

Euler型有限被覆法による大変形固体解析に関する基礎的研究

A study of large deformation solid dynamics using Eulerian finite cover method

岡澤 重信*・車谷 麻緒**・寺沢 英之***・寺田 賢二郎****・榎山 和男†

Shigenobu OKAZAWA, Mao KURUMATANI, Hideyuki TERASAWA,
Kenjiro TERADA and Kazuo KASHIYAMA

*正会員 博(工) 広島大学 大学院工学研究科 社会環境システム専攻 (〒739-8527 広島県東広島市鏡山 1-4-1)

**正会員 博(工) 東北大学 大学院工学研究科 土木工学専攻 (〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

***正会員 修(工) 三井造船 環境・プラント事業本部 玉野プラントセンター建設部 (〒706-8651 岡山県玉野市玉 3-1-1)

****正会員 Ph.D. 東北大学 大学院工学研究科 土木工学専攻 (〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

†正会員 工博 中央大学 理工学部 都市環境学科 (〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

Finite cover approximations, which are known as the generalized version of finite element approximations, are incorporated into an Eulerian method for large deformation solid dynamics to improve the accuracy at physical boundaries. Since the finite cover method can define the physical domain independently of mathematical one that is analysis meshes, physical geometries are sharply represented and the boundary conditions are imposed within the framework of Eulerian analyses with fixed meshes. Two numerical examples are presented to demonstrate the capabilities of the proposed method in comparison with the corresponding Lagrangian analyses.

Key Words : Eulerian solution, finite cover method, boundary condition, large deformation solid dynamics

1. 緒言

大変形を伴う固体解析においては、時々刻々と変化する物体形状を追跡する必要がある。著者らはこれまでに、固体の大変形解析に対して、移動メッシュを用いた Lagrange 型解法に比べてロバストに解析が可能な固定メッシュを用いた Euler 型解法に着目して手法の開発を行ってきた^{1),2),3)}。この Euler 型解法においては解析メッシュと物体領域が必ずしも一致しないため、物体境界面をどのように定義すべきかを考える必要がある。その物体境界面を記述するために広く用いられている方法は VOF (Volume of Fluid) 法⁴⁾であるが、近年では Level Set 法⁵⁾や X-FEM^{6),7)}などを用いて物体境界面を表現することで、空間固定メッシュによる Euler 型解法による解析でも物体境界面を高精度に捕らえることが可能となっている。

固体の大変形挙動を Euler 型解法で実用的に解析するためには、さらに境界条件の設定方法が課題として残っている。上記でも述べたように解析メッシュと物体領域が一致しない Euler 型解法においては、固体解析で一般的な Lagrange 型解法のように解析メッシュの節点に境界条件を与えることはできない。このような固体解析における境界条件設定に関する問題はメッシュフリー法などでも指摘されており⁸⁾、Lagrange 型解法以外の手法で固体解析を扱う際の大きな障壁となっている。長嶋ら⁹⁾は、Euler 型解法的なボクセルメッシュ上での固体解析における境界条件の付与方法について詳細な検討を行っている。ただこれらの検討は解析対

象が線形弾性解析に留まっており、本研究で扱うような物体境界面が時々刻々と変化するいわゆる自由移動境界問題にはそのままでは適用が困難である。

近年では、解析対象の固体領域とは独立に解析メッシュを定義することが可能な有限要素法 (Finite Element Method: FEM) が注目されている。これらは総称して“一般化有限要素法”と呼ばれている。筆者らはその一般化有限要素法の一つである有限被覆法 (Finite Cover Method: FCM) の研究開発に取り組んでいる^{10),11),12)}。FCM は、近似関数を定義する数学領域と支配方程式が満たされる物理領域を分離して定義する概念を取り込むものである。解析メッシュ内部に固体領域が部分的に存在する事を許容して、メッシュ内に存在する固体境界面の位置を明確にすることができ、その境界面に境界条件を課すこともできる。

本論文の目的は、空間固定の解析メッシュ上で時々刻々と変化する固体境界面に、力学および幾何学的境界条件の付与を可能とする FCM に基づく Euler 型大変形固体解析法を提案することである。固体境界面は上記で述べた FCM により明確化する。まずは Euler 型解法について概説した後に、FCM および境界条件の導入方法について述べる。そして本手法の妥当性を検証するために、衝撃解析のベンチマーク問題と固体境界面に対して力学および幾何学的境界条件を作用させる押出成型加工解析を取り上げる。

2. 基礎方程式

平衡方程式の記述において，固体解析で一般的な Lagrange 表記では各物質点での時間変化率を表す物質時間微分が用いられる．それに対して Euler 表記では空間に固定された点での時間変化率を表す空間時間微分が用いられる．これら 2 つの関数の関係は以下のように示される．

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\phi \quad (1)$$

ここで， ϕ は任意の関数， \mathbf{v} は物質点の速度， $D\phi/Dt$ は物質時間微分で $\partial\phi/\partial t$ は空間時間微分である．

Lagrange 表記の平衡方程式は以下ようになる．

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \bar{\mathbf{b}} \quad (2)$$

ここで， ρ は密度， $\boldsymbol{\sigma}$ は応力テンソル， $\bar{\mathbf{b}}$ は物体力ベクトルを表している．そして式 (1) の関係を用いて，Lagrange 表記の平衡方程式 (2) を Euler 表記に書き換えると次式のようになる

$$\rho \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \rho\mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho\bar{\mathbf{b}} \quad (3)$$

