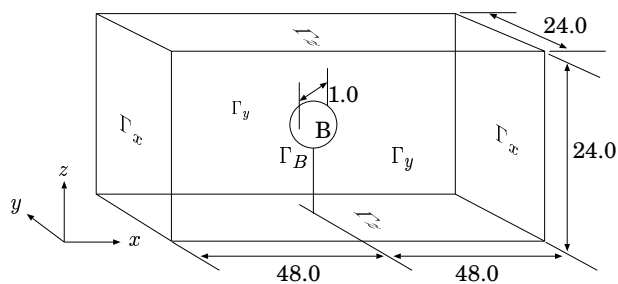


図-20 計算領域

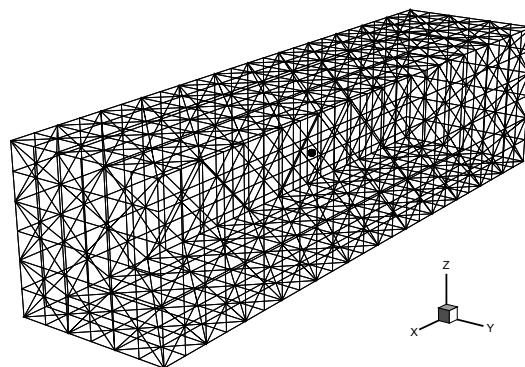


図-21 初期の有限要素メッシュ

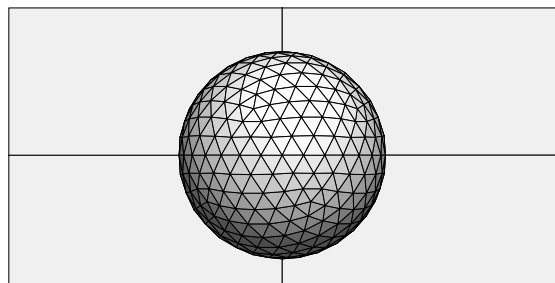


図-22 物体の初期形状

4. 結論

の有限要素メッシュの断面を表している。これより、最適化プロセスの各ステップで、有限要素の更新状況を確認することができる。

本研究では、流体中の物体の最適形状決定問題のための3次元有限要素生成法を提案した。

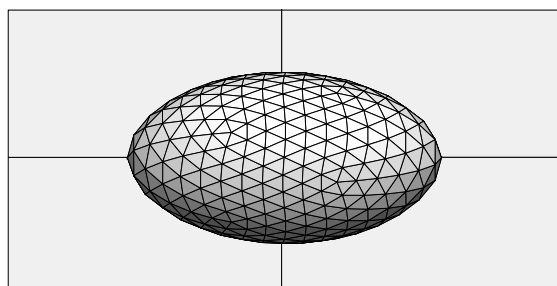


図-23 最終形状

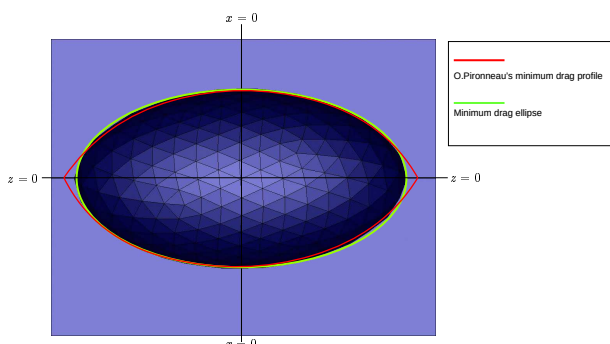


図-24 Pironneau の形状との比較

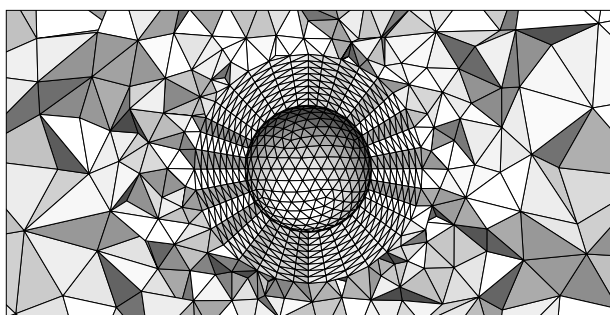


図-25 初期メッシュの断面

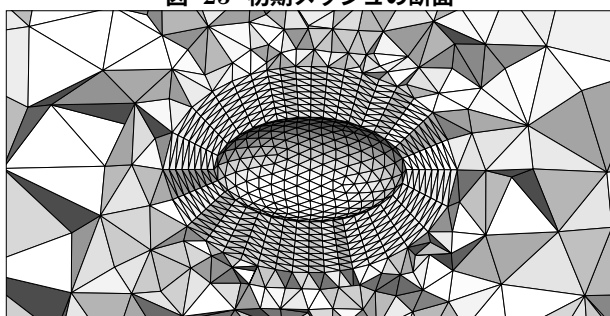


図-26 最終形状時のメッシュの断面

最適制御理論に基づく形状決定のアルゴリズムを非圧縮性粘性流れに適用した形状決定問題を取扱い、De-launay 分割法をもととした三次元メッシュの完全再構築システムの構築を行った。物体周りに三次元の構造型メッシュの層を構築する方法、表面要素の変形に対する、ロバスト向上についての表面要素均一化方法を開発し、三次元領域での抗力最小形状を導いた。

三次元に於いても、最適化プロセスの各ステップで、

解析領域有限要素メッシュを完全に更新できるようになったことで、これまで困難であった、三次元での形状決定問題を行うことを可能にした。

今後の課題として、より高い Reynolds 数での計算を行い、より複雑な流れ場へ適用していきたい。

参考文献

- 1) Pironneau, O.: On optimum profiles in Stokes flow, *J. Fluid Mech.*, Vol. 59, No.1, pp.117-128, 1973.
- 2) Ogawa, Y. and Kawahara, M.: Shape Optimization of Body Located in Incompressible Viscous Flow Based on Optimal Control Theory, *Int. J. Comp. Fluid Dyn.*, Vol. 17, No. 4, pp. 243-251, 2003.
- 3) Yagi, H. and Kawahara, M.: Shape optimization of a body located in low Reynolds number flow. *Int. J. Numer. Meth. Fluid.*, Vol. 48, pp. 819-833, 2005
- 4) 大和田康文: 非圧縮粘性流れにおける抗力最小形状の数値的決定, 中央大学修士論文, 2006.