以後，Euler 表記の平衡方程式 (3) を用いることにする．

2.1 operator split 法

弾塑性材料などの大変形固体解析で用いられる構成方程式における応力の評価は，各物質点に追従した点で定義されるひずみ速度が用いられる．しかしながら，Euler 表記での平衡方程式 (3) の左辺第 1 項目では速度の空間時間微分が用いられている．よって式 (3) を解くことによって求められたひずみ速度を，そのまま構成方程式で用いることはできない．このような問題点を解決するために，ここでは平衡方程式 (3) に対して operator split 法¹³⁾を用いる．

図-1 は，時刻 n から $n+1$ へと変形を進める際の operator split 法 の概念図である．operator split 法では，Euler 表記の平衡方程式 (3) を以下の 2 つの部分に分割する¹⁴⁾．

$$\rho \left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} \right)^L = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho\bar{\mathbf{b}} \quad (4)$$

$$\rho \left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} \right)^E + \rho\mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = \left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} \right)^L + \left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} \right)^E \quad (6)$$

式 (4) は外力項を含んだ非移流ステップ，式 (5) は移流項を含んだ移流ステップである．式 (4) の L の上添字で示された速度の時間変化率は，各物質点に追従した点で観測されるつまり Lagrange 的な変形速度の時間変化率を示している．この非移流ステップを解くことによって求められたひずみ速度を用いて，構成方程式より応力の算出を行う．そして，式 (5) の E の上添字で示された速度の時間変化率は，非移流ステップで求め

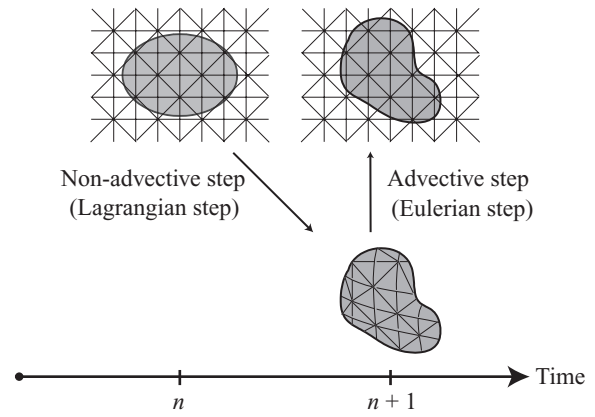


図-1 operator split 法 の概念図

られるつまり Euler 的な変形速度を空間に固定されたメッシュへ投影する際の変化率を示している．なおこの非移流ステップでの時間微分は実際には時間進行はなく静的なものである．そして，式 (6) は各時間変化率の関係を示している．

2.2 ペナルティ法を用いた弱形式

空間固定の解析メッシュを用いる Euler 型解法では，物体境界上に自由度を持つ節点が存在するとは限らないので，通常の FEM で行われるような節点値の処理により，幾何学的境界条件を課することができない．そこで本研究では，単純な処理となるペナルティ法⁹⁾を用いて変位の拘束条件を付加することにする．式 (4) に対する弱形式は次のように表される．

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{u}^* \cdot \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} dV + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^* : \boldsymbol{\sigma} dV + \int_{\Gamma_u} \mathbf{u}^* \cdot \bar{\mathbf{p}} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) ds = \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \bar{\mathbf{b}} dV + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^* \cdot \bar{\mathbf{t}} ds \quad (7)$$

ここで， \mathbf{u}^* は仮想変位ベクトル， Ω は固体領域， Γ_t と Γ_u はそれぞれ荷重と変位が規定される境界， $\bar{\mathbf{t}}$ と $\bar{\mathbf{u}}$ はそれぞれデータとして与えられる分布外力ベクトルと変位拘束ベクトルである． $\bar{\mathbf{p}}$ はペナルティ係数であり，通常は材料の弾性係数の 10^4 倍程度の実数を設定する．

3. Euler 型有限被覆法

3.1 有限被覆法 (FCM) の適用

FCM に関する詳細は文献^{10),11),12)}を参照することとし，以下では FCM と FEM の相違について簡単に説明した後，Euler 型解析法への適用性について述べる．

FEM では解析対象を要素という部分領域に分割し，各々に対して節点値による補間近似を導入する．すなわち，要素という部分領域を単位に近似領域を作成し，要素ごとに得られた方程式を要素の結合情報から全体系の連立代数方程式を組み立てるという方法論をとる．これに対して FCM では，解析対象と支配方程式の分割

と再構築という点ではFEMと同様であるが、「近似関数が定義される数学的な部分領域(数学領域)」と「支配方程式が満たされるべき物理的な部分領域(物理領域)」を分離して考えるという点でFEMとは大きく異なる。

FCMでは、解析対象とは独立に節点を単位とするPU条件 (Partition of Unity)¹⁵⁾を満たす近似関数(重み関数)を定義する。本研究では、任意形状を有する解析領域の適用性に優れている三角形要素に着目し、その中でも最も単純な1次の三角形有限要素の形状関数を重み関数とする。図-2(a)のように近似関数が定義される小領域を「数学被覆」といい、数学被覆と物体領域の共通領域を「物理被覆」という。そして、数学被覆同士の共通領域を「数学要素」、同様に物理被覆同士の共通領域を「物理要素」といい、これらがFEMでいうところの要素と対応する。

FCMでは、従来のFEMとは異なり、物体領域とは独立に近似領域を定義できるので、図-2(b)のように空間固定の定型メッシュを配置することができる。その際、物理領域で完全に満たされた要素と要素内に物理領域が部分的に存在する要素が生成される。FEMの形状関数を重み関数に採用していれば、前者の要素は通常の有限要素と同等であり、後者の要素は、図-3のように領域積分と境界積分を正しく行うことにより、弱形式(4)を満足させることができる。

すなわち、FCMをEuler型解法に適用して固体境界面を陽に表現することによって、従来は不可能であったEuler型要素内の固体境界面への力学的および幾何学的境界条件の処理が可能となる。

3.2 非移流ステップ

式(7)に対して空間離散化を施すことにより、最終的に以下の方程式が得られる。

$$M\dot{v} + F_{\text{int}} + F_p = F_{\text{ext}} \quad (8)$$

ここで、 M は質量マトリクスである。また、 F_{ext} 、 F_{int} 、 F_p はそれぞれ外力および内力ベクトル、ペナルティー法による付加拘束ベクトルであり、以下の式から求まる。

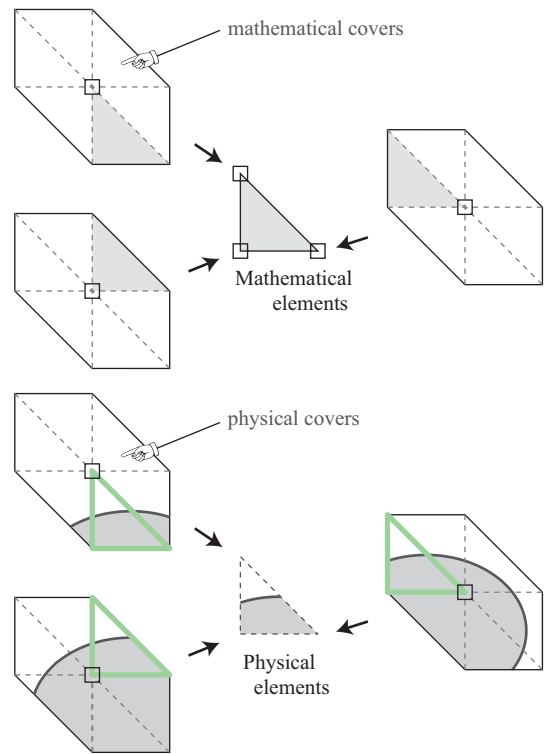
$$M = \sum_{e=1}^{nel} \rho \times \int_{\Omega_e} N_e^T N_e dV \quad (9)$$

$$F_{\text{int}} = \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e} B_e^T \sigma_e dV \quad (10)$$

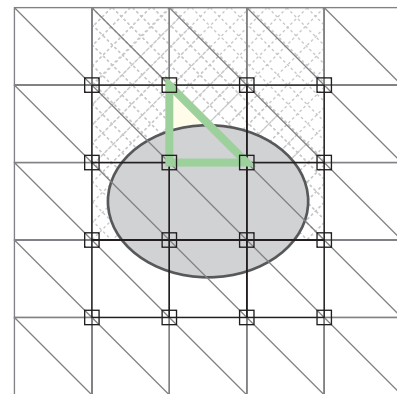
$$F_{\text{ext}} = \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Gamma_t} N_e^T \bar{t} ds \quad (11)$$

$$F_p = \bar{p} \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Gamma_u} (N_e^T N_e d_e - N_e^T \bar{u}) ds \quad (12)$$

ここで、 nel は物理要素の総数、 Ω_e は要素内の固体領域、 d は変位ベクトル、 N は重み関数から作られる形状関数マトリクス、 B は変位-ひずみマトリクスである。



(a) Definition of covers and elements



(b) Triangular finite cover mesh

図-2 FCMにおける解析メッシュの構成

FCMにおいては図-3に示すように、Euler型要素内にどのような配置で物体が混入しているかの情報を得ることができる。そのFCMによる配置を考慮した数値積分を行うことによって、式(9)における要素内の固体境界面の配置を考慮した各節点に不均一に重みを持たせた質量マトリクスさらには応力評価が可能となる。

物体の速度の算出には動的陽解法¹⁶⁾を用いる。動的陽解法の時間積分には中央差分法を用いることにより、次式のように各節点における時間増分の中地点 $n + \frac{1}{2}$ での速度 v を求めることができる。

$$v^{n+\frac{1}{2}} = v^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t (\bar{M}^n)^{-1} (F_{\text{ext}}^n - F_{\text{int}}^n - F_p^n) \quad (13)$$

ここで、式(9)の代わりに対角化された集中質量マト

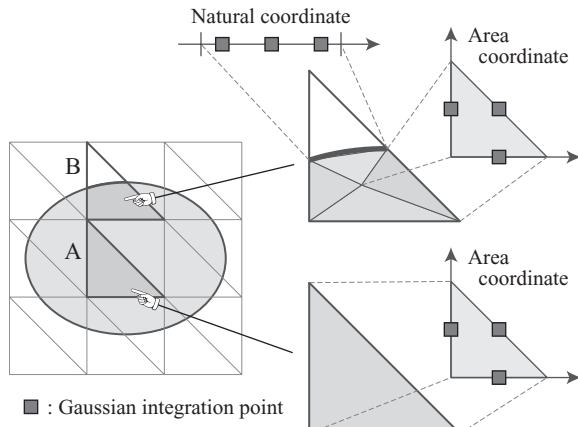


図-3 FCMにおける数値積分

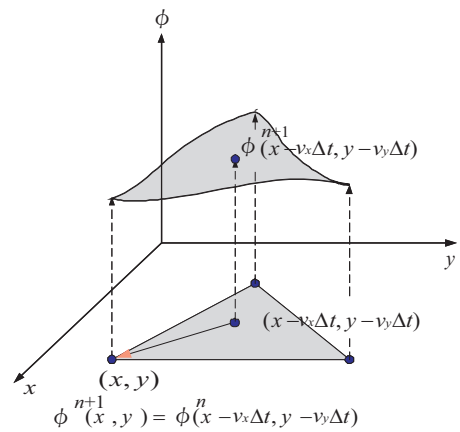


図-4 CIVA法における上流点の評価方法

リクス \bar{M} を用いることで、式 (13) をスカラー方程式とすることができる。ここで上添字 n は現時刻での諸量であることを意味する。またここで求められた変形速度を用いてひずみ速度を算出し、half step rotation と呼ばれる大ひずみに対応した客観応力速度による応力積分¹⁶⁾を行い応力を算出する。