- 5) Yagi, H. and Kawahara, M.: Numerical optimal shape determination of a body located in Incompressible Viscous Fluid Flow, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 196, pp. 5034-4091, 2007.
- 6) Brezzi, F., Arnold, D.N. and Fortin, M. : A stable finite element for the stokes equations, *Calcolo* 1, No.4, pp.337-344, 1984.
- 7) Matsumoto, J. and Kawahara, M. : Stable shape identification for fluid-structure interaction problem using MINI element, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 3, pp.263-274, 2000.
- 8) Hughes, T.J.R., Franca, L.P. and Balestra, M. : A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuska-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal order interpolation, *Comp. Methods. Appl. Mech. Eng.* Vol. 59, pp. 85-99, 1986.
- 9) Maruoka, A. and Kawahara, M. : Optimal control in Navier-Stokes equation. *Int. J. Comp. Fluid Dyn.*, Vol. 9, pp. 313-322, 1998.
- 10) Jameson, A. : Aerodynamic shape optimization using the adjoint method, *Lecture at the Von Karman Institute*, Brussels, 2003.
- 11) A. Bowyer: Computing Dirichlet tessellations, *The Comput. J.*, Vol.24, pp.162-166, 1981.
- 12) 谷口健男: FEM のための要素自動分割—デローニー三角分割法の利用 森北出版株式会社, 1992.
- 13) 杉原厚吉: FORTRAN 計算幾何プログラミング, 岩波書店, 1998.
- 14) 野島和也, 川原睦人, 三次元デローニー分割を用いた地下トンネル三次元有限要素分割モデルの作成, 応用力学論文集, Vol.5, pp. 253-262, 2002.

(2009 年 4 月 9 日 受付)