3.3 移流ステップ

移流ステップにおいては、質量と速度だけでなく応力や相当塑性ひずみ等の経路依存諸量も固定メッシュ上へと投影する必要がある。そのため、移流ステップで解く方程式を式 (5) から新たに次式のように書き換えて解く。

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^E + \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (14)$$

ここで、 ϕ は固定メッシュ上へと投影する関数である。

以下で述べる CIVA 法において、まずは VOF 関数を用いて固体境界面を陰的に求める。その後その VOF 関数の情報をもとにして FCM により固体境界面を陽的に求めることができる。そして FCM により陽的に求めた固体界面情報により式 (9) の質量マトリクスを設定することにより、固体界面が要素内にどのような配置されているかを考慮した応力評価が可能となる。

(1) 移流解法

移流方程式 (14) の解法には、三角形メッシュを用いた高精度移流解法として知られる CIVA (Cubic Interpolation with Volume/Area coordinate) 法^{17),18)}を適用する。図-4 に CIVA 法の概念図を示す。CIVA 法は、移流方程式の厳密解 (15)(16) から時刻 $t - \Delta t$ において上流点に位置する点 $x - v_x \Delta t, y - v_y \Delta t$ を探索し、上流点での値である $\phi^n(x - v_x \Delta t, y - v_y \Delta t, t - \Delta t)$ を上流点を含む三角形要素間で高次の補間により値を求める手法である。また上流側の要素に対する 3 次補間曲面は、式 (16) のように表現

できる。

$$\phi^{n+1}(x, t) = \phi^n(x - \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t, t - \Delta t) \quad (15)$$

$$\phi(L_1, L_2, L_3) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i L_i + d \sum_{j,k=1, j \neq k}^3 \beta_{jk} (L_j^2 L_k + c L_1 L_2 L_3) \quad (16)$$

$$\alpha_i = \phi_i \quad (17)$$

$$\beta_{jk} = \phi_j - \phi_k + (x_k - \phi_j) \cdot \nabla \phi_j \quad (18)$$

ここで、 d は 1 次補間と 3 次補間の調節パラメータであり、 $d = 0$ のとき 1 次で $d = 1$ のとき 3 次補間となる。また、 L は面積座標、 c は既存の研究で最適とされた $1/2$ を用いる。 α_i, β_{jk} は、上流側の三角形要素における関数 ϕ とその空間微係数の節点値を補間できるように式 (17)(18) で与えられる。

(2) 要素内の経路依存諸量の移流手法

式 (14) を CIVA 法を用いて計算する際に、移流計算される諸量は節点上の値となる。よって節点値として定義される速度などの諸量はそのまま移流計算できるのに対して、応力や相当塑性ひずみなどの要素値として定義される経路依存諸量は、式 (14) をそのまま適用できない。そこで、要素値として与えられる諸量の移流に関しては、要素内に点を発生させその点を節点とする新たな計算格子を構築する。この再構築された移流計算格子を用いることによって要素値として与えられる諸量を移流させる。

図-5 に要素内の諸量移流のための計算格子再構築図を示す。本研究で扱っている Euler 型有限被覆法では、要素内に存在する固体領域の位置を反映した解析を行うことができる。よって固体領域を含んだ物理要素では固体領域の重心に新たに点を配置し、固体領域を含まない要素では数学要素の重心に点を配置する。そしてこれらの新たな点を結ぶことで三角形要素を生成する。その後は上記で述べた節点上の移流と同等の操作で移流計算を行う。なお、移流計算格子の生成には Delaunay 分割法を用いた。

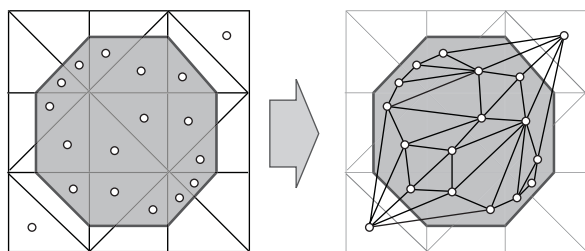


図-5 要素内諸量を移流させるための計算格子再構築

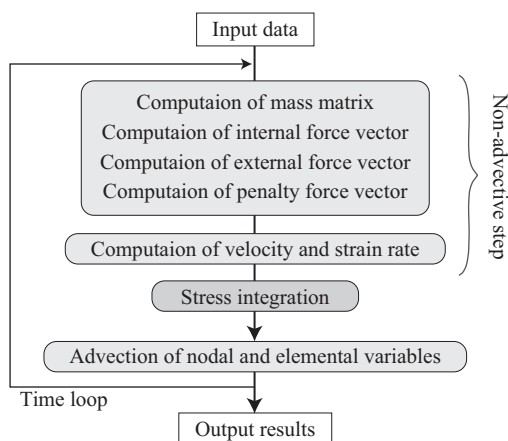


図-6 Euler型有限被覆法の解析アルゴリズム

4. 数値解析例

本手法の有効性を検討するために2つの大変形固体解析を実施した。1つ目はベンチマーク問題として有名な衝突解析であり、2つ目は力学的および幾何学的境界条件を課した押出成型加工解析である。これらの解析に用いる材料はすべて弾塑性材料であり、Misesの降伏関数による関連流れ則で構成方程式をモデル化した。弾性係数は21.8 GPa、初期降伏応力は200 MPa、ポアソン比は0.28、密度は1710 kg/m³とした。また硬化係数0.1 GPaのバイリニア硬化型を仮定している。なおここでは大変形時に生じる非圧縮性に対処するための特別な処置をせずに、三角形1次要素の完全積分を行っている。

図-6は本手法の解析アルゴリズムである。このアルゴリズムに沿って解析を実施する。

4.1 衝突解析

1つ目の解析例は、大変形固体解析のベンチマーク問題である金属材料の衝突解析¹⁹⁾を扱った。図-7は解析モデルを示している。物体に対して鉛直下向きに初期速度300 m/sを与える。解析領域の拘束条件に関しては、下端部と左端部をローラ支点とした。図-8に解析に用いた要素分割図を示す。ここではすべて構造格子によって領域分割を行った。本手法による解析結果を4節点アイソパラメトリック要素によるLagrange型

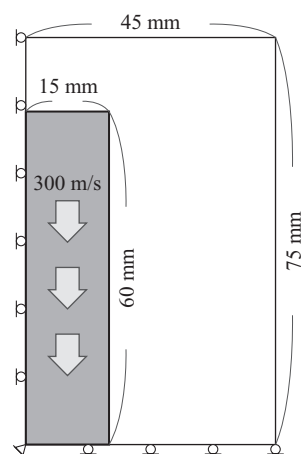


図-7 衝突解析モデル

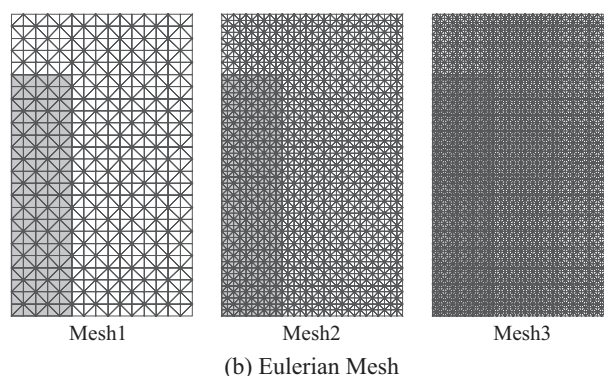
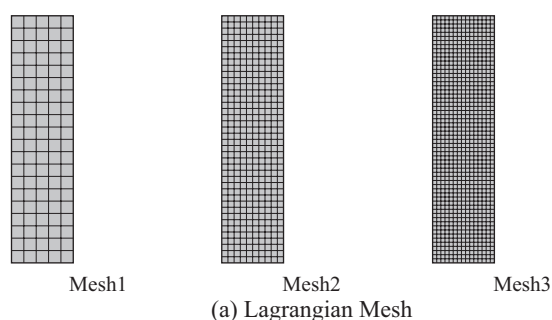


図-8 衝突解析の要素分割

有限要素法との解析結果と比較してその妥当性を検討する。

図-9に、Lagrange型有限要素法とEuler型有限被覆法で解析を行った際の各要素分割ごとの80 μs後の変形と相当塑性ひずみの分布図を示す。さらに図-10と図-11に各手法ごとの固体形状の比較を示す。これらの結果から、本手法のEuler型有限被覆法はLagrange型有限要素法の結果に比べて、変形量が若干小さくなっているものの相当塑性ひずみの分布などに関しては整合性のある結果を示していることがわかる。Euler型有限被覆法では、要素分割が粗いMesh1において、固体境界面に若干の振動が見て取れる。これは、本手法では

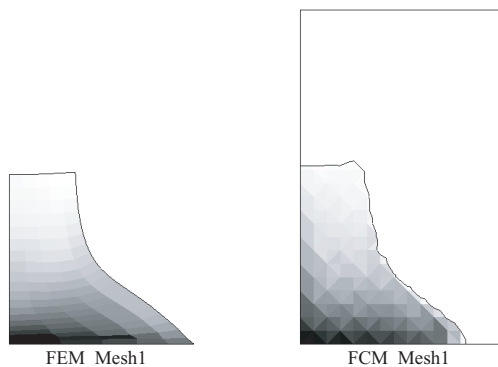


図-9 変形と相当塑性ひずみ分布図 (80 μ s)

三角形 1 次要素による近似性能の影響であるが、解析結果のようにメッシュ分割が細くなると振動は低減していくことになる。Euler 型有限被覆法ではメッシュ分割が粗くても要素が歪むことがないため、要素の近似次数を上げることにより良好な解析精度を保持しながら解析を進めていくことができると考えられる。

4.2 押出成型加工解析

2 つ目の解析例は押出成型加工解析²⁰⁾である。力学および幾何学的境界条件を作用させる問題を設定し、Lagrange 型解法との比較を通じて提案手法の有効性を検証する。

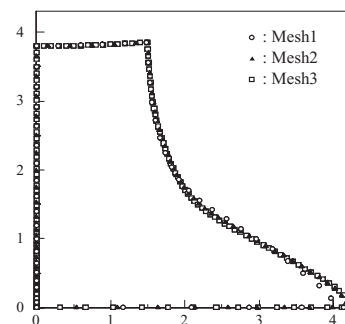


図-10 Lagrange 型有限要素法での固体形状の比較

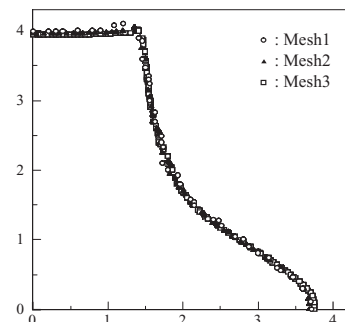


図-11 Euler 型有限被覆法での固体形状の比較

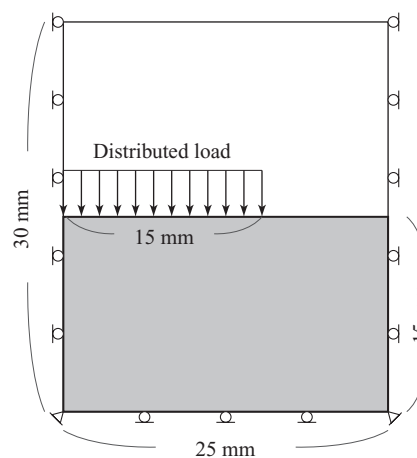


図-12 押出成型加工解析モデル (力学的境界条件)

(1) 力学的境界条件による押し込み

図-12 に示すように、固体境界面に力学的境界条件を課して物体上端部に分布荷重を作用させる。解析領域の拘束条件に関しては、左端部・右端部・下端部をローラ支点とした。図-13 は固体上端部に与える分布荷重の時刻歴であり、加工の振動を低減するために分布荷重を線形に増加させている。また図-14 に解析に用いた要素分割図を示す。ここでも Lagrange 型有限要素法には 4 節点アイソパラメトリック要素を採用している。

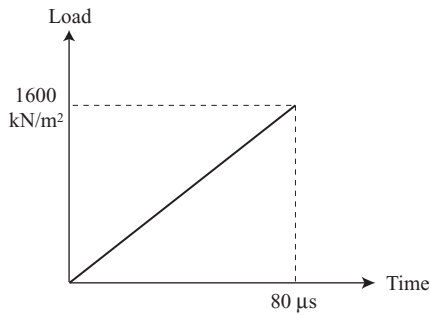


図-13 分布荷重の時刻歴

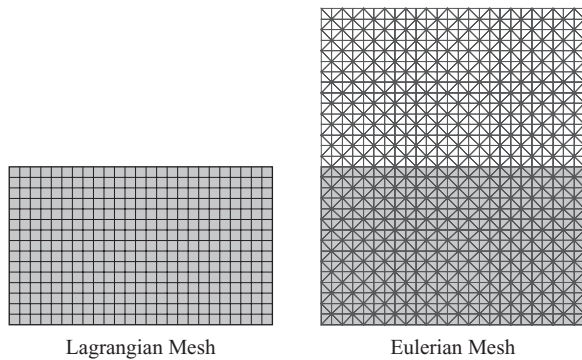


図-14 押出成型加工解析の要素分割

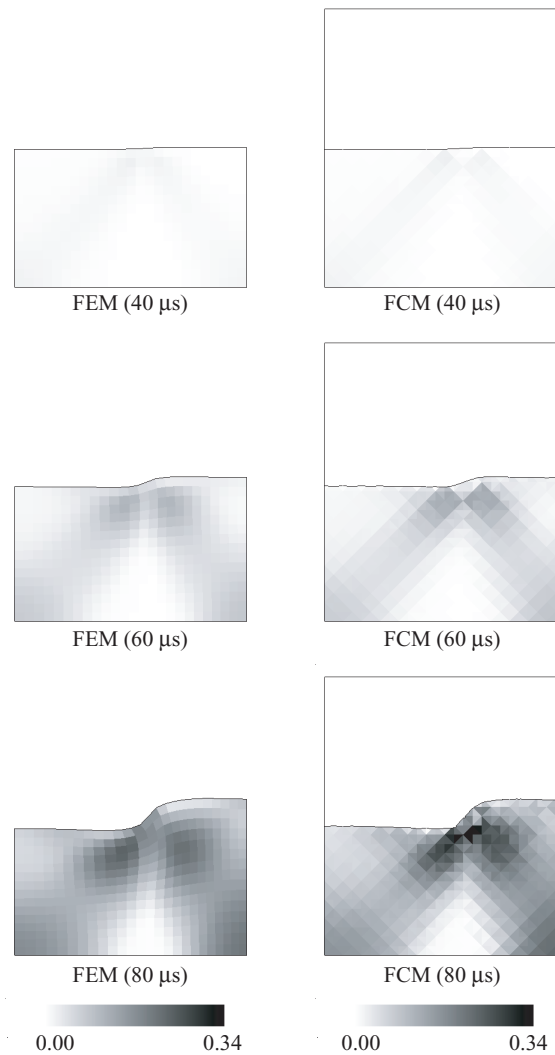


図-15 変形と相当塑性ひずみ分布図

図-15 は、Lagrange 型有限要素法と Euler 型有限被覆法で解析を行った際の変形と相当塑性ひずみの分布図を示している。また図-16 は 80 μ s 後の固体形状の比較である。これらの図から、本手法は Lagrange 型有限要素法とほぼ同等の変形挙動・相当塑性ひずみ分布を示していることが確認でき、従来の Euler 型大変形固体解析法では実現されていなかった力学的境界条件の付与が可能となった。

(2) 幾何学的境界条件による押し込み

図-17 に示すように、固体境界面に幾何学的境界条件を課すことで物体上端部に鉛直下向き 100 m/s の等速度を与えて押し込んだ。ここでも解析領域の拘束条件に関しては、左端部・右端部・下端部をローラ支点とした。解析には前例題と同じ図-14 に示す要素分割を用いる。

図-18 は、Lagrange 型有限要素法と Euler 型有限被覆法で解析を行った際の変形と相当塑性ひずみの分布図を示している。また図-19 は 15 μ s 後の固体形状の比較である。これらの結果から、Lagrange 型有限要素法とほぼ同等の変形と相当塑性ひずみ分布を示していることが確認できる。したがって、力学的境界条件に加えて幾何学的境界条件についても精度良く課すことに成功した。

また、図-20 は、Lagrange 型有限要素法において 15 μ s

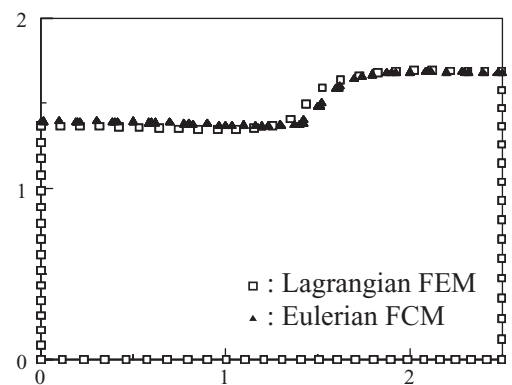


図-16 固体形状の比較 (80 μ s)

後以降の計算結果を表しているが、これによると 40 μ s 時に要素がつぶれ最終的には解析が破綻している。これに対して、本手法である Euler 型有限被覆法では図-21 に示すように大変形領域の押出加工解析が安定に実行できていることが確認できる。今回は定性的整合

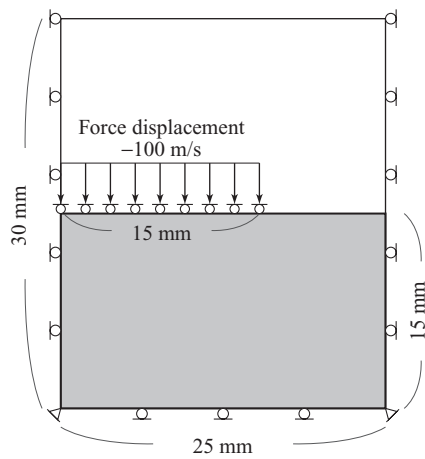


図-17 押出成型加工解析モデル (幾何学的境界条件)

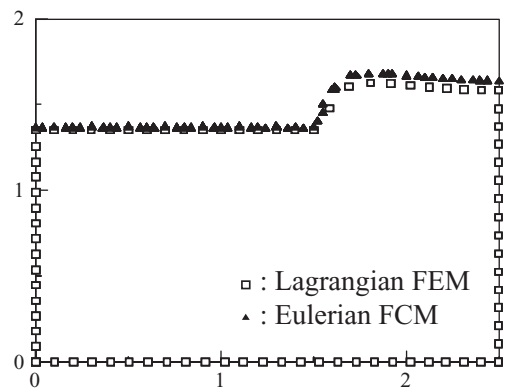


図-19 固体形状の比較 (15 μ s)

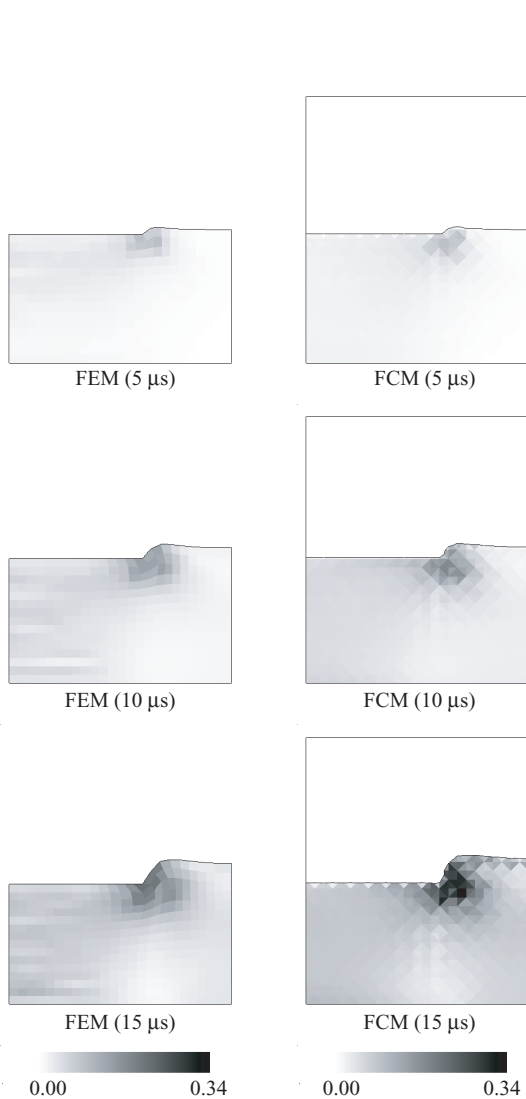


図-18 変形と相当塑性ひずみ分布図

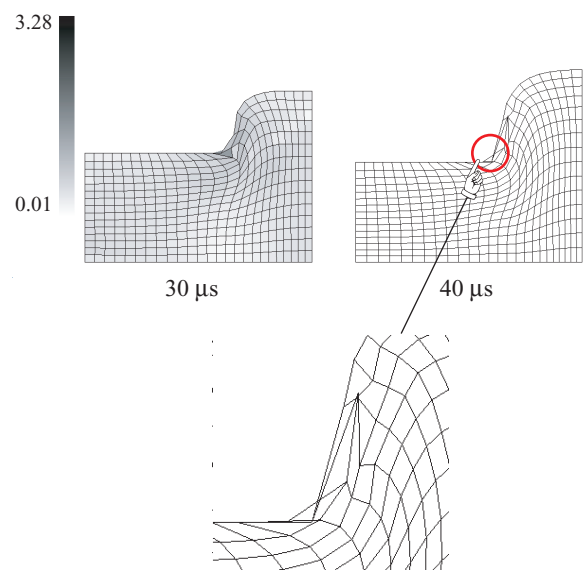


図-20 Lagrange 型有限要素法でのメッシュ破綻状況

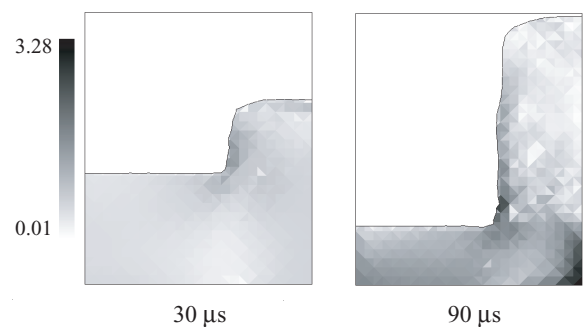


図-21 Euler 型有限被覆法での大变形領域の解析

性の検討に留まっているが、定量的整合性は今後の課題である。

5. 結言

既存の有限要素法に基づく Euler 型解法による固体解析では、固定された Euler 型解析メッシュ内の物体境界を明確に定義することができず、そのために固体

境界面に力学的および幾何学的境界条件を与えることができなかった。本論文では、有限被覆近似に基づいた Euler 型大変形固体解析手法を構築することにより、固定メッシュ内で時々刻々と変化する固体領域を明確に表現した。さらに明確に定義した固体境界面に対して、力学的および幾何学的境界条件を課すことを可能とした。

鍛造問題などの複雑な塑性加工解析への適用が今後の課題となる。また、手法の拡張として四角形要素の利用や三次元化などが挙げられる。

謝辞

本研究は文部科学省科学研究費補助金（基盤研究(B):19360207）の援助を受けた。

参考文献

- 1) Benson, D.J. and Okazawa, S.: Contact in a mutimaterial Eulerian finite element formulation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **193**, pp.4277–4295, 2004.
- 2) 金子恭久, 岡澤重信, 檜山和男: 安定化有限要素法を用いた Eulerian 解法による固体の大変形解析, *応用力学論文集*, **8**, pp.311–317, 2005.
- 3) Okazawa, S., Kashiyama, K. and Kaneko, Y.: Eulerian formulation using stabilized finite element method for large deformation solid dynamics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **72**, pp.1544–1559, 2007.
- 4) Hirt, C.W. and Nichols, B.D.: Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries, *Journal of Computational Physics*, **39**, pp.201–225, 1981.
- 5) Osher, S. and Fedkiw, R.P.: *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*, Springer, 2002.
- 6) Belytschko, T. and Black, T.: Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **45**, pp.601–620, 1999.
- 7) Moes, N., Dolbow, J. and Belytschko, T.: A finite element method for crack growth without remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **46**, pp.131–150, 1999.
- 8) Wu, C.K.C. and Plesha, M.E.: Essential boundary condition enforcement in meshless methods: boundary flux collocation method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **53**, pp.499–514, 2002.
- 9) 長嶋利夫, 新山健二, 石原嘉一: 構造的なメッシュを用いた応力解析における基本境界条件付与方法の検討, *日本機械学会論文集 (A 編)*, **70**, pp.354–362, 2004.
- 10) 鈴木克幸, 大坪英臣, 寺田賢二郎, 関勝載, 金伝栄, 中西克嘉: ボクセル被覆による 3 次元ソリッドのメッシュレス解析, *応用力学論文集*, **1**, pp.215–222, 1998.
- 11) 車谷麻緒, 寺田賢二郎: 有限被覆法における一般化要素の近似性能に関する基礎的研究, *日本計算工学会論文集*, *日本計算工学会*, 論文番号 20030027, 2003
- 12) Terada, K., Maruyama, A. and Kurumatani M.: Eulerian finite cover method for quasi-static equilibrium problems of hyperelastic bodies, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, **23**, pp.1081–1094, 2006.
- 13) Chorin, A.J.: Flame advection and propagation algorithm, *Journal of Computational Physics*, **35**, pp.1–31, 1980
- 14) Vitali, E. and Benson, D.J.: Contact with friction in multi-material arbitrary Lagrangian-Eulerian formulations using X-FEM, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **76**, pp.893–921, 2008.
- 15) Melenk, J.M. and Babuska, I.: The partition of unity finite element method: Basic theory and applications, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **139**, pp.289–314, 1996.
- 16) 岡澤重信, 河口篤志, 藤久保昌彦: 各種メッシュ制御における動的陽解法, *応用力学論文集*, **6**, pp.151–158, 2003.
- 17) 田中伸厚: 数値流体力学のための高精度メッシュフリー手法の開発, *日本機械学会論文集 (B 編)*, **64**, pp.1071–1078, 1998.
- 18) Tanaka, N.: The Civa method for mesh-free approaches : improvement of the CIP method for n simplex , *Computational Fluid Dynamics Journal*, **8**, pp.121–127, 1999.
- 19) Wilkins, M.L. and Guinan, M.W.: Impact of cylinders on a rigid boundary, *Journal of Applied Physics*, **44**, pp.1200–1206, 1973.
- 20) Rowe, G.W., Sturges, C.E.N., Hartley, P. and Pillinger, I.: *Finite-element Plasticity and Metal Forming Analysis*, Cambridge University Press, 1991.

(2009年4月9日受付